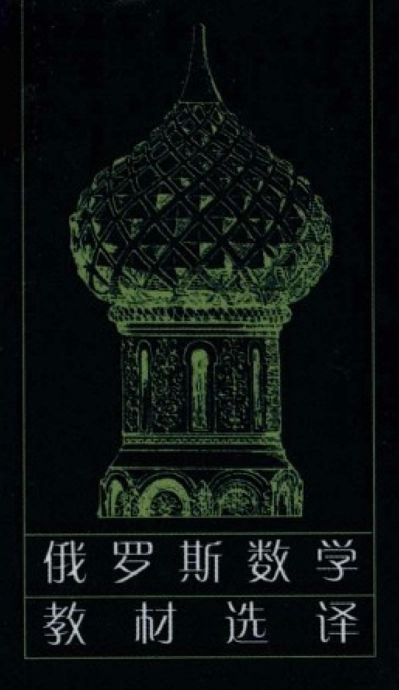


俄罗斯数学
教材选译

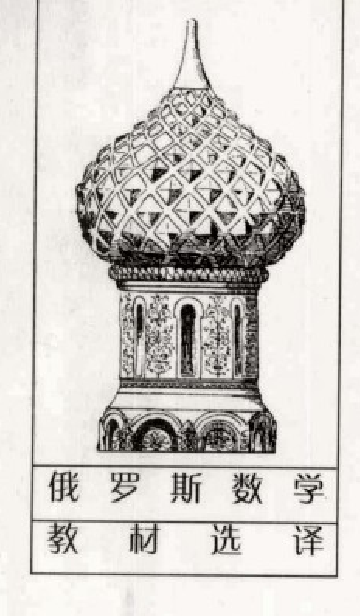
连续介质力学

(第一卷) (第6版)

□ Л. И. 谢多夫 著
□ 李植 译



高等教育出版社
Higher Education Press



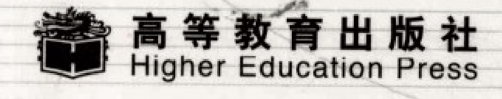
● 数学天元基金资助项目

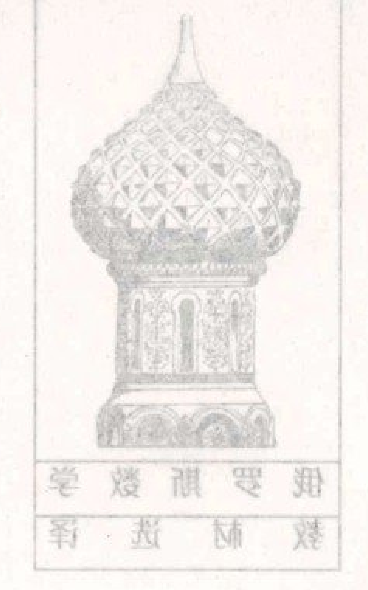
连续介质力学

(第一卷) (第6版)

☐ Л. И. 谢多夫 著

☐ 李植 译





图字：01–2007–3073 号

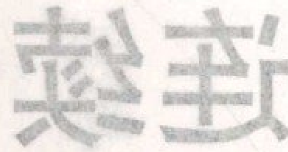
МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Л. И. Седов

Лань, 2004

Originally published in Russian under the title

Continuum Mechanics



图书在版编目（CIP）数据

连续介质力学. 第1卷：第6版／（俄罗斯）谢多夫著；
李植译. —北京：高等教育出版社，2007.9

ISBN 978-7-04-022155-8

Ⅰ. 连…　Ⅱ. ①谢…②李…
Ⅲ. 连续介质力学—高等学校—教材　Ⅳ. 033

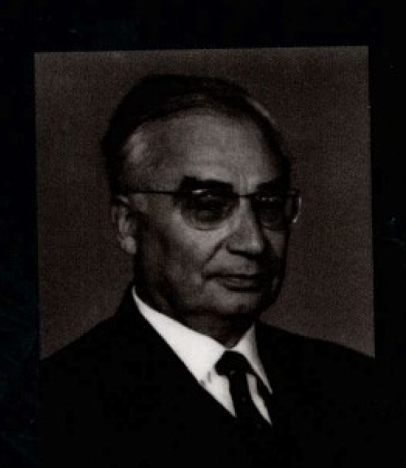
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 141066 号

策划编辑　郑轩辕　**责任编辑**　郑轩辕　**封面设计**　王凌波
责任绘图　朱　静　**责任印制**　韩　刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京民族印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2007年9月第1版
印　　张	26.75	**印　　次**	2007年9月第1次印刷
字　　数	540 000	**定　　价**	49.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　22155-00



谢多夫

Л. И. Седов

（1907—1999）

俄罗斯力学家。1907年11月生于顿河罗斯托夫。1931年毕业于莫斯科大学，1936年获得技术科学副博士学位，1937年获得数理科学博士学位。从1937 年起担任莫斯科大学力学数学系教授，1946年当选为苏联科学院通讯院士，1953年当选为院士。曾经获得社会主义劳动英雄称号、列宁勋章（6枚）等许多荣誉称号和奖章。主要研究领域涉及连续介质力学、流体力学、空气动力学和相对论，著有专著《流体力学和空气动力学平面问题》、《力学中的相似方法与量纲理论》、《连续介质力学引论》和教材《连续介质力学》（共2卷）。

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为

主，也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材，也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版，但经多次修订重版，面目已有较大变化，至今仍广泛采用、深受欢迎，反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力，对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版，将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来，对推动我国数学课程设置和教学内容的改革，对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才，可望发挥积极的作用，并起着深远的影响，无疑值得庆贺，特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

译者序

本书作者 Л.И. 谢多夫的名字对国内许多读者来说并不陌生，其代表作《力学中的相似方法与量纲理论》的中译本早在 1982 年就由科学出版社出版. 现在，他的另外一本享誉世界的著作《连续介质力学》(共 2 卷) 的中译本由高等教育出版社出版，这对相关专业的学生、教师和研究人员来说无疑是一件喜事.

作为俄罗斯科学院院士和莫斯科大学流体力学学派的领袖，Л.И. 谢多夫在大量从事科学研究和社会活动的同时仍然极其重视教育工作，在他的学生中有 4 位院士、50 多位博士和 130 多位副博士[1]. Л.И. 谢多夫曾经多次表示，在所获得的所有职位和称号中，他最看重莫斯科大学教授的头衔，在他的西装上总是别着一枚莫斯科大学授予的荣誉徽章. 这本书就是 Л.И. 谢多夫多年来教学工作的结晶. 正是在他的推动下，从 20 世纪 60 年代开始，连续介质力学成为莫斯科大学力学数学系力学专业和数学专业的必修课，整个课程体系也相应发生了根本变革，逐渐形成了以理论力学、连续介质力学和控制力学这 3 门必修课为核心的力学专业新教学计划并沿用至今. 实际教学效果表明，这样的新教学计划反映了学科的发展趋势，对培养掌握现代化知识体系的高级人才功不可没.

本书是专门为力学专业大学生编写的教材，重点讲述如何建立连续介质的数学模型. 作者是建立连续介质数学模型的大家，他的经验和思路很好地融合在全书的内容里. 全书材料的取舍和叙述方式都经过作者的精心设计. 在译者看来，书中独具特色的部分一是对张量本质的介绍和自然而严谨的处理方法，二是对连续介质热力学的简要介绍，三是对问题提法的全面论述. 此外，读者可以看到，书中有大段的文

[1] 俄罗斯的副博士 (кандидат наук) 学位相当于我们通常所说的博士 (Ph.D.) 学位，而俄罗斯的博士 (доктор наук) 学位则是更高一级的学位，一般要求学位获得者在相关领域具有非同寻常的贡献.

字 (而不是公式) 详细地从各个角度甚至从哲学层面上论述建立数学模型的本质、意义、假设和方法, 这也是此书明显有别于其他教材的地方. 因此, 把这本书介绍到中国来具有重要意义.

在 20 世纪 90 年代在莫斯科大学力学数学系留学期间, 译者作为一名力学专业的本科生完整地上过由 E. B. 洛马金教授主讲的连续介质力学课程. 课程持续 3 个学期, 主要内容与 Л. И. 谢多夫的《连续介质力学》基本一致. 译者至今还清晰地记得当时上课记笔记、课后仔细阅读这本教材并与笔记内容进行对照的情景. 初次学习连续介质力学这样的课程无疑有一定困难, 但 Л. И. 谢多夫的教材对译者很有帮助. 当时的感觉是, 这门课和教材都很难, 但是经过仔细思考可以接受和掌握. 译者在后来的研究和教学工作中又多次阅读过这本书的相应章节, 例如在北京大学为力学专业学生讲授流体力学时, 尤其是在介绍张量和建立流体模型时主要参考了这本书的讲法, 取得了很好的教学效果. 这本书的可贵之处在于, 对学生而言, 书的内容丰富而经典, 有一定难度但又不是高不可攀; 对教师而言, 这是一本可以常置案头的参考书. 这就是此书多年来能够不断再版并被译为多种文字的根本原因, 译者相信其中文版同样能够在很长一段时间内使读者受益.

译者在留学期间与 Л. И. 谢多夫院士建立了很好的私人关系. Л. И. 谢多夫曾经多次表示, 虽然他的《连续介质力学》已经被翻译为英文、法文、日文和越南文, 但一直没有中文版是一件非常遗憾的事情, 因为中国是一个大国, 有众多的科技人员和大学生. 他相信这本书对中国科技界是有用的参考书, 因此, 他委托译者来翻译《连续介质力学》. 1999 年秋天, 在译者回国后不久, Л. И. 谢多夫院士以 92 岁高龄辞世. 惊闻噩耗之余, 译者发誓要精心完成他的遗愿. 在一些准备工作之后, 从 2002 年起, 译者开始认真地进行翻译工作. 历经 6 年辛苦工作, 第一卷终于付印, 希望能够得到广大读者的认可. 2007 年是 Л. И. 谢多夫的百年寿辰, 谨以此书纪念这位为科学和教育事业做出重大贡献的科学家!

本书涉及物理、数学等领域的大量专业术语, 译者尽可能使术语的翻译规范化, 但也遇到了大量困难. 困难之一是中文术语本身就不统一, 在不同领域有不同的习惯和用法. 译者主要使用全国自然科学名词审定委员会公布的《力学名词 1993》、《物理学名词 1996》和《数学名词 1993》(以下统一简称为《名词》) 和相应国家标准作为翻译标准, 同时还参考了科学出版社出版的《物理学词典》等工具书和词典, 以及其他一些俄文书的中译本. 不过, 考虑到学科的特点和译者所掌握的一些文献中的使用习惯, 仍有个别名词没有按照国家标准翻译, 例如在张量分析中广为使用的协变和逆变 (《名词》中为共变和反变), 量纲分析中的无量纲量 (在国家标准中为量纲一的量), 等等. 原书使用的个别术语已经过时, 译者一般依照原文翻译, 但在该术语第一次出现时在脚注中注明其标准名称, 例如热力学中的内能现在改为热力学能; 少量没有按照原文直接翻译的名词则在脚注中加以说明. 此外, 激波和冲击波 (击波) 都是表示突跃压缩的术语, 译文采用前者, 因为这是流体力学中更为常见的用法, 尽管

俄文 ударная волна 从字面上直接翻译就是冲击波. 书后的人名译名对照表是由译者添加的.

中文版完全保持了原书的排版风格, 尤其是小标题的样式与原书一致, 这被认为是原书的一个有益于阅读的重要特点. 除了改正一些印刷错误和明显的疏漏, 译者还增加了一些注释并重新制作了索引. 为了便于读者查阅书中引用的俄文文献, 译者尽可能找到相应中文版或英文版并将其列在俄文文献之后. 由于原书历经多次修订和增补, 部分公式的编号出现多种形式 (例如用带撇号的数字或用字母表示), 所以在中文版中按照形式统一的原则对正文中的公式编号进行了调整, 并且去掉了那些不被前后文引用的编号. 此外, 译者还对个别表示同一个量的不同符号进行了统一化处理. 总之, 上述变化使中文版更加规范, 也使读者更加容易掌握本书的内容.

译者非常感谢莫斯科大学力学数学系的 М. Э. 埃格利特教授的大量无私帮助, 她不但不厌其烦地回答了关于本书的方方面面的问题 (包括俄文理解的问题), 还专门写了中文版序. М. Э. 埃格利特教授是 Л. И. 谢多夫院士的学生, 是连续介质力学领域的著名学者, 长期讲授连续介质力学、流体力学等课程, 曾经多次参加本书俄文版的编辑和修订工作. 由她撰写的序言特别有助于读者认识本书的意义.

译者的导师 Н. Р. 西布加图林教授在生前一直关心本书的翻译工作并提出了一些具体建议, 他的儿子 И. Н. 西布加图林博士为本书版权问题的解决提供了大量帮助, 译者在此对 Н. Р. 西布加图林教授表示深深的怀念, 对 И. Н. 西布加图林博士表示感谢.

在翻译过程中, 译者得到了北京大学力学系的许多同事和学生的帮助. 陈国谦教授和黄克服副教授一直支持和鼓励译者的翻译工作, 苏卫东副教授对部分内容提出了具体建议, 博士研究生杨延涛认真阅读了前 5 章译文并提出了一些文字上的意见, 译者对他们深表感谢.

人工晶体研究所的晶体学专家黄朝恩教授仔细检查了附录一的译文并提出了许多重要的意见和建议, 译者特别感谢他的帮助.

译者还要感谢高等教育出版社的帮助. 编辑郑轩辕博士仔细审阅了全部译文并提出了大量恰当的修改建议, 编审张小萍女士对最终的译稿提出了一些有价值的建议, 他们在最大程度上完善了译文的质量.

最后, 译者恳请广大读者对译文中不够准确甚至错误的地方予以指正.

李植
北京, 2007 年 8 月

中文版序

近年来, 由于计算机的普及和数值方法的广泛发展, 如何在数学上提出问题成为头等重要的事情, 这要求我们能够用数学方法描述所研究的现象, 即建立其数学模型. 经典的连续介质模型和它们所能够描述的效应是在流体力学、水力学、弹性力学、塑性力学、蠕变力学、材料力学等连续介质力学分支中进行研究的. 然而, 实际应用越来越经常要求力学领域的工程和研究人员能够建立复杂连续介质的新模型, 能够研究复杂的物理和化学过程, 能够提出并解决关于各种介质在新条件下的物理行为的新问题. 因此, 我们不仅要理解连续介质力学中的个别已知的具体模型和规律, 而且要理解连续介质力学基本概念和定律本身的意义. 正是由于上述原因, 连续介质力学才从一系列单独的专门学科中独立出来, 而连续介质力学课程也被许多大学列为必修课程.

本书是连续介质力学领域的杰出学者、俄罗斯科学院院士、国立莫斯科大学教授 Л. И. 谢多夫所著连续介质力学教材的中译本, 该教材在俄国得到了广泛使用. Л. И. 谢多夫发表了 200 多篇学术论文, 撰写了多部专著和教材, 其中最为著名就是本书和《力学中的相似方法与量纲理论》[1], 后者已经出版 10 次, 被译为多种语言. 在 20 世纪 60 年代, Л. И. 谢多夫是理解在力学专业大学生教学计划中引入连续介质力学课程的必要性和重要性的最初几个人之一. 他率先为莫斯科大学力学数学系学生讲授连续介质力学, 该课程持续 3 个学期, 包括 70 次讲座. 此后, 这一课程成为莫斯科大学力学数学系力学专业学生的传统课程, 而为数学专业学生讲授时则删减部分内容. 现在奉献给读者的这套两卷本教材就是基于该课程的授课内容撰写的.

---

[1] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 10-е изд. Москва: Наука, 1987 (俄文第八版的中译本: Л. И. 谢多夫. 力学中的相似方法与量纲理论. 沈青, 倪锄非, 李维新译. 北京: 科学出版社, 1982).

本书是连续介质领域的基本教材之一, 俄文版已经出版 5 次, 英文版已经出版 2 次, 此外还有其他语言的一些版本.

本书的主旨不仅在于描述连续介质的经典模型和规律, 而且在于阐明建立数学模型的一般基础, 使读者能够理解最前沿的问题. 在第一卷中首先引入了一些基本概念, 用来在数学上描述连续介质的平衡和运动, 并且描述方法与介质的具体性质无关. 这些概念是: 对时间的物质导数 (随体导数), 有限应变张量, 小应变张量, 应变率张量, 应力张量, 等等. 在这一部分中有非常重要的一节专门解释张量的概念. 在引入张量时, 基矢量被明确地写在张量的记号中. 这种定义方法有助于更深刻地理解张量的本质和运算法则, 尤其是在使用曲线坐标系的时候. 由于热力学在建立连续介质模型时起重要作用, 在第一卷中还有一章专门讲述连续介质热力学. 书中给出了普适的物理守恒定律, 并由此导出了相应微分方程和包括激波条件在内的间断面条件. 引入了经典的流体模型和弹性体模型, 详细讨论了连续介质与电磁场的相互作用. 第一卷最后一章论述提出具体问题的共同基础, 其中包括量纲分析、现象的相似和模拟.

第一卷的附录是作者的 2 篇论文, 其中研究非线性张量函数理论的附录一具有特别重要的实际价值.

第二卷论述了连续介质的具体模型——理想流体、黏性流体、弹性介质和塑性介质, 研究了流体力学、空气动力学、弹性力学、塑性力学和裂纹理论的基本问题和一般规律, 给出了提出具体问题并进一步求解的一些实例. 这里值得特别强调关于非线性弹性力学的部分内容.

书中没有用于自学的练习和习题. 如果读者希望通过求解习题来加深对课程的理解, 可以参阅由 Л. И. 谢多夫的一些同事和学生合编的《连续介质力学习题集》[1], 其中包含 1000 余道题目. 该习题集可以看作是对 Л. И. 谢多夫的这套教材的补充.

对力学、数学和物理学专业的大学生、研究生以及工程师和研究人员来说, 本书无疑是一本有用的参考书.

M. Э. 埃格利特

莫斯科, 2007 年 7 月

---

[1] Механика сплошных сред в задачах. Т. 1, 2. Под ред. М. Э. Эглит. Москва: Московский лицей, 1996 (Eglit M. E., Hodges D. H., eds. Continuum Mechanics via Problems and Exercises. Parts I, II. Singapore: World Scientific, 1996).

第一版序节录

为了认识自然和解决许多迫切的工程问题，需要建立大量新的模型，以便深入而更加细致地描述微观的和宏观的、力学的乃至一般而言物理学的对象、相互作用和现象.

经验和科学的内在本质表明，无论是物质结构问题、天体力学问题，还是关于生物体、有机体和无机体中的复杂相互作用的重要性质的各种问题，其答案在许多情况下关系到我们的某些普适的一般的概念、观念、定律、原理和方法.

为了研究物理场的行为，为了研究气体、等离子体、液体和可变形固体的运动和平衡，目前已经积累了大量科学信息，发展了相应理论，并取得了许多实验结果.

明确地提出一般原理并建立各种理论与所观察到的效应之间的内在联系，这有助于更深刻地理解科学发展的实际状态，正确地评价已经取得的和正在发展的科学成就，自如地驾驭所获得的丰富的信息. 所有这一切都是科学进一步发展的基础，因而是非常必要的.

由我们引入并使用的那些概念和关系式只有在某些模型的范围内才具有确定而准确的意义，因为模型就是为了科学地描述和研究我们所关心的若干类实际现象而建立起来的. 在阐述力学和物理学的基本原理时遵循上述原则是有益的，我们必须明确地强调这一点. 空间、时间、力、温度、熵等基本概念无不如此. 众所周知，牛顿力学在量子力学所描述的某些相互作用中毫无意义，仅有牛顿力学也远不足以描述复杂的现代连续介质模型中的力学相互作用. 熵和温度这些“普适”概念在分析力学模型中既无意义也无用处.

因此，脱离模型就不能讨论那些基本的概念和规律，无论模型的涉及面是宽还是窄，也无论模型已经被明确引入、可能被引入还是以隐含的、潜在的方式存在于理论和实验观察中. 如果忽视这一点，过分地推广并脱离问题的本质，在讨论力、熵等

概念的意义时就可能出现纸上谈兵的情况. 在一些正确引入的确定模型下, 既可以实现必要的明确性, 也容易消除出现的误解. 但是自然, 所有模型都只是近似地在某一方面反映实际情况, 所以模型的精确化和复杂化, 建立新模型或在已知的意义下简化已有模型是关系到科学进步的不断进行的过程.

显然, 无论从已有的应用来说, 还是从将来的研究和应用前景来说, 学习力学对学生而言都有特别的好处.

因此, 在高等院校的教学中引入连续介质力学课程, 并把它作为热力学、电磁场理论、流体力学、空气动力学、弹性力学、塑性力学、蠕变力学等物理学和力学分支的共同基础, 其必要性在最近一些年已经明显地显现出来. 尽管物理学和力学的上述分支初步看来各不相同, 但它们的共同点和不可分割的联系使我们不得不把这些分支看作一个统一的整体.

本连续介质力学教程就是在上述观点下, 根据作者多年来在国立莫斯科大学授课的讲义写成的, 最初曾经在 1966—1968 年在小型胶印机上印刷出版.

本书由 2 卷组成. 第一卷讲述普适的数学方法和概念以及热力学和电动力学的基本原理. 作者希望, 对热力学和电动力学原理的简要叙述并非仅对力学领域的专家才有益处. 在第一卷中还建立了基本物理方程、强间断面附加关系式以及初始条件、边界条件和其他一些条件, 此外还给出了近似方法的一些重要性质, 例如与问题的线性化相关的一些性质. 总之, 第一卷为建立具体的连续介质模型打下了基础, 还揭示了用来提出具体问题的典型概括方法.

第二卷研究流体力学、空气动力学、弹性力学和塑性力学的具体模型和理论, 并在经典模型的范围内给出了一些典型问题的解, 建立了对多种运动和过程都成立的一些最重要的规律.

本书之所以在叙述时采用以演绎为主的风格并对材料进行相应选取和安排, 是为了尽量给出连续介质运动理论的逻辑框架, 并达到以下主要目的: 利用最少的实际信息和实际应用价值最重要的一些最简单的实例, 为读者创造适宜的环境来详尽地理解连续介质力学原理的本质, 使读者了解在连续介质运动中出现的一些主要的已知效应. 换言之, 我们尽量用最少的必要信息使读者获得最多的理解.

本教程不包含流体力学和固体力学中的某些非常重要的分支, 因为除了一般的连续介质力学课程, 还有一些后续专业课程和其他文献更加详细地发展了相应理论. 例如, 书中不涉及下列问题: 液体和气体的平面运动理论, 气体的非定常运动理论, 液体表面重力波理论, 更加详细的量纲分析与力学相似理论, 边界层理论, 湍流, 详细的塑性力学和蠕变力学, 等等.

Б. В. 罗赞采娃和 М. Э. 埃格利特在我的课上记录的笔记是本教程的原形; 在撰写和编辑全书的过程中, 我们进行了卓有成效的讨论, 正是在他们的大力协助下, 内容才得以完善. 我特别感谢 Б. В. 罗赞采娃和 М. Э. 埃格利特, 他们的大量工作保障了本教程的出版. 在撰写流体力学和弹性力学平面问题的相应章节时分别得到

了 В. П. 卡尔利科夫和 Д. Д. 伊夫列夫的大量帮助, 我对此深表感谢.

在撰写和编辑关于气动机械和水力机械一般理论的部分时, 我得到了 Г. М. 巴姆-泽利科维奇、Г. Ю. 斯捷潘诺夫和 А. Я. 切尔克兹的许多帮助, 我真诚地表示感谢.

在准备本教程最初的胶印版本时, Е. И. 斯韦什尼科娃和我的其他许多同事和学生完成了大量工作, 我也非常感谢他们的帮助.

连续介质力学的参考文献列于第二卷最后.

Л. И. 谢多夫

莫斯科, 1968 年 12 月

第四版序

在本教程最初几版问世后的 10 年时间内, 连续介质力学的一系列基本理论取得了显著的进展. 因此, 在本教程的新的第四版中补充了一些内容, 完善了多处文字的表述, 还从方法论的角度给出了一些说明, 这应当有助于在现代水平上更清晰地理解和掌握问题的本质.

例如, 使用本教程讲授连续介质力学的经验表明, 通过书中所采用的明确引入基矢量的方式来定义矢量和张量的概念, 这完全符合问题的本质, 因而不但不会引起任何困难, 反而特别有助于读者和学生在最短时间内正确而全面地掌握大量几何、物理和力学理论的本质.

根据所需要的详细程度, 在书中不仅强调了引入随体坐标系和完全任意的观察者参考系的必要性, 还强调了与此相关的自然定律协变性的概念. 值得再一次指出, 力学和物理学的基本方程相对于以任意方式运动和变形的任意参考系具有协变性, 并且这种性质不是像某些人认为的那样只对广义相对论中的相应坐标系才成立, 它对牛顿力学中的坐标系也同样成立. 必须加以注意的仅仅是关于时间和空间的相应一些公设以及在某些情况下 (如在牛顿力学中) 选取出来的一些参考系, 例如全局的或局部的惯性系, 这些参考系不仅被用来建立方程和提出问题, 而且被用来引入类似于“绝对加速度”的一些物理量. 在相对论中也可以借助于局部固有惯性参考系的选取来引入类似的物理量, 在一些个别实例中还可以像在牛顿力学中那样利用全局参考系来引入类似的量.

例如, 如果把绝对加速度和按照定义具有重要物理意义的所有对时间的导数都通过任意运动的参考系中的相应一些量表示出来, 则牛顿力学中的所有方程都将具有协变形式. 对于相对于惯性参考系的加速度矢量, 需要使用公式

$$\boldsymbol{a}_{\rm abs} = \boldsymbol{a}_{\rm rel} + \boldsymbol{a}_{\rm con} + \boldsymbol{a}_{\rm add}, \quad (1)$$

式中 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}}$ 是所研究的物质点 M 相对于任意的运动参考系的加速度矢量, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{con}}$ 是运动参考系中的在给定时刻与点 M 重合的点 M' 相对于惯性参考系的加速度矢量, 而 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{add}}$ 是因为点 M 的相对运动速度以及牵连运动的涡张量和应变率张量而产生的附加的广义科里奥利加速度矢量. 在一般情况下, 牵连坐标系在这里起主要作用[1]. 在个别实例中, 例如在平面运动或直线运动等情况下, 一般公式 (1) 中的矢量可能在专门选取的坐标系中具有特别的形式.

在使用公式 (1) 和标量、矢量、张量特征量的类似公式的时候, 无论是在相对论中, 还是在牛顿力学中, 所有方程都具有协变形式. 其含义是, 对于每一个给定的现象, 所有物理关系式都能够在任意选取的坐标系中借助于同样一些张量公式写为一种普适的形式. 这些公式含有度规张量的分量, 度规张量的分量是坐标的函数, 而坐标在使用不同坐标系时是各不相同的.

不过, 相对论、牛顿力学以及一般任何理论中的协变性并不意味着不同观察者都以完全相同的方式感受物理现象. 在任何参考系中用展开的分量形式具体写出的协变方程与所研究的现象和固定的观察者都有密切的关系, 这些方程还强烈地依赖于所使用的具体坐标系! 这不仅体现在理论中, 而且体现在观察者所获得的实验结果中.

除了协变性的概念, 还可以引入形式不变性的概念, 这时用分量形式展开写出的所有方程对于彼此相对运动的、与不同坐标系相联系的不同观察者而言是完全相同的. 换言之, 我们所讨论的是使所提出的物理关系式的所有数值函数保持不变的一些坐标变换. 在一般情况下, 只有一些专门的变换才满足形式不变性.

众所周知, 在牛顿力学中, 伽利略—牛顿变换在全局具有形式不变性; 在狭义相对论中, 洛伦兹变换在全局具有形式不变性[2]; 在广义相对论中, 任何有限的洛伦兹变换仅在四维伪黎曼空间中每一点的局部具有形式不变性.

实践表明, 上述讨论对于构建介质和场的各种模型是有益的.

目前, 在宏观热力学教材中已经包含了不可逆过程和非平衡过程的一些新的模型, 因为我们必须重新认识已有的传统和概念. 有鉴于此, 在本教程第一版和此前的其他版本中, 在相应一些地方给出了更加明确的说明. 在本书这一版中, 在某些表述中补充了一些新的更加详细的说明.

А. Г. 库利科夫斯基和 М. Э. 埃格利特参加了这类讨论, 他们非常成功地为莫斯科大学的学生讲授了连续介质力学课程 (并且对热力学和其他一些章节做出了重要的创造性贡献). 这一版中的部分改进内容就反映了他们的一些建议.

作为力学和物理学的分支, 磁流体力学和电流体力学最近一些年来获得了广泛

[1] 参见: Седов Л. И. О сложении движений относительно деформируемых систем отсчета. ПММ, 1978, 42(1): 175—177 (Sedov L. I. On the addition of motions relative to deformable reference systems. J. Appl. Math. Mech., 1978, 42(1): 181—184).

[2] 伽利略—牛顿变换和洛伦兹变换具有不同的公式, 这些公式在笛卡儿坐标系中非常简单, 也容易在任何坐标系中写出这些公式.

发展和大量应用. 本书对电动力学中有关建立有质动力矩方程和建立磁流体力学模型、电流体力学模型的部分进行了大量补充.

在第二卷中扩展了在考虑有限变形和各种应力张量的条件下建立非线性弹性体模型的一般热力学理论.

在第二卷第八章 §19 中也进行了相应补充, 这一节研究液体中的气泡和蒸汽泡在考虑液化和气化时的非定常运动理论. H. C. 哈别耶夫为此提供了重要帮助, 我在此深表感谢.

在第二章 §5 中补充叙述了费米坐标的构造方法.

在第一卷 382—385 页给出了基本变分方程的一个新的解释, 该方程可以视为广义的能量变分方程; 在 370 页对张量函数的概念进行了推广.

就像在前面几版的出版过程中那样, B. B. 罗赞采娃和 M. Э. 埃格利特为编辑和检查全文付出了大量劳动, A. Г. 库利科夫斯基也进行了大量工作, 我对他们深表谢意.

Л. И. 谢多夫

莫斯科, 1982 年 9 月

俄罗斯数学教材选译

•数学天元基金资助项目•

书名	作者
* 数学分析 (第一卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
* 数学分析 (第二卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
* 微积分学教程 (第一卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第二卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第三卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 数学分析讲义 (第 3 版)	Г. И. 阿黑波夫, В. А. 萨多夫尼奇, В. Н. 丘巴里阔夫
复分析导论 (第一卷)	Б. В. 沙巴特
复分析导论 (第二卷)	Б. В. 沙巴特
* 函数论与泛函分析初步 (第 7 版)	А. Н. 柯尔莫戈洛夫, С. В. 佛明
* 复变函数论方法 (第 6 版)	М. А. 拉夫连季耶夫, Б. В. 沙巴特
* 常微分方程 (第 6 版)	Л. С. 庞特里亚金
奇摄动方程解的渐近展开	А. Б. 瓦西里耶娃, В. Ф. 布图索夫
* 代数学引论 (第一卷) 基础代数 (第 2 版)	А. И. 柯斯特利金
代数学引论 (第二卷) 线性代数 (第 3 版)	А. И. 柯斯特利金
代数学引论 (第三卷) 基本结构 (第 2 版)	А. И. 柯斯特利金
* 微分几何与拓扑学简明教程	А. С. 米先柯, А. Т. 福明柯
* 现代几何学: 方法与应用 (第一卷) 几何曲面、变换群与场 (第 5 版)	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
* 现代几何学: 方法与应用 (第二卷) 流形上的几何与拓扑 (第 5 版)	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
* 现代几何学: 方法与应用 (第三卷) 同调论引论 (第 2 版)	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
随机过程论	А. В. 布林斯基, А. Н. 施利亚耶夫
* 概率 (第一卷)	А. Н. 施利亚耶夫
概率 (第二卷)	А. Н. 施利亚耶夫
* 经典力学中的数学方法 (第 4 版)	В. И. 阿诺尔德
* 理论力学 (第 3 版)	А. П. 马尔契夫
* 连续介质力学 (第一卷) (第 6 版)	Л. И. 谢多夫
连续介质力学 (第二卷) (第 6 版)	Л. И. 谢多夫

说明: 加 * 者已出版.

郑重声明



目 录

第一章 绪论

§1. 连续介质力学的内容和方法

连续介质力学的内容 连续介质力学是力学的一个庞大的分支,研究气体、液体[1]和可变形固体的运动.

理论力学研究质点、离散质点系和刚体的运动, 由此发展出来的方法和结果是连续介质力学的基础和工具. 连续介质力学研究连续地充满空间的物体的运动, 物体诸点之间的距离在运动过程中发生变化.

除了诸如水、空气或铁块的普通物体, 在连续介质力学中还研究一种特殊的介质——场, 如电磁场、辐射场、引力 (重力) 场等.

在研究自然现象和解决大量技术问题的过程中, 我们会遇到各种液体、气体和可变形固体, 其运动是多种多样的.

对于变形体的许多运动, 我们只利用个人在日常的一些基本经验就可以在必要的程度上加以控制. 通过日常生活中的观察, 我们在头脑中会有一些合乎实际的感觉和“真实合理的看法”, 从而使我们经常能够正确地预言和制造所需要的力学效应.

然而在复杂的情况下, 我们就需要对已有的经验进行特别的积累和总结, 需要专门的方法进行理论上和实验上的研究. 这些研究使连续介质力学作为一门科学产生并发展起来.

许多与变形体运动有关的重要的实际问题, 其解决方法是我们每个人都能立刻指出的, 这样的例子不胜枚举. 比如, 怎样把水从一个容器倒入另一个容器, 怎样保存房间内的热气, 怎样躲避风雨, 等等. 与此同时, 也存在其他许多只有用专业知识

[1] 在下面的译文中经常把气体 (газ) 和液体 (жидкость) 统称为流体. 此外, 俄文 жидкость 一词将根据上下文的意思译为液体 (仅指液体) 或流体 (对液体和气体均适用). ——译注

才能回答的问题. 例如, 容器中的压缩气体从小孔溢出的速度是多少, 气旋在大气中如何运动, 怎样减小空气对飞机或者水对船只的阻力, 怎样用金属材料建设高度达 500 米的电视塔和桥墩间跨度上千米的大桥, 增加或减小飞机螺旋桨的直径有什么后果, 炸弹爆炸时的压强分布和空气运动有何规律, 等等.

我们立刻指出, 还存在着大量题目, 用已知的实验和理论的方法尚不能给出我们所希望的满意的答案. 解决那些新的有学术和应用价值的复杂问题, 以及那些对其研究能够促进科学进一步发展的课题, 是目前科学研究工作的内容.

这里列举一些亟待解决的新问题: 降低以 $100\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 量级的速度在水中高速运动的物体所受的阻力, 产生并保持上百万度高温的等离子体, 查明高压高温下材料行为的特性 (考虑塑性、蠕变等现象), 确定爆炸时作用于建筑物的力, 研制高超音速远程客运飞机, 解释大气层中空气的一般环流, 天气预报, 研究动、植物体内的力学过程, 星体演化问题, 解释太阳上的现象, 以及太空和宇宙学的其他一些问题.

尽管在某一方向上的研究工作密切关系到并决定了该方向上的科学和技术的进步, 但是在目前, 与精确的科学数据相比, 设计师和工程师从丰富的经验中发展出来的"真实合理的看法", 他们的才能、直觉和力学的"嗅觉"仍然在技术中起着巨大的作用. 不应当认为一切制造出的汽车、飞机、轮船等都可以计算出来, 所有细节都能够预先分析好. 即使是现在, 许多制造的进行也还是像一千多年以前古斯堪的纳维亚的海盗造船一样, 那时候作为萌芽状态的力学科学都不曾存在, 但是海盗造出的船只已经具有良好的航海性能.

与此同时, 现代技术的发展已经使技术离不开科学, 离不开积累起来的系统化的经验. 同样, 现代化生产没有相应的机械化, 技术的发展不以已有的科学为基础, 都是不可想象的.

连续介质力学的一些问题

一些被深入钻研的连续介质力学问题列举如下.

流体对在其中运动的物体的作用问题. 流体作用于物体的力决定于流体的运动, 所以研究物体在流体中的运动与研究流体的运动有直接的联系. 促进这个问题发展的特别因素是关于飞机、直升机、飞艇、炮弹、导弹、轮船和潜水艇运动的技术课题, 以及研制各种诸如水和空气中的螺旋推进器等动力装置的题目.

流体沿管道以及更一般情况下在各种机器内部的运动. 在这些问题中, 具有基本意义的是流体与流动边界的相互作用规律 (例如运动或静止固壁的阻力值), 速度分布不均匀现象, 等等. 这些问题对于煤气管、输油管、泵、涡轮机和其他水力机械的设计具有直接的价值.

渗流是液体经过土壤和其他多孔介质的运动. 例如, 土壤中总可以观察到水的运动, 这种运动在建造各种建筑物 (堤坝、桥墩、水电站) 的地基, 开凿地下隧道等工程中必须加以考虑. 渗流在石油工业中具有重大意义.

流体静力学研究流体和浮在流体内部或表面的物体的平衡, 以及在牛顿万有引

力作用下处于平衡状态的旋转流体的形状.

波的运动, 如波在固体中的传播, 海洋表面波, 船只运动所产生的波, 波在水渠和江河中的传播, 潮汐, 地震波, 声波, 各种介质中噪声的一般问题, 等等. 我们周围的环境 (液体、气体、固体和各种场) 总是处于振动状态, 各种扰动随着时间沿空间传播. 显然, 这些现象在我们的生活中起着非常重要的作用, 它们是解决大量技术问题的关键.

气体在爆炸、爆震和燃烧过程中伴有化学反应的非定常运动, 如气体在活塞发动机汽缸或喷气发动机燃烧室内的运动等.

保护固体在高速进入大气层高密度区时不被烧毁, 保护其表面不被严重烧熔.

流体的湍流运动理论. 所谓湍流, 实际上是指流体的一些非常复杂的具有随机性质的无规则运动, 这些运动在某些平均的有规律的过程附近振荡. 从应用的观点来看, 这种运动在我们所讨论和提出的问题中极其重要. 不论是在星体和星云上, 地球大气层中, 河道和水渠中, 还是在管道以及其他各种工业建筑和机器中, 气体和液体的绝大多数运动都具有湍流的性质. 由此可见, 用来研究湍流的理论和实验是非常重要的. 目前对湍流的研究对于理解这些复杂运动的本质的诸多特性和规律还远远不够.

被强烈压缩的流体的描述问题, 其中要考虑介质在该情况下, 特别是在高温下的复杂物理性质. 有一些有趣而且重要的技术领域必须与受高压 (上万甚至上百万个大气压) 的物体打交道, 如生产人造钻石, 利用爆炸冲压某些结构的零件, 以及其他许多情况.

另一方面, 超稀薄气体中的一些现象也很重要. 在实验室、宇宙空间、行星和恒星大气层中的强真空的情况下研究与介质运动有关的各种不同过程, 也要应用连续介质力学的方法.

磁流体力学问题和被电离的介质——等离子体——在与电磁场的相互作用下的运动的研究, 目前在认知上和技术上都具有头等重大的意义. 例如, 在制造磁流体发电机时就需要研究这些现象, 因为等离子体的动能在发电机内部直接转化为电能. 我们还指出, 热核能源应用问题的解决与高温等离子体在强磁场中的特性这一问题的解决是密切相关的.

预报天气的科学——气象学——在很大程度上研究空气在地球大气层中的运动, 是连续介质力学的一个重要领域, 它密切关系到物理学的许多其他分支.

天体物理学和天体演化学的基本问题是在连续介质力学的范畴内进行研究的, 其中包括恒星的内部构造及其光球的构造, 星云和宇宙云的运动, 变星的爆发和爆炸, 造父变星的振动等问题, 以及星系的发展, 宇宙的构造和演化这些基本问题.

连续介质力学的一大部分内容研究可变形"固体"的运动与平衡. 弹性力学是建造所有类型的建筑物和制造各种机器的基础. 当前, 研究物体的复杂弹性性质和非弹性效应的力学分支具有越来越重大的意义. 非弹性效应包括塑性和蠕变. 塑性与

出现残余应变有关, 蠕变则与应变在外部载荷不变的情况下逐渐增加的现象以及机器部件的耐热性有关 (各种结构长时间工作后都会出现蠕变现象, 而在高温下工作时该现象会在短时间内出现).

研究各种类型金属的疲劳现象和物体在运动和平衡过程中的记忆现象具有重大价值.

随着新型聚合物材料的出现和使用, 必须考虑其内部物理结构, 这种结构可以在实际应用过程中发生变化.

最后, 关于多材料构件的耐久性和破损的一般问题的工作具有重大意义. 这个重要的应用课题至今还没有明晰的满意的答案.

还可以列举出关于各种类型混合物的运动的力学问题, 如沙子、雪和各种土的运动, 合金、溶液、悬浮液和乳浊液的运动, 含聚合物的液体的运动, 等等. 还有空化问题, 其特点是小气泡和充满气体和液体蒸气的大空腔不断在运动的液体中产生和消失.

需要特别强调的是, 近来化工企业中生产工艺问题的解决, 也是以相应连续介质运动的力学研究为基础的.

一些重要的新的现代理论正在研究强激光束与各种物体的相互作用, 如非线性光学问题, 运动物体与电磁场的相互作用问题. 这种宏观尺度下的相互作用与量子力学范畴下才能描述的一些效应密切相关. 当物体在极低温度下运动, 或者其运动要考虑磁化和极化作用的时候, 在对物体相关宏观性质的描述中有类似的情况.

最近在生物力学领域出现了大量研究工作, 正在建立可以解释一些生物现象的力学模型, 如信号沿神经的传导, 病毒、细菌及其他微生物在各种介质中移动的机理, 鱼类的游动, 等等. 已经建立了描述动物体中血液运动和肌肉收缩的模型.

连续介质力学的方法

本教程是连续介质力学的理论教程, 讨论用于研究变形体运动的数学方法, 其特点如下.

首先引入一系列概念来表征并唯一地确定连续介质的运动. 在定义这些概念时, 要使用数或其他一些数学概念. 例如, 这样的概念可以是速度场、压强场、温度场、环量, 等等. 我们将在以后了解描述连续介质运动的这几个量以及其他特征量.

在连续介质力学中详尽地研究出了一些把力学问题化为数学问题的方法, 后者是指利用各种数学运算求解某些数值或函数.

此外, 连续介质力学最重要的目标是确定变形体运动的一般性质和规律. 我们将在以后了解许多关于流体对其内部的运动物体的作用力的定律, 建立对多种重要而广泛的运动类型都成立的压强与速度之间的关系, 阐明外载荷与由此产生的变形之间的关系.

还应当指出, 通过数学运算求解连续介质力学具体问题的过程本身通常也属于连续介质力学的范畴. 这是因为, 用数学方法表示出来的连续介质力学问题即便在最简单的情况下一般也非常困难, 用现在的数学工具无法有效地求解, 所以不得不利

用各种力学的假设和手段来改变问题的提法, 然后求出近似解.

在连续介质力学的影响下, 数学的许多领域得以蓬勃发展. 例如, 连续介质力学对复变函数论的某些分支、偏微分方程边值问题、积分方程等都产生了巨大的影响.

在考虑力学和物理学中其他领域的一些问题时发现, 这些问题可以与连续介质力学中的某些问题进行有益的类比.

此外, 连续介质力学的不同问题及其数学研究方法在许多情况下有紧密的联系. 例如, 对流体沿管道运动的研究可用于解释机翼附近流体运动的某些基本现象, 机翼绕流问题的求解方法与液体在土壤中的渗流问题的数学解法有许多共同点, 气体沿管道运动理论的许多结果原来可以用来研究水渠中水波运动的各种问题, 等等.

我们在开始阶段暂不考虑上述题目, 因为首先需要学习许多具有一般性质的力学和数学知识. 读者在最初不会感觉到他已经在研究与自然界和工程技术中实际发生的现象有关的问题, 甚至不会感觉到他正在向这样的目标前进. 作为对这种状况的补偿, 可以阅读关于连续介质力学历史发展的文献. 连续介质力学的数学方法经过了一百多年才被成功应用于解决流体运动理论中的实际问题.

本教程给出了连续介质力学的基础知识, 这些知识对于专门研究各种具体问题是必要的和充分的.

§2. 基本假设

(A) 实际物体的结构和连续性假设

研究物体的运动必须以该物体的实际性质为基础. 我们知道, 所有物体都是由各种分子和原子组成的, 物体有时还可以处于电离状态, 即组成物体的微粒是电子、离子 (带有多余电子或失去电子的原子和分子) 和中性粒子. 下面列出物理学中关于基本粒子的一些已知数据.

基本粒子的有关数据 原子核半径的量级是 10^{-13} cm, 氢分子半径为 1.36×10^{-8} cm, 可见原子核半径远小于分子半径. 但是, 物质的主要质量却集中在原子核内: 电子质量为 9.1066×10^{-28} g, 而质子质量为 1.6724×10^{-24} g.

在通常条件下 (在海平面高度上, 当温度为 0 °C, 压强为 1 atm 时), 每立方厘米空气中含有 $N=2.687\times10^{19}$ 个分子. 在日常的工程技术中, 长度的测量精度经常不及 10^{-3} cm. 即使取边长为 10^{-3} cm 的立方体, 其中也含有 2.687×10^{10} 个分子. 现在的飞机远远飞不到 60 km 的高空, 在这个高度上, 大气分子数为 $N=8\times10^{15}\ \text{cm}^{-3}$. 在星际空间中充满极其稀薄的气体, $N=1\ \text{cm}^{-3}=10^{15}\ \text{km}^{-3}$. 与宇宙空间的特征长度相比, 1 km 的长度是很小的, 所以星际空间中的气体也可以看作是一种在很小的体积内就含有大量分子的介质.

月球没有大气层, 那里 $N=10^{10}\ \text{cm}^{-3}$, 比地球表面的值小 27 亿倍. 在地球的实验条件下, 如此强的真空实际上是得不到的. 在这样的真空下, 互相接触的物体在

多数情况下会发生熔合.

对于铁 (Fe), $N=8.622\times10^{22}\ \mathrm{cm}^{-3}$, 密度 $\rho_{\mathrm{Fe}}=7.8\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$, 核物质密度 $\rho_{\mathrm{nucl.\ Fe}}\approx 1.16\times10^{14}\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$, 故 $\rho_{\mathrm{Fe}}/\rho_{\mathrm{nucl.\ Fe}}\approx 7\times10^{-14}$.

我们看到, 物体所占的体积实际上远远大于组成物体的物质本身所占的体积. 所以, 从本质上讲, 所有物体都是“空的”, 而在物体所占空间中, 即使实际上很小的体积内也总包含有大量粒子.

原子和分子总是处于无规则运动状态.

在大气的通常条件下, 氢分子的平均速度 $v_{\mathrm{mean}}=1692\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (大于现在客机的速度). 分子总在互相“碰撞”. 在上述条件下, 氢分子自由程 $l=1.12\times10^{-7}\ \mathrm{m}$, 而对于氧分子, $v_{\mathrm{mean}}=425\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $l=6.5\times10^{-8}\ \mathrm{m}$, 即一个氧分子每秒钟会发生 6.54×10^{9} 次碰撞.

粒子的相互作用

粒子之间有确定的相互作用. 在稀薄气体中, 这些相互作用只与碰撞有关. 在液体和固体中, 分子间的距离较近, 它们之间力的相互作用或者量子的相互作用都很重要.

使物体具有强度和弹性的力具有电的本质. 粗略地讲, 这些力可以归结为库仑力以及磁元之间的相互作用. 至于核力和弱相互作用力, 它们仅在核反应过程中才表现出来, 这时粒子在近距离上发生相互作用. 使粒子接近到这种程度需要极高的能量, 只有在温度达几百万度以上时, 粒子的无规则热运动才能提供这么高的能量.

连续介质力学中一些重要的物理化学过程

只要知道粒子之间相互作用的电磁力, 就可以建立可变形固体理论, 所以电动力学对我们是很重要的. 为了模拟实际的物体, 我们引入一些抽象的概念, 这就必须考虑物体在结构上的各种特性. 物体可以处于气态、液态或固态, 可以具有晶体结构, 也可以是各种状态的混合物. 当温度升高时, 还会出现物质同时表现为气态、液态和固态的情形.

除了结构, 物质的属性以及混合物、溶液、合金的组元的性质也有重要意义.

在许多情况下会产生这样的力学问题, 这时要考虑运动物体的组成部分及其相对成分在性质上的变化, 例如伴随核反应和化学反应, 包括燃烧、离解、复合、电离等过程的气体运动问题.

在研究物体的运动时, 相变过程可能有重要的意义, 这些过程包括凝结、汽化、熔化、凝固、聚合、重结晶等等.

在研究连续介质的运动时必须引入内应力. 物体具有离散的分子结构, 任一截面上的内应力是以下作用结果的统计平均, 它们既包括位于该截面两侧的分子之间的直接的相互作用, 也包括因分子热运动而导致的经过该截面的宏观动量输运过程.

气体具有黏性, 这是因为分子热运动使相邻气体微元的宏观运动相同. 所以, 物体中的内应力的性质决定于: 物体的分子结构, 分子及原子之间只有在极近的距离上才能表现出来的相互作用力, 以及以温度为标志的热运动.

类似地可以解释热传导现象. 互相接触的任何两个相邻介质微元之间, 或者通

过碰撞, 或者直接通过高速分子和低速分子的交换, 都会发生能量的交换, 这导致温度所标志的分子热运动能量的统计平均值趋于相等.

混和物中不同组元扩散的机理也可以用热运动所导致的分子混合这一分子动理过程来解释.

对辐射现象的描述要复杂一些, 这是由于分子、原子或原子核系统中能级改变的量子效应, 以及带电粒子的加速运动而导致的. 辐射现象可以视为发射光子的现象, 它在很多情况下与分子和原子的无规则热运动密切相关, 并且对温度非常敏感, 因为温度决定着粒子碰撞时可能激发出的能量. 在研究物体在高温下的运动时, 由于辐射能的耗损和散射过程总是伴随发生的, 所以必须考虑由此造成的能量传递和温度变化的效应.

极化和磁化现象与物体中基本粒子规则有序的排列有关, 这些现象在物体的各种运动中也可能具有重要的意义.

在相对较低的温度下和其他一些情况下, 固体、具有复杂分子结构的材料和密度极高的物体, 其内部相互作用的机理非常复杂. 一般而言, 在牛顿力学的范畴内无法解释这些现象. 为了理解这些相互作用, 在许多情况下必须利用一些量子力学的概念和定律.

在上述现象中, 通过深入分析微观的物理机理和基本粒子的性质来确立宏观的规律, 这是物理学的主要任务之一.

统计观点和唯象观点

我们指出, 分子的复杂结构和维持此结构的电磁作用力并非总是已知的. 尽管物体是由基本粒子组成的, 力学似乎应当在此基础上发展, 但是由于基本粒子的数目过于巨大, 而且不知道粒子之间的作用力, 所以跟踪每个粒子的运动是不可能的.

对实际应用而言, 只需要知道某些平均的, 综合的, 或者总体的特征量即可.

在物理学中发展起来的统计方法就是研究物体力学行为的一种一般处理方法. 在这种方法中, 应用概率论的观点处理被研究的现象, 并引入粒子系综的平均特征量. 统计方法总是关系到引入一些附加的假设, 这些假设涉及粒子的性质和相互作用, 以及这些性质和相互作用的简化. 我们指出, 在许多情况下甚至连建立这种方法的基本要素都不存在. 即使该方法已经建立, 它通常也不是解决问题的有效工具, 因为相应的方程过于复杂.

研究物体运动的另外一种一般处理方法是以实验中得到的一般规律和假设为基础, 建立唯象宏观理论. 宏观理论是解决重要的实际问题的有效工具, 由此得到的结果与实验是符合的.

我们将在下面发展物体的唯象宏观理论.

连续性假设

我们来引入连续介质的概念. 所有物体都是由单独的粒子组成的, 然而, 任何对我们来说有意义的体积内都包含有大量粒子, 所以可以把物体近似地看作连续地充满空间的介质. 我们将把水、空气、铁块等视为完全充满某

一部分空间的物体.

不仅通常的物体可以视为连续介质, 各种场, 例如电磁场, 也可以当作连续介质.

有必要进行如此理想化处理的一个原因是, 我们在研究变形体运动时希望运用连续函数工具和微积分.

(B) 空 间 和 时 间

所谓空间, 是指由若干个数给出的点的集合, 而这些数称为坐标.

度规空间 我们将考虑连续的度规空间. 度规空间是定义了点之间的距离的空间, 例如通常的三维欧几里得空间就是度规空间, 其中的点由适用于全空间的笛卡儿坐标系 x, y, z 给出, 而两点 x_1, y_1, z_1 和 x_2, y_2, z_2 之间的距离由以下公式定义:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \tag{2.1}$$

欧几里得空间 在任何空间中都可以引入适用于全空间的笛卡儿坐标系吗? 为简单起见, 我们讨论二维空间. 显然, 在平面上总可以引入适用于全平面的二维笛卡儿坐标系. 在曲率不为零的球面上, 这是办不到的, 即在球面上无法引入这样的二维坐标系, 使球面上任意两点之间的距离由公式 (2.1) 定义. 这里两点之间的距离是指球面上通过这两点的大圆上这两点之间的弧长. 在球面上, 只能在每一点周围很小的区域内引入笛卡儿坐标系. 在三维度规空间的情形下, 也不是总可以引入适用于全空间的三维笛卡儿坐标系.

以后我们一般只考虑可以引入适用于所有点的笛卡儿坐标系的空间, 这样的空间称为欧几里得空间, 而以此为基础发展起来的力学称为牛顿力学. 实验表明, 实际的物理空间在不太大的尺度下可以非常精确地当作欧几里得空间来处理.

绝对时间 时间的概念与实验有关, 这个概念在力学中是必须的. 任何力学现象总要从某一个观察者的角度来描述. 一般而言, 时间可以与观察者应用的参考系有关.

我们将认为, 时间的流逝对于所有观察者都是一样的, 不论观察者位于火车上, 飞机上, 还是教室内, 即我们将使用绝对时间. 这是一个理想化的概念, 它并不能永远正确地描述实际情况. 只有在不考虑相对论效应的时候, 这个概念才是正确的.

这样, 我们将在欧几里得空间中考虑连续介质 (亦称连续统) 的运动, 并使用绝对时间. 总之, 我们将利用上述三个基本假设来建立变形体运动的理论. 以这些假设为基础的理论所给出的结果经常与实验相符, 但亦有例外. 在需要时, 可以修正和推广所采用的空间和时间的模型. 但是, 所有进一步的推广都要考虑建立于上述基本假设之上的牛顿力学, 并以此为基础. 这些假设的本质将随着后面理论的发展而变得更加明晰.

第二章　可变形体运动学

§1. 用拉格朗日观点研究连续介质的运动

坐标系　运动总是相对于某个参考系 (即坐标系) 而确定的. 我们使用坐标系来建立数与空间点之间的关系. 三维空间的点对应 3 个数 x^1, x^2, x^3, 它们称为点的坐标. 若某 2 个坐标值在一条曲线上保持不变, 则该曲线称为坐标线 (图 1).

例如, 若在某曲线上 $x^2 = \text{const}$, $x^3 = \text{const}$, 则该曲线定义了坐标线 x^1. 坐标 x^1 的不同值确定了该坐标线上不同的点, x^1 增加的方向定义了该坐标线的方向. 经过空间的每个点可以引 3 条坐标线, 它们在该点的切线不在同一个平面上. 一般而言, 这 3 条切线组成非正交的三面体.

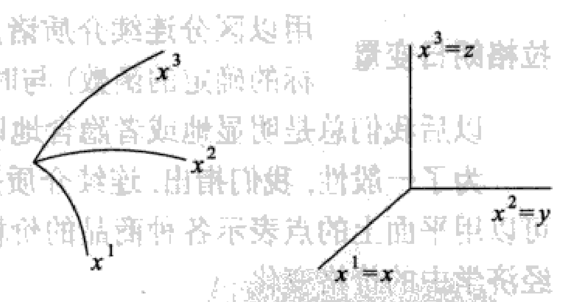


图 1. 曲线坐标系与笛卡儿坐标系

坐标线 x^1, x^2, x^3 为直线的坐标系是直线坐标系, 否则是曲线坐标系. 今后我们将看到, 从本质上讲, 曲线坐标系在连续介质力学中是必须的.

坐标与时间的记号　我们规定, x^1, x^2, x^3 表示任意坐标系的坐标, 当然有时也表示笛卡儿坐标, 而 x, y, z 只表示笛卡儿坐标; t 表示时间.

点的运动　点相对于坐标系 x^1, x^2, x^3 运动, 如果其坐标随时间变化:

$$x^i = f^i(t), \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{1.1}$$

运动的点在不同时刻等同于空间中不同的点. 如果函数 (1.1) 已知, 点的运动就是已知的. 函数 (1.1) 称为点的运动规律.

连续介质的运动 连续介质是点的连续集合. 按照定义, 已知连续介质的运动, 其部分含义是指组成连续介质的所有点的运动是已知的 (研究连续介质作为一个整体的运动一般是不够的).

如何区分连续介质的点 为此, 我们必须有一些规则来区分组成连续介质的单个的点, 这些点在几何观点上是完全相同的. 以后我们将看到, 一般而言, 在理论中应用的区分规则决定于这样的条件, 它要求连续介质每个点的运动都满足确定的物理定律. 例如, 可以用连续介质诸点的初始坐标值来区分这些点. 我们将用 ξ^1, ξ^2, ξ^3 来表示点在初始时刻 t_0 的坐标[1], 而点在任何时刻的坐标则记为 x^1, x^2, x^3.

连续介质的运动规律 由坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3 决定的连续介质的点, 其运动规律可以写为:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= x^1(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t),\\ x^2 &= x^2(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t),\\ x^3 &= x^3(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t),\end{aligned}\right\} \quad \text{或} \quad x^i = x^i(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t). \tag{1.2}$$

与单个点运动的情况不同的是, 这里的函数不是 1 个变量的函数, 而是初始坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3 和时间 t 这 4 个变量的函数.

在 (1.2) 中, 如果 ξ^1, ξ^2, ξ^3 固定不变, 而 t 是变量, 则 (1.2) 给出连续介质的一个特定的点的运动规律; 如果 ξ^1, ξ^2, ξ^3 是变量, 而 t 固定不变, 则函数 (1.2) 给出连续介质的点在该时刻在空间中的分布. 如果 ξ^1, ξ^2, ξ^3 与 t 都是变量, 则 (1.2) 可以视为确定连续介质运动的公式. 函数 (1.2) 称为连续介质的运动规律.

拉格朗日变量 用以区分连续介质诸点的坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3 (或者, 有时也使用这些坐标的确定的函数) 与时间 t 称为拉格朗日变量.

以后我们总是明显地或者隐含地以运动规律的概念为基础.

为了一般性, 我们指出, 连续介质是诸点的集合, 但它不一定是物体. 比如, 有时可以用平面上的点表示各种商品的价格, 从而可以用连续介质运动学的方法来研究经济学中的价格变化.

还有一种经常采用的做法是, 可以研究物质点的各种运动状态在空间中移动的规律, 而不是物质点本身移动的规律. 例如在有风的天气, 在麦田表面能观察到波的运动. 我们可以说, 麦穗的最大或最小高度在空间中移动, 但麦穗本身并没有移动.

因此, 在运动学中, 不仅可以把物体当作连续介质, 还可以把抽象的几何对象当作连续介质. 连续介质的运动可以受各种规律的控制. 如果研究物体的运动, 这个规律就是我们基本上已知的物理定律. 如果讨论诸如价格的变化, 这个规律则是我们现在刚刚认识的经济学的数学规律.

---

[1] 原文同时使用两套记号 a, b, c 与 ξ^1, ξ^2, ξ^3 来表示点的初始坐标, 译文为统一起见改为只使用后一套记号. ——译注

表示运动规律的函数的连续性 在研究变形体力学的时候, 我们希望利用微积分这一工具, 所以我们假设连续介质运动规律中的函数是连续的, 它们对所有自变量的偏导数也是连续的. 这是一个相当一般的假设, 但它同时也极大地限制了能够研究的现象的范围.

实际上, 比如水被喷洒后, 原来互相无限邻近的点在以后时刻将不再邻近. 在运动规律连续的假设下, 这类现象是无法描述的. 以后我们将看到, 在许多情况下必须弱化运动连续的假设并研究这样的运动, 其特征量本身或者导数在某些单独的曲面上发生间断. 我们将在以后讨论这种类型的间断, 例如激波. 不过我们指出, 连续运动的理论是研究不连续运动的基础.

表示运动规律的函数的单值性 基于物理上的考虑, 我们假设函数 $x^i = x^i(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t)$ 在每个固定时刻 $t = \mathrm{const}$ 都是单值的. 众所周知, 这时雅可比行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix}$$

在某个有限区域内的所有点都不等于零. 只要 $\Delta \neq 0$, 就可以从式 (1.2) 解出 ξ^1, ξ^2, ξ^3, 并把它们表示为单值连续函数

$$\xi^i = \xi^i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t). \tag{1.3}$$

单值连续映射的一般性质 设物体在给定时刻 t 位于空间中坐标值为 x^1, x^2, x^3 的点所组成的区域 D. 如果把坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3 看作坐标 x^1, x^2, x^3 在另外某个时刻 t_0 的值, 则坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3 就对应着 t_0 时刻空间中的某一区域 D_0. 此时, 运动规律 (1.2) 与 (1.3) 可以视为区域 D 与 D_0 之间的单值连续映射.

我们知道, 这种映射的一般拓扑性质是, 任何几何体 V_0 变换为几何体 V, 曲面 S_0 变换为曲面 S, 曲线 L_0 变换为曲线 L, 而封闭的曲面和曲线分别变换为封闭的曲面和曲线 (图 2). 例如, 体不能变换为点, 否则违反映射的单值条件; 封闭曲线不能变换为不封闭曲线, 否则违反映射的连续条件.

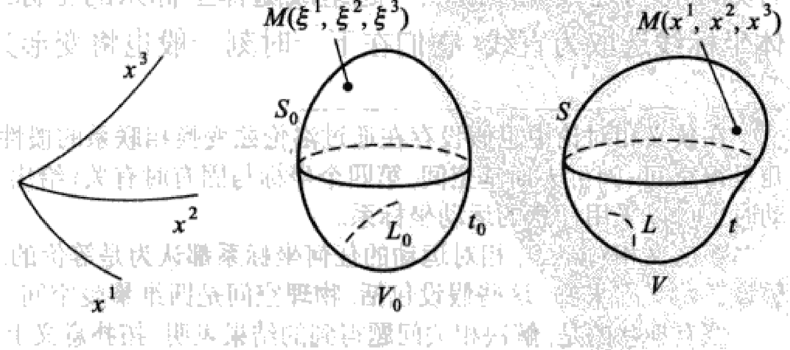


图 2. 连续介质的运动. 在 $t = t_0$ 时 $x^1 = \xi^1, x^2 = \xi^2, x^3 = \xi^3$

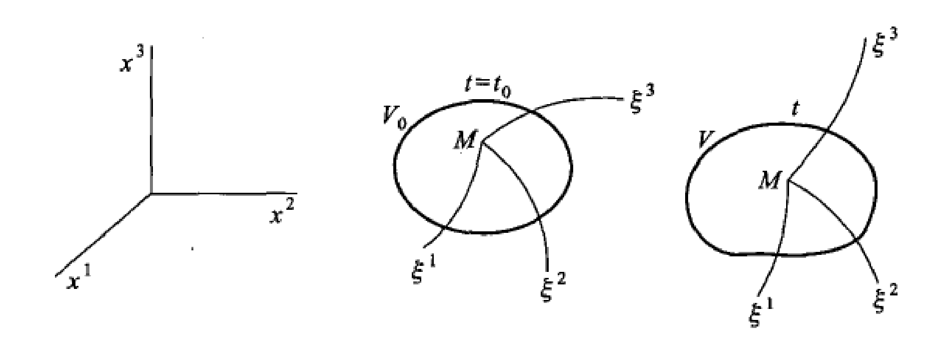


图 3. 参考系 x^1, x^2, x^3 与拉格朗日随体坐标系 ξ^1, ξ^2, ξ^3

参考系 连续介质的运动同所有运动一样总是相对于某个坐标系而确定的. 我们引入坐标系 x^1, x^2, x^3 作为观察者的参考系来研究连续介质的运动, 它可以任意选取. 参考系是根据条件引入的, 其选择取决于研究者. 在实践中, 它经常与地球相关联, 但也可以与太阳、恒星、飞机、车厢等相关联. 根据引入参考系的目的, 它可以是运动的或者静止的.

在牛顿力学中, 研究相对于惯性坐标系的运动具有特别的物理意义. 一个惯性坐标系相对于另一个惯性坐标系的运动是匀速直线运动. 存在惯性坐标系 (这密切关系到以下两个假设: 物理空间是欧几里得空间, 固有时间对于不同的点都是绝对的和相同的) 是牛顿力学的基本假设[1]. 在牛顿物理学中, 所有物理定律通常是在惯性坐标系中表述的, 并且与惯性坐标系的选取无关. 这就是著名的伽利略一牛顿相对性原理. 在实际应用中, 我们可以选取以太阳系的质心为原点的笛卡儿坐标系为原始的惯性坐标系. 在这个坐标系中, 可以认为遥远的恒星是静止的.

随体坐标系 与此同时, 对于连续介质的运动, 还需要引入随体坐标系. 用于区别点的拉格朗日坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3 可以像坐标 x^1, x^2, x^3 那样看作是空间中这些点在区域 D 中的另外一种坐标, 而相应的坐标系 ξ^1, ξ^2, ξ^3 就组成了该空间中运动的可变形的曲线坐标系, 称为随体坐标系. 这样, 如果在初始时刻 t_0 在连续介质中选取某些由连续介质的点组成的坐标线 (初始的拉格朗日坐标系), 则它们在下一时刻还将与连续介质的点一起组成随体坐标系的坐标线. 不过, 即使在初始时刻的随体坐标线选取为直线, 它们在下一时刻一般也将变形为曲线 (图 3).

[1] 在狭义相对论中也假设存在通过洛伦兹变换相联系的惯性坐标系, 但是物理空间由四维伪欧几里得空间 (闵可夫斯基空间, 第四个坐标与固有时有关) 给出. 在该理论中, 观察者在描述相对运动时也可以采用任意的运动坐标系.

在广义相对论中, 相对运动的任何坐标系都认为是等价的, 物理空间不是给出的, 而是在一定假设下定义出来的. 这些假设包括: 物理空间是四维黎曼空间, 狭义相对论定律成立于小的区域.

饶有趣味的是, 解决相关问题得到的结果表明, 拓扑意义上多连通的空的 (不含质量与电荷的) 黎曼空间从已知的意义上讲类似于带有引力场与电场 (产生于空间中的质量与电荷) 的欧几里得空间. 参见: Уилер Дж. Гравитация, нейтрино и Вселенная. Москва: Изд-во иностр. лит., 1962 (Wheeler J. A. Neutrinos, Gravitation and Geometry. Bologna, 1960).

因此, 如果考察与连续介质的点联系在一起的坐标系, 那么它将随着时间的推移而发生变化. 在任何给定的时刻, 我们都有权选择这样的坐标系, 但在此后的时刻, 该坐标系已经不再受我们的控制, 因为它已经被"冻结"在介质中, 并与之一起变形. 这种被冻结在介质中的坐标系就是上面定义的随体坐标系. 连续介质所有的点相对于运动着的随体坐标系总是静止的, 因为其坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3 在随体坐标系中保持不变. 然而, 该坐标系本身却在运动, 其坐标线不断伸长或缩短, 并变得弯曲. 随体坐标系的概念是理论力学中刚体的固连坐标系向连续介质情形的推广 [1].

每当我们讨论连续介质运动的时候, 都必须区别介质中不同的点, 因此必须使用拉格朗日坐标. 所以, 在研究连续介质运动时总是认为, 既存在用来确定运动的参考系 x^1, x^2, x^3, 也存在随体坐标系.

把 ξ^1, ξ^2, ξ^3 与 t 作为独立变量来使用, 这就是研究连续介质运动的拉格朗日观点. 因此, 这个观点在很大程度上是以单独描述连续介质每个点的运动过程为基础的. 这样的描述在实践中常常过于详细和复杂, 但是在表达物理定律的时候, 我们总是这样处理.

为了描述连续介质的运动, 除了运动规律, 还必须引入某些其他概念, 例如连续介质诸点的速度与加速度的概念.

速度 设连续介质某点在时刻 t 位于空间点 M, 而在时刻 $t+\Delta t$ 位于点 M', 且 $\overline{MM'} = \Delta\boldsymbol{r}$. $\Delta\boldsymbol{r}$ 是连续介质的点在时间 Δt 内的小位移, 它具有方向. 如果能在空间中引入径矢 $\boldsymbol{r}$ (这在欧几里得空间中总是可以做到的), $\Delta\boldsymbol{r}$ 显然就是该点的径矢增量.

在非欧几里得空间的情况下, 相应两个无穷小量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与 Δt 之比在 $\Delta t \to 0$ 时的极限, 或者在欧几里得空间的情况下, 连续介质的点相对于参考系的径矢对时间的偏导数 $\partial\boldsymbol{r}/\partial t$, 称为连续介质的点的速度. 速度矢量将用黑体字母 $\boldsymbol{v}$ 来表示.

径矢 $\boldsymbol{r}$ 一般与用来区分连续介质的点的 3 个量 ξ^1, ξ^2, ξ^3 和时间 t 有关. 速度是对连续介质单独的点计算的, 这时 ξ^1, ξ^2, ξ^3 固定, 所以取 $\boldsymbol{r}$ 对 t 的偏导数:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}.$$

速度是相对于参考系计算的. 显然, 介质相对于随体坐标系是静止的, 所以相对于随体坐标系的速度永远等于零.

基矢量 经过空间的每个点有 3 条坐标线, 所以在空间的每一点 $M(x^1,\ x^2,\ x^3)$ 可以考虑具有方向的线微元 $\Delta\boldsymbol{r}_1$, $\Delta\boldsymbol{r}_2$, $\Delta\boldsymbol{r}_3$, 它们从点 M 出发, 分别与点 $M_1(x^1+\Delta x^1,\ x^2,\ x^3)$, $M_2(x^1,\ x^2+\Delta x^2,\ x^3)$, $M_3(x^1,\ x^2,\ x^3+\Delta x^3)$ 相连. 在空间

[1] 显然, 对于包括观察者的参考系在内的任何坐标系, 总可以引入一个假想的理想化介质, 对它而言上述坐标系是随体坐标系.

对同一介质可以引入不同的随体坐标系. 因此, 有时要区别观察者所在的参考系与他正在使用的坐标系这两个概念, 前者是某一不变的对象, 而后者对于给定参考系中的观察者而言可以是不同的.

的每一点可以取比值 $\Delta \boldsymbol{r}_i/\Delta x^i$ 或 $\Delta \boldsymbol{r}_i/\Delta \xi^i$ (当 $\Delta x^i \to 0$ 或 $\Delta \xi^i \to 0$ 时) 的极限, 它们显然是沿相应坐标线在点 M 的切线方向的矢量. 在欧几里得空间中, 这些极限是 $\boldsymbol{r}$ 对相应坐标的偏导数. 如果把 Δx^i 或 $\Delta \xi^i$ 理解为沿相应坐标线的弧长, 则 $\partial \boldsymbol{r}/\partial x^i$, $\partial \boldsymbol{r}/\partial \xi^i$ 是单位矢量.

引入记号[1])

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{e}_i, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i} = \hat{\boldsymbol{e}}_i. \tag{1.4}$$

$\boldsymbol{e}_i$ 与 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 分别称为参考系与随体坐标系的基矢量. 如果坐标系 x^1, x^2, x^3 是笛卡儿坐标系, 则可以使用记号 $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}$, 其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别是沿 x, y, z 坐标轴的单位矢量. 如果坐标系 x^1, x^2, x^3 或 ξ^1, ξ^2, ξ^3 是曲线坐标系, 则 $\boldsymbol{e}_i$ 与 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 在空间中不同的点是不同的, 一般而言, 它们在空间中的每个点组成非正交的三面体.

速度的分量 连续介质点的无穷小位移 $\overline{MM'} = \Delta \boldsymbol{r}$ 可以通过点 M 处的基矢量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 分解:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta x^1 \boldsymbol{e}_1 + \Delta x^2 \boldsymbol{e}_2 + \Delta x^3 \boldsymbol{e}_3, \tag{1.5}$$

式中 $\Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3$ 为位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的分量. 分解式 (1.5) 可简写为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \Delta x^i \boldsymbol{e}_i = \Delta x^i \boldsymbol{e}_i, \tag{1.6}$$

并且在最后一个表达式中省略了求和号 $\sum\limits_{i=1}^{3}$. 以后我们通常省略求和号, 只要在类似于 (1.6) 的表达式中有 2 个相同的角标, 其中一个是上标, 另一个是下标, 就理解为求和[2]).

时间增量 Δt 对应于连续介质中的一个点在观察者所在空间中从点 M 移动到点 M' 的时间. 用它除 (1.6), 在 $\Delta t \to 0$ 时取极限, 根据连续介质的点的速度定义, 得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \frac{\partial x^i}{\partial t} \boldsymbol{e}_i = v^i \boldsymbol{e}_i = v^1 \boldsymbol{e}_1 + v^2 \boldsymbol{e}_2 + v^3 \boldsymbol{e}_3, \tag{1.7}$$

从而

$$v^1 = \left(\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)_{\xi^i}, \quad v^2 = \left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)_{\xi^i}, \quad v^3 = \left(\frac{\partial x^3}{\partial t}\right)_{\xi^i},$$

式中的下标 ξ^i 表示, 导数是在用来区别连续介质中不同的点的参数 ξ^1, ξ^2, ξ^3 不变时取的. 量 v^1, v^2, v^3 称为速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 中的分量. 速度及其分量一般

---

[1]) 原文使用俄文字母 э 表示基矢量. ——译注

[2]) 此约定通常称为爱因斯坦求和约定, 表示求和而成对出现的角标称为哑标. ——译注

与 ξ^1, ξ^2, ξ^3 和 t 有关:

$$v^1 = v^1(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t),$$
$$v^2 = v^2(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t),$$
$$v^3 = v^3(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t).$$

在以后的应用中, 我们建立以下记号: 带角标 1, 2, 3 的字母 v 表示速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 在任何坐标系 (有时也包括笛卡儿坐标系) 中的分量, 而字母 u, v, w 仅用于表示速度矢量在笛卡儿坐标系中的分量, 并且 u 表示 $\boldsymbol{v}$ 在 x 轴的投影, v 表示在 y 轴的投影, w 表示在 z 轴的投影. 在笛卡儿坐标系中, 介质点的位置由径矢 $\boldsymbol{r}$ 来表示:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

而对于速度 $\boldsymbol{v}$, 有

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\xi^i}\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\xi^i}\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{\xi^i}\boldsymbol{k},$$

即

$$u = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\xi^i},\quad v = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\xi^i},\quad w = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{\xi^i}.$$

矢量的概念 我们已经引入了某些矢量, 如速度 $\boldsymbol{v}$, 径矢 $\boldsymbol{r}$, 位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. 究竟什么是矢量? 矢量不是标量, 但与此同时, 矢量与标量都是与坐标系的选取无关的不变的对象. 在定义矢量时经常说, 这是被称为矢量的分量的 3 个数, 它们在坐标系变换时以确定的方式进行变换. 然而, 这个定义并不充分, 因为矢量总是在确定的基中给出的, 所以在用分量定义矢量时, 都应当指出确定该矢量的基.

在笛卡儿坐标系中, 矢量的分量与 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 联系在一起, 而在任意的曲线坐标系中, 它们与基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 联系在一起, 并且这些基矢量在空间中的每一点都发生变化. 所以在曲线坐标系中, 矢量的分量与该矢量所在的点密切相关, 这不同于笛卡儿坐标系中的情形.

例如, 当我们讨论速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的时候, 在空间的每一点都应当考察量 v^1, v^2, v^3 与基矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 并用 (1.7) 来确定矢量 $\boldsymbol{v}$. 在给定的坐标系中, 每一个矢量都可以用类似的方法通过基矢量表示出来.

加速度 除了速度, 还要考虑连续介质点的加速度 $\boldsymbol{a}$, 它也是矢量,

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right)_{\xi^i} = a^i\boldsymbol{e}_i,$$

式中 $a^i = a^i(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t)$ 为加速度的分量. 与速度 $\boldsymbol{v}$ 一样, 加速度 $\boldsymbol{a}$ 也是对连续介质单独的点计算的. 加速度的定义与给出运动规律 (1.2) 的观察者所用坐标系 x^1, x^2, x^3 的选取有关, 坐标系 x^1, x^2, x^3 可以是运动的.

必须指出，仅仅在笛卡儿坐标系中才成立关系式

$$a^1 = \frac{\partial v^1}{\partial t}, \quad a^2 = \frac{\partial v^2}{\partial t}, \quad a^3 = \frac{\partial v^3}{\partial t},$$

它们在曲线坐标系中不成立. 实际上, 加速度矢量定义为速度矢量对时间的导数, $\boldsymbol{a} = (\partial \boldsymbol{v}/\partial t)_{\xi^i}$, 所以在计算加速度的分量时必须注意, 介质的点随着时间的流逝而在空间中移动, 但曲线坐标系的基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 在空间中不同的点并不相同.

在笛卡儿坐标系中还成立公式

$$a^1 = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad a^2 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad a^3 = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

在研究连续介质运动的时候, 求解运动规律这一基本问题在许多情况下可以替换为确定速度分量 v^i 或者加速度分量 a^i 对 ξ^1, ξ^2, ξ^3 与 t 的函数关系.

我们特别强调, 用来研究连续介质运动的拉格朗日观点是物理定律的基础, 因为这些定律关系到单独的物质点的运动.

§2. 用欧拉观点研究连续介质的运动

欧拉观点的本质 现在假设我们所关心的不是连续介质单独点的运动历史, 而是在观察者的参考系所描述的空间中的给定几何点在不同时刻发生的现象. 我们的注意力集中在空间的给定点, 而经过该空间点的则是连续介质的不同的点, 这就是用欧拉观点研究连续介质运动的本质. 例如在研究河水的运动时, 可以从上游起就跟踪每一滴河水的运动, 一直到入海口 (这是拉格朗日观点), 或者只在河上一些确定的位置观察水流的变化, 并不沿整条河去跟踪单独水滴的运动 (这是欧拉观点).

欧拉变量 在实践中经常运用欧拉观点. 空间的几何坐标 x^1, x^2, x^3 与时间 t 称为欧拉变量. 按照欧拉观点, 如果速度 $\boldsymbol{v}$, 加速度 $\boldsymbol{a}$, 温度 T 及其他我们所关心的量由 x^1, x^2, x^3 与 t 的已知函数给出, 那么运动就是已知的. 当 x^1, x^2, x^3 固定不变而 t 改变时, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x^1, x^2, x^3, t)$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x^1, x^2, x^3, t)$, $T = T(x^1, x^2, x^3, t)$ 等函数确定了经过空间中给定点的不同物质点的速度、加速度、温度等随时间的变化. 当 t 固定不变而 x^1, x^2, x^3 改变时, 这些函数给出了运动特征量在给定时刻 t 在空间中的分布. 如果 x^1, x^2, x^3 与 t 都是变量, 这些函数就给出了运动特征量在不同时刻在空间中的分布.

研究连续介质运动的拉格朗日观点与欧拉观点的区别 所以, 按照拉格朗日观点, 我们关心的是连续介质中给定的单独的点的速度、加速度、温度和其他量的变化规律, 而按照欧拉观点, 我们关心的则是在给定位置上的速度、加速度、温度等量. 在欧拉观点中, 我们选取空间中的某个区域, 并想

了解经过这个区域的物质点的所有情况[1].

显然, 欧拉观点与拉格朗日观点在数学上的区别仅仅在于, 前者的变量是空间点的坐标 x^1, x^2, x^3 与时间 t, 而后者的变量是用于区分连续介质诸点的参数 ξ^1, ξ^2, ξ^3 与时间 t.

从拉格朗日变量转换为欧拉变量

连续介质的运动规律为

$$x^i = x^i(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t), \tag{2.1}$$

式中的自变量是拉格朗日变量. 相对于 ξ^1, ξ^2, ξ^3 求解, 得

$$\xi^i = \xi^i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t), \tag{2.2}$$

即已经转换为欧拉变量. 对于固定的 x^1, x^2, x^3, 式 (2.2) 给出了在不同时刻经过该空间点的连续介质的物质点 (ξ^1, ξ^2, ξ^3). 如果速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t)$、加速度 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t)$、温度 $T = T(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t)$ 以及其他物理量已经用拉格朗日观点给出, 即给出它们对 ξ^1, ξ^2, ξ^3 与 t 的函数, 则利用 (2.2) 可以把速度、加速度、温度等量写为欧拉变量 x^1, x^2, x^3 与 t 的函数. 所以, 如果运动按照拉格朗日观点是已知的, 需要用欧拉观点来确定它, 则只要相对于 ξ^1, ξ^2, ξ^3 求解运动规律 (2.1), 亦即把它写为 (2.2) 的形式. 从描述运动的拉格朗日观点转换为欧拉观点仅仅归结为求解隐函数.

从欧拉变量转换为拉格朗日变量

相反, 设速度在空间中的分布已用欧拉观点给出, 那么如何求出运动规律, 即如何转换为拉格朗日观点来描述运动呢? 例如, 取笛卡儿坐标系 x, y, z, 设在这个坐标系中已知

$$u = u(x,\ y,\ z,\ t), \quad v = v(x,\ y,\ z,\ t), \quad w = w(x,\ y,\ z,\ t).$$

速度的分量 u, v, w 是当用来区分连续介质点的参数 ξ^1, ξ^2, ξ^3 为常数时相应坐标 x, y, z 对时间 t 的导数, 所以, 如果 u, v, w 由欧拉变量 x, y, z 与 t 的函数给出, 则可以把关系式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x,\ y,\ z,\ t), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v(x,\ y,\ z,\ t), \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w(x,\ y,\ z,\ t)$$

---

[1] 物质体、物质面和物质线是与拉格朗日观点有关的重要概念, 它们是指随着连续介质一起运动的、由同样一些物质点组成的几何体、曲面和曲线, 即同样的随体坐标集合所对应的相应几何对象. 后面将利用对物质体和物质面的积分来表述研究连续介质运动的守恒定律, 其核心是物质体积分对时间的求导公式 (8.8).

相应地, 控制体和控制面是与欧拉观点有关的重要概念. 控制体是指在空间中按照欧拉变量所表述的给定规律运动的几何体, 其表面即为控制面. 后面经常用到的是静止的控制体和控制面. 我们甚至可以将控制体定义为相对于所用参考系按照给定规律运动的几何体, 这时物质体就是控制体的一个特例, 因为物质体相对于随体坐标系是静止的.

在本书中, 俄文 объем 一词被译为几何体、区域、物质体、控制体或体积 (指相应几何对象的大小). ——译注

视为对 x, y, z 的 3 个常微分方程所组成的方程组. 由此解出 x, y, z, 它们是 t 和 3 个任意常数 C_1, C_2, C_3 的函数. 这些常数由 x, y, z 在某一给定时刻 t_0 的值确定, 所以它们就是区别连续介质点的参数, 即拉格朗日变量. 于是, 求解这个微分方程组得到运动规律 (2.1), 利用它就可以在所有确定 $\boldsymbol{a}, T$ 等物理量分布的公式中完成从欧拉变量至拉格朗日变量的转换. 所以当速度场给定后, 从欧拉变量到拉格朗日变量的转换一般与求解常微分方程有关.

显然, 描述连续介质运动的拉格朗日观点与欧拉观点在力学上互相等价.

§3. 标量场与矢量场及其特性

标量场与矢量场的定义 在研究连续介质的运动时必须引入标量与矢量, 如温度 T、速度 $\boldsymbol{v}$ 等. 一般而言, 对它们的研究可以在不同的坐标系中进行, 既可以是观察者的坐标系, 也可以是与连续介质冻结在一起的坐标系. 因此, 它们可能是 x^1, x^2, x^3 或者 ξ^1, ξ^2, ξ^3 的函数. 在每个这样的坐标系中都可以选取某个有限或无限的区域, 使该区域中的每个点都对应一个数, 如温度 T, 或者对应一个矢量, 如速度 $\boldsymbol{v}$, 或者, 正如我们以后将看到的, 对应其他一些更复杂的量.

设在我们所考察的区域内的每一点都给出某个量的值, 它们合在一起就称为此量的场. 如果这个量是标量, 即它的值在给定点不依赖于坐标系的选取, 则称之为标量场, 如温度场、密度场等就是标量场. 如果这个量是矢量, 如速度、加速度, 则称之为矢量场. 速度在每个坐标系 x^1, x^2, x^3 中有 3 个分量 v^1, v^2, v^3, 所以它在给定点和给定坐标系中由 3 个数来确定. 因此, 速度场和其他任何矢量场等价于该矢量的 3 个投影的场. 但是, 尽管矢量本身不依赖于坐标系, 其投影却与坐标系有关. 我们将以温度场 T 与速度场 $\boldsymbol{v}$ 为例来研究标量场与矢量场的一些一般性质.

对时间的随体导数与局部导数 温度分布既可用拉格朗日观点给出: $T(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$, 也可用欧拉观点给出: $T(x^1, x^2, x^3, t)$. 如果 T 的分布由拉格朗日观点给出, 计算连续介质微元的温度在单位时间内的变化就很简单, 它等于导数 $(\partial T/\partial t)_{\xi^i}$. 如果温度分布由欧拉变量给出, $T(x^1, x^2, x^3, t)$, 将如何计算此量呢? 显然, 为此应当先从欧拉变量转换至拉格朗日变量,

$$T(x^1, x^2, x^3, t) = T[x^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), x^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), x^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), t],$$

再运用复合函数的微分法则. 于是

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i} + \frac{\partial T}{\partial x^1}\left(\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)_{\xi^i} + \frac{\partial T}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)_{\xi^i} + \frac{\partial T}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x^3}{\partial t}\right)_{\xi^i},$$

式中的导数 $\partial x^1/\partial t, \partial x^2/\partial t, \partial x^3/\partial t$ 是在 ξ^1, ξ^2, ξ^3 不变时取的, 所以它们分别是速度

分量 v^1, v^2, v^3. 因此[1)]

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}.$$

我们指出, 当函数 $T(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)$ 给定时, 为了计算 $(\partial T/\partial t)_{\xi^i}$, 并不需要完全知道连续介质的运动规律, 只要知道速度场 $\boldsymbol{v}$ 即可.

导数 $(\partial T/\partial t)_{\xi^i}$ 表示连续介质给定点的温度在单位时间内的变化, 称为温度 T 对时间 t 的随体导数, 亦称物质导数或全导数, 经常用记号 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ 表示. 导数 $(\partial T/\partial t)_{x^i}$ 表示空间中给定点 x^1, x^2, x^3 那里的温度在单位时间内的变化, 称为就地导数或局部导数, 用 $\partial T/\partial t$ 表示. 在一般情况下, 随体导数 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ 不等于就地导数 $\partial T/\partial t$, 它们之间相差一个与介质微元的运动有关的量, 这个量称为对流导数. 这样,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}.$$

我们以后将更详细地分析对流导数的定义, 而现在以温度场为例介绍一些概念, 这些概念对每个标量场都可以引入.

等势面 如果温度 T 由欧拉变量的函数给出, 则在每一给定时刻 t 都可以考察曲面

$$T(x,\ y,\ z,\ t) = \text{const},$$

它们称为等势面. 对于温度场, 这些曲面称为等温面.

方向导数 在等温面 $T = \text{const}$ 上取某一点 M, 并从该点出发取某一方向, 可以研究温度 T 沿此方向的变化. 我们用 $\boldsymbol{s}$ 表示这个方向. 极限

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta s} = \frac{\partial T}{\partial s}$$

称为 T 沿方向 $\boldsymbol{s}$ 的导数. 显然, 若 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_1$, 式中 $\boldsymbol{s}_1$ 的方向平行于等温面 $T = \text{const}$ 在点 M 的切平面, 则

$$\frac{\partial T}{\partial s_1} = 0.$$

因为 ΔT 等于 $T_2 - T_1$, $T_1 = \text{const}$ 和 $T_2 = \text{const}$ 是相邻等温面方程, 并且对于给定的 ΔT 有公式 $\Delta n = \Delta s \cos\alpha$ (参见图 4), 所以

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial n} \cos\alpha, \tag{3.1}$$

式中 $\partial T/\partial n$ 为沿等温面 $T = \text{const}$ 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的导数, α 为 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 之间的夹角. 显然, 导数 $\partial T/\partial s$ 在法线方向 $\boldsymbol{n}$ (当 $\alpha = 0$ 时) 达到最大值.

[1)] 等式右侧第二项其实表示速度矢量与温度梯度矢量的标积 (见下文), 式中对 i 求和, 即认为 $\partial T/\partial x^i$ 中的角标 i 对此表达式整体而言相当于下标 (原因见后文), 从而满足求和约定. ——译注

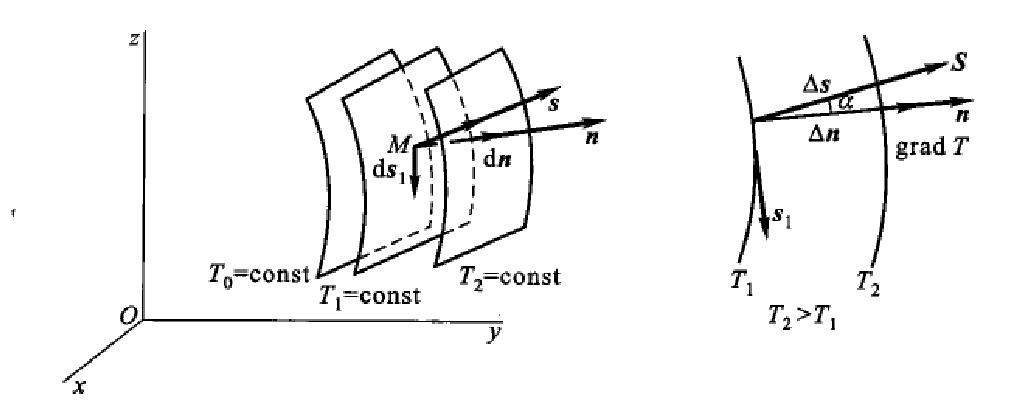


图 4. 等温面与温度梯度矢量

梯度矢量 考虑沿法线方向 $\boldsymbol{n}$ 且与 T 增加的方向一致、长度为 $\partial T/\partial n$ 的矢量. 该矢量称为标量函数 (这里是温度) 的梯度矢量, 用 $\operatorname{grad} T$ 表示[1]:

$$\operatorname{grad} T=\frac{\partial T}{\partial n}\boldsymbol{n}^0,$$

式中 $\boldsymbol{n}^0$ 为沿法线方向 $\boldsymbol{n}$ 且与 T 增加的方向一致的单位矢量. 显然, 在等温面 $T=\text{const}$ 分布较密集的地方, $\operatorname{grad} T$ 的绝对值也较大. 根据 (3.1), 温度梯度矢量在任何方向 $\boldsymbol{s}$ 的投影就是温度沿该方向的导数

$$(\operatorname{grad} T)_s=\frac{\partial T}{\partial s}.$$

例如, 梯度矢量在坐标轴 x^1, x^2, x^3 上的投影等于

$$(\operatorname{grad} T)_{x^i}=\frac{\partial T}{\partial x^i},$$

而在笛卡儿坐标系中

$$\operatorname{grad} T=\frac{\partial T}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial T}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial T}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

我们指出, $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$ 可以视为矢量的分量, 因为[2]

$$\mathrm{d}T=\frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial T}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial T}{\partial z}\mathrm{d}z$$

是不变量, 而 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ 是矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的分量.

对流导数 我们把表达式 $v^i\partial T/\partial x^i$ 称为温度对时间的对流导数. 利用温度梯度矢量与标积的概念, 可以把该表达式写为另一种形式[3]:

$$v^i\frac{\partial T}{\partial x^i}=\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad} T.$$

---

[1] $\operatorname{grad} T$ 有时也记为 ∇T. ——译注

[2] 相关解释见 §4. ——译注

[3] 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的标积通过分量可表示为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a^ib_i=a_ib^i$, 角标的写法与含义见 §4. ——译注

导数总是理解为函数增量与自变量增量的比值在后者趋于零时的极限. 在对流导数的定义中, 函数的增量是什么呢?

我们把温度的对流导数写为 $\boldsymbol{v}\Delta t\cdot\operatorname{grad}T/\Delta t$. 显然, $\boldsymbol{v}\Delta t$ 等于位移 $\Delta\boldsymbol{s}$ (见图 5), 于是

$$v^i\frac{\partial T}{\partial x^i}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{s}\cdot\operatorname{grad}T}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\operatorname{grad}T)_s\Delta s}{\Delta t}$$
$$=\frac{\partial T}{\partial s}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t},$$

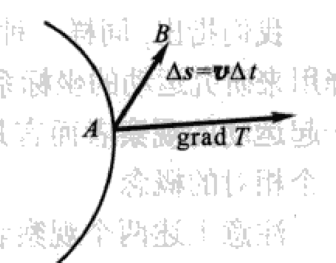


图 5. 用于对流导数的概念

式中 ΔT 为连续介质微元在时间 Δt 内仅仅因为在空间分布不均匀的温度场中以速度 $\boldsymbol{v}$ 从空间中的一点运动至另一点 (从图 5 中的点 A 至点 B) 而导致的温度增量.

在一般情况下, 因为温度在点 A 与点 B 的值不同, 所以对流导数不等于零. 对流导数在以下情形中等于零: 或者不存在运动, 或者温度没有梯度, 即温度在该时刻在空间每一点都相同 (这样的场称为均匀场), 或者在 $t=\text{const}$ 时运动是沿着等温面 $T(x,\ y,\ z,\ t)=\text{const}$ 进行的.

加速度分量在笛卡儿坐标系中的计算公式

当速度由欧拉观点给出时, 加速度分量的计算规则与对时间的随体导数、就地导数与对流导数这些概念密切相关. 在笛卡儿坐标系中, 设速度分量 v^1, v^2, v^3 是欧拉变量的函数, 那么如何计算加速度的分量呢? 加速度是对连续介质的点定义的, 所以加速度的分量就是速度的相应分量对时间的随体导数, 即

$$a_x=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\xi^i}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x^i}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z},$$
$$a_y=\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{\xi^i}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{x^i}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z},$$
$$a_z=\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{\xi^i}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x^i}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

需要注意的是, 这些公式仅在笛卡儿坐标系中 (当所有 $\boldsymbol{e}_i$ 都与坐标和时间无关时) 才成立.

定常运动与非定常运动

如果由欧拉观点给出的所有表征各种过程与运动的量只依赖于 x^1, x^2, x^3 而不显式地依赖于时间 t, 这些过程与运动就称为定常的. 所以, 所有表征定常过程和定常运动的量对时间的局部导数等于零, 即

$$\frac{\partial T}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial v^1}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial v^2}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial v^3}{\partial t}=0,\quad \cdots$$

比如, 若 $T=T(x^1,x^2,x^3)$, 则温度场定常; 若 $T=T(x^1,x^2,\ x^3,t)$, 它就是非定常的. 在定常运动的情形下, 温度 T、速度 $\boldsymbol{v}$ 与其他量在空间 x^1, x^2, x^3 中的分布在

不同时刻是相同的; 而对于非定常运动, 这些分布在不同时刻则是不同的. 定常运动的概念对于应用非常重要. 首先, 许多实际遇到的流动就是定常的; 其次, 用欧拉观点研究这样的运动较为简单, 因为这时独立变量的数目减少了 1 个 (不含时间).

我们指出, 同样一种运动既可以是定常的, 也可以是非定常的, 这取决于如何选择用来研究运动的坐标系. 例如当轮船匀速航行时, 船后出现的波浪运动对船上与船一起运动的观察者而言是定常的, 对岸上的观察者而言则是非定常的. 定常运动是一个相对的概念.

注意上述两个观察者是在各自的、但相同的坐标系中研究运动, 相应运动或者是相对于岸的绝对运动, 或者是相对于轮船的相对运动.

矢量线 · 流线 对于任何矢量场, 例如速度 $\boldsymbol{v}$, 加速度 $\boldsymbol{a}$, 温度梯度 $\operatorname{grad} T$ 等场, 都可以引入矢量线, 现在研究这一概念. 为确定起见, 我们以速度场的矢量线为例来阐明其含义. 速度场的矢量线称为流线.

我们知道, 为了给出场 $\boldsymbol{v}$, 需要在每一时刻 t 在空间每一点 x^1, x^2, x^3 给出矢量

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = v^1 \boldsymbol{e}_1 + v^2 \boldsymbol{e}_2 + v^3 \boldsymbol{e}_3,$$

式中 $v^i(x^1, x^2, x^3, t)$ 为速度在基 $\boldsymbol{e}_i$ 中的分量. 给出速度是一个很强的要求, 可以把它稍微减弱一些, 比如, 可以要求并非在所有时刻 t, 而只是在某一确定的时刻 t_0 才给出 $\boldsymbol{v}$. 还可以进一步要求, 在该时刻 t_0 在空间的每个点 x^1, x^2, x^3 仅仅给出速度矢量的方向, 但不考虑其大小. 显然, 为了满足这个要求, 应当画出这样一族曲线, 它们在空间中每一点的切线方向与这一点在该时刻 t_0 的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的方向一致. 对于速度场, 这样的曲线称为流线, 而对于任意的矢量场, 它们称为矢量线.

对于任何速度场 $\boldsymbol{v}$ 都可以画出流线. 流线一经画出, 即可知道速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 在每一点的方向. 在实际应用中常常有必要知道流线, 它们可以通过实验来确定, 而这就关系到流动显示方法的发明. 例如, 为了用实验方法确定流线, 人们通过在流体中加入可以悬浮的特殊粉末, 在液体内部制造小气泡等手段, 利用高速摄影把流动拍摄下来. 那些与流体一起运动的微粒会在照片上形成短线，这些短线就基本上复原了流线的图案. 很容易观察磁场的矢量线, 只要把细铁屑倒在纸上, 并在纸下放一块磁铁即可. 我们还能看到机翼绕流的流线, 这时要把细丝粘在机翼上, 然后在风洞中或者直接在飞行时拍摄绕流的图片.

流线方程 怎么用解析方法求流线呢? 为此必须提出用来确定流线的数学问题. 沿流线取微元

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x^i \boldsymbol{e}_i = \mathrm{d}x^1 \boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}x^2 \boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}x^3 \boldsymbol{e}_3,$$

它与速度矢量

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = v^1 \boldsymbol{e}_1 + v^2 \boldsymbol{e}_2 + v^3 \boldsymbol{e}_3$$

互相平行的条件为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\lambda$, 其中 $\mathrm{d}\lambda$ 是一个标量参数. 在每条流线 $\mathscr{L}$ 上, 这个参

数可以看作是某个函数 $\lambda(s,\ \mathscr{L})$ 的微分, 其中 s 是沿流线的弧长. 对于各分量, 得

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{v^1}=\frac{\mathrm{d}x^2}{v^2}=\frac{\mathrm{d}x^3}{v^3}=\mathrm{d}\lambda,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}=v^i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t),\quad i=1,\ 2,\ 3. \tag{3.2}$$

这就是流线的微分方程. 它们有别于确定连续介质点的运动规律或者运动轨迹的微分方程, 后者显然是

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=v^i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t). \tag{3.3}$$

方程 (3.3) 的左右两侧都包含时间 t, 而方程 (3.2) 中的导数是对 λ 取的, 方程的右侧则与 t 有关. 在求解 (3.2) 时, 应当把 t 视为不变的参数, 而方程 (3.3) 中的 t 则必须认为是变量.

因此, 流线与轨迹一般不重合. 流线族 $x^i=x^i(c^1,\ c^2,\ c^3,\ \lambda,\ t)$ 与时间有关, 在不同时刻是不同的. 然而, 参数 t 仅在非定常运动时才出现于 (3.2) 与 (3.3) 的右侧. 在定常运动的情况下, 方程 (3.2) 与 (3.3) 之间的差别消失了, 因为其差别仅仅在于进行微分运算时所用的字母不同, 而这是无关紧要的. 因此, 在定常运动中流线与轨迹重合.

流线与轨迹的例子 我们来分析几个例子. 若刚体内每一条线段在运动过程中都保持同自身平行, 则这样的运动称为刚体的平动. 在平动过程中, 刚体所有点的速度在给定时刻的大小与方向均相同. 因此, 这时的流线总是直线. 而轨迹呢? 刚体的平动可以沿任何轨迹进行, 包括圆周 (见图 6). 所以在刚体平动的一般情形中, 流线与轨迹不重合. 当刚体任意运动时, 流线是螺旋线, 而轨迹可以是任意的.

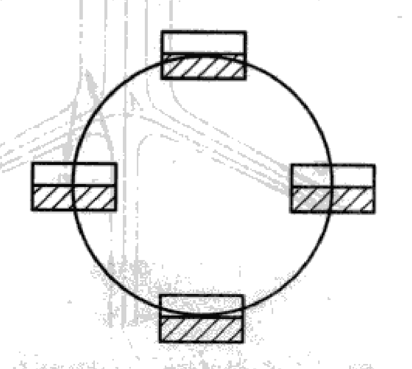


图 6. 刚体沿圆周平动

是否存在这样的非定常运动, 其中的流线仍然与轨迹重合呢? 例如, 考虑刚体的变速直线运动, 这时流线与轨迹都是直线, 而运动本身当然是非定常的. 类似地, 当刚体绕不动轴作变角速度旋转时, 流线也与轨迹重合. 在一般情况下, 流线与轨迹重合的现象出现于这样的非定常运动中, 此时在空间中的给定点, 速度的大小随时间而变化, 但其方向不变. 因此, 对于场 $\boldsymbol{v}(x^1,\ x^2,\ x^3)$ 与 $\boldsymbol{v}_1=f(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)\,\boldsymbol{v}(x^1,\ x^2,\ x^3)$, 流线与轨迹重合, 式中 $f(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)$ 是其自变量的标量函数.

流线的存在性 流线的微分方程 (3.2) 可以写为

$$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x^1}=\frac{v^2}{v^1},\quad \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x^1}=\frac{v^3}{v^1}. \tag{3.4}$$

可以对之提出柯西问题, 即在作为常数的参数 t 的值给定后, 求这样的解 $x^2(x^1)$,

$x^3(x^1)$, 它们在给定点 $x^1 = x_0^1$ 取给定值 $x^2 = x_0^2$, $x^3 = x_0^3$. 换言之, 应当经过坐标为 x_0^1, x_0^2, x_0^3 的给定点引方程组 (3.4) 的积分曲线 (流线). 我们从微分方程的一般理论知道, 如果在某一区域 V 中, 方程 (3.4) 的右侧是单值连续函数, 它们对变量 x^1, x^2, x^3 的一阶导数亦连续, 则柯西问题在区域 V 内存在唯一解 (此定理在某些更一般的假设下也成立). 因此, 在非常一般的限制下, 经过运动的连续介质所在的给定空间的每一点能且仅能引一条流线.

奇点 · 临界点 保证柯西问题有唯一解的条件在速度场的个别点可能不满足. 柯西问题解的唯一性会在这些特殊的点遭到破坏, 流线则会在这些点相交或分岔. 例如, 在速度的所有分量都等于零或无穷大的点, 方程 (3.4) 的右侧不确定, 这些点是流线的微分方程的奇点. 柯西问题解的唯一性定理在这些点可能不成立. 相应奇点的类型可以是中心、鞍点、焦点、结点, 还可能更为复杂.

流线的微分方程 (3.4) 的奇点称为临界点. 重要的例子是流动中速度值等于零的临界点或临界线. 在图 7 中画出了两股相向运动的轴对称液体射流发生碰撞而形成的流动在子午面上的流线示意图. 在射流互相作用区域中心的某点 A 出现临界点, 在该点速度为零, 流线发生交叉和分岔.

流面 · 矢量面 经过任意曲线 C 上的每一点都可以引流线, 并且如果 C 不是流线, 所引流线就形成一个曲面, 曲面上每一点的速度都位于其切平面内. 这样的曲面称为流面, 而在任意矢量场中用类似方法作出的曲面则称为矢量面. 怎样求流面方程 $f(x^1,\ x^2,\ x^3) = \text{const}$ 呢? 显然, 沿曲面 $f(x^1,\ x^2,\ x^3) = \text{const}$ 法线方向的 $\operatorname{grad} f$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{v}$, 所以

$$\operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{v} = 0,$$

即

$$u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{3.5}$$

我们得到了用于确定函数 $f(x, y, z)$ 的偏微分方程.

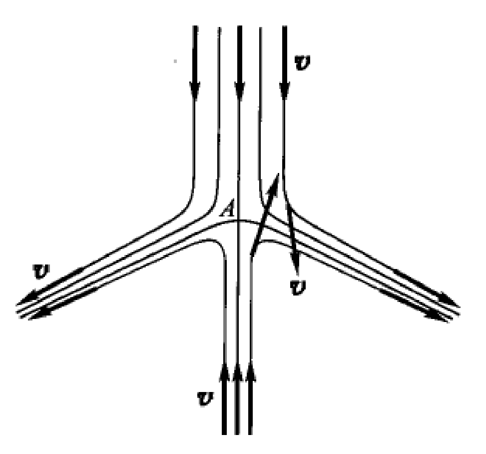


图 7. 在临界点 A, 流体的速度为零, 流线发生分岔

作流面的上述方法指出了求解型如 (3.5) 的偏微分方程的一种方法, 它归结为求经过曲线 C 的一族流线, 即求解常微分方程组 (这些常微分方程的解在一般情况下称为偏微分方程 (3.5) 的特征线). 显然, 只有在曲线 C 本身不是流线 (即特征线) 的时候才能用这种方法构造出唯一的解.

流管 · 矢量管 如果曲线 C 是封闭的, 则经过该曲线的点引出的流线组成流管. 在任意矢量场中用类似方法构造出的管状曲面称为矢量管.

位势场 · 势流 我们在前面讨论了温度 T 的梯度矢量. 有一个问题是: 难道不能把速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 表示为某标量函数 $\varphi(x,\ y,\ z,\ t)$ 的梯度的形式吗? 如果

存在这样的函数 $\varphi(x, y, z, t)$, 使

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

则速度场 $\boldsymbol{v}$ 称为位势场, 函数 φ 称为速度势, 而相应的流动称为势流. 类似地, 任意矢量场 $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ 是位势场, 如果存在这样的函数 $\Phi(x, y, z, t)$, 使

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\Phi(x, y, z, t).$$

根据梯度矢量的性质, 势流的速度 $\boldsymbol{v}$ 垂直于等势面 $\varphi = \text{const}$, 并且在等势面分布较密集的地方取值较大; 速度 $\boldsymbol{v}$ 在任何方向 $\boldsymbol{s}$ 的投影等于速度势 φ 沿该方向的导数, $v_s = \partial\varphi/\partial s$.

速度势存在的充分必要条件

组成表达式

$$u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z. \tag{3.6}$$

如果流动是势流, 则 (3.6) 是函数 φ (对坐标 x, y, z) 的全微分. 实际上,

$$u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}\varphi.$$

逆命题也成立: 如果表达式 (3.6) 是全微分, 则流动是势流. 我们知道, 为了使 (3.6) 是全微分, 应当成立等式

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

这就是势流的充分必要条件. 以后我们将看到势流具有重要价值, 而现在先讨论势流的某些例子.

平动

以常速度 u_0 沿 x 轴的平动是势流的一个例子, 这时 $u = u_0$, $v = w = 0$, 而速度势 $\varphi = u_0 x + \text{const}$, 因为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

由此容易得出两个明显的结论: 第一, 势函数只能确定到相差一个相对于坐标的常数; 第二, 任何平动都是有势的. 其实, 在平动的一般情况下, $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$, $\varphi = u_0 x + v_0 y + w_0 z + C$, 并且 u_0, v_0, w_0 与 C 可以是 t 的函数.

我们指出, 势流比非势流更容易研究, 因为有势运动决定于 1 个函数 $\varphi(x, y, z, t)$, 而一般形式的运动则决定于 3 个函数 $v^1(x, y, z, t)$, $v^2(x, y, z, t)$, $v^3(x, y, z, t)$.

空间中的点源与点汇

再考虑一个在后文中很重要的势流的例子. 令

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}, \tag{3.7}$$

式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $Q = \text{const}$ 或 $Q = Q(t)$. 显然, 这时等势面 $\varphi = \text{const}$ 是曲面 $r = \text{const}$, 即球心在坐标原点的同心球面. 速度 $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$ 沿径向垂直于这些球

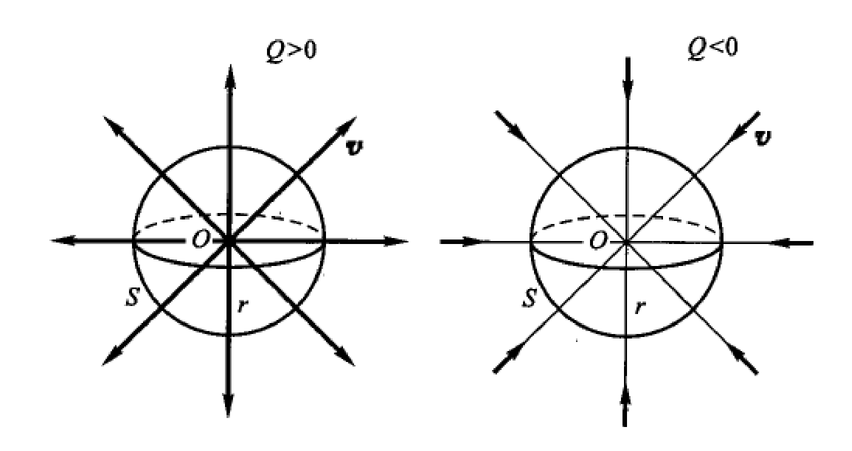


图 8. 空间点源与点汇流动 ($\varphi = -Q/4\pi r$)

面, 而流线是从坐标原点出发的射线. 设 $Q > 0$, 那么, 因为 $\operatorname{grad}\varphi$ 指向 φ 增加的方向, 所以速度 $\boldsymbol{v}$ 与径矢 $\boldsymbol{r}$ 的方向一致. 如果 $Q < 0$, 则 $\boldsymbol{v}$ 指向 $-\boldsymbol{r}$ 的方向 (图 8).

速度的大小等于

$$|(\operatorname{grad}\varphi)_r| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right| = \frac{|Q|}{4\pi r^2}.$$

它在 $r \to \infty$ 时趋于零, 在 $r \to 0$ 时趋于无穷大. 零点与无穷远点是临界点. 当 $Q > 0$ 时流体从坐标原点流向所有方向, 这种流动称为空间点源. 当 $Q < 0$ 时流体流入坐标原点, 这种流动称为空间点汇. 前者是位于无穷远点的点汇, 后者是位于无穷远点的点源.

我们来计算单位时间内流过半径为 r、球心位于坐标原点的球面 S 的流体的体积. 单位时间内流过球面微元 $d\sigma$ 的流体的体积为 $v\,d\sigma$, 而流过整个球面的流体的体积为

$$\int_S v\,d\sigma = v\int_S d\sigma = 4\pi r^2 v = Q$$

(在球面上 $v = \text{const}$, 所以 v 可以放在积分号外). 我们指出, 这些等式在 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(r)$ 且 $\boldsymbol{v}$ 垂直于球面 S 时总是成立的. 由 (3.7) 计算出的流体体积与 r 无关, 因此, 尽管在球心位于坐标原点但半径各异的不同球面上的速度各不相同, 但在速度势 φ 的公式 (3.7) 中, 常数 Q 却是单位时间内流过每个这样的球面的流体体积. Q 称为点源 (点汇) 的流量或强度.

如果 $Q = \text{const}$, 则点源 (点汇) 具有不变的强度; 如果 $Q = Q(t)$, 其强度就是变化的. 如果 Q 在某个时刻在坐标原点发生变化, 则整个空间中的流场在瞬间都会改变. Q 发生变化这一信号立刻在整个空间中都表现出来, 这在实际上当然是不可能的, 扰动应当以某个有限的速度传播. 因此, 我们所讨论的速度场属于一定的理想化情形, 它仅仅在研究扰动能够高速传播的流体的运动时才能很好地反映实际情况. 例如, 在许多情况下可以认为水就是这样的流体, 因为弱扰动在水中的传播速度等于 $1450\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

§4. 张量分析初步

表征连续介质运动的许多量具有张量的本质, 所以我们来讨论张量分析的基础知识. 我们指出, 标量和矢量也是张量, 只不过是最简单的张量. 仅用矢量和标量来描述连续介质的运动是不够的.

坐标系建立了数与空间点之间的对应关系. 经过空间的每个点有 3 条坐标线, 它们可以是随体坐标系的坐标线 ξ^1, ξ^2, ξ^3, 或者是观察者所用参考系的坐标线 x^1, x^2, x^3, 还可以是其他某个坐标系的坐标线. 所以在本节中, 我们用字母 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ 或 η^1, η^2, η^3 来表示坐标系.

坐标系是由研究者引入的, 其选择只取决于研究者而不取决于被研究的现象. 运动定律中可以有坐标出现, 但是这些定律本身不应当取决于坐标系的选取, 它们相对于坐标系的选取应当是不变的. 这就是对这些定律的数学表述的众所周知的限制.

坐标变换 我们来讨论坐标变换理论中一些必须的概念. 设与坐标系 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ 一起还有坐标系 η^1, η^2, η^3, 并且既可以利用坐标系 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$, 也可以利用坐标系 η^1, η^2, η^3 来研究运动的定律. 设这两个坐标系之间的对应关系为

$$\zeta^i = \zeta^i(\eta^1, \eta^2, \eta^3), \tag{4.1}$$

该对应关系称为坐标变换. 我们将讨论连续的互为单值映射的坐标变换, 这些变换组成群. 我们来寻找相对于互为单值映射的连续变换群不变的关系式. 由 (4.1), 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\zeta^1 &= \frac{\partial\zeta^1}{\partial\eta^1}\mathrm{d}\eta^1 + \frac{\partial\zeta^1}{\partial\eta^2}\mathrm{d}\eta^2 + \frac{\partial\zeta^1}{\partial\eta^3}\mathrm{d}\eta^3,\\
\mathrm{d}\zeta^2 &= \frac{\partial\zeta^2}{\partial\eta^1}\mathrm{d}\eta^1 + \frac{\partial\zeta^2}{\partial\eta^2}\mathrm{d}\eta^2 + \frac{\partial\zeta^2}{\partial\eta^3}\mathrm{d}\eta^3,\\
\mathrm{d}\zeta^3 &= \frac{\partial\zeta^3}{\partial\eta^1}\mathrm{d}\eta^1 + \frac{\partial\zeta^3}{\partial\eta^2}\mathrm{d}\eta^2 + \frac{\partial\zeta^3}{\partial\eta^3}\mathrm{d}\eta^3,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

或者

$$\mathrm{d}\zeta^i = \frac{\partial\zeta^i}{\partial\eta^j}\mathrm{d}\eta^j, \tag{4.3}$$

式中对 j 从 1 到 3 求和, i 取值 1, 2, 3, 并且以后都将这样理解而不再说明.

这样, 在每个给定点附近, 坐标增量 $\mathrm{d}\zeta^i$ 与 $\mathrm{d}\eta^j$ 都是有关联的. 导数 $\partial\zeta^i/\partial\eta^j$ 是点的函数, 它们在给定的点是不变的, 所以 (4.2) 是在给定点的坐标增量 $\mathrm{d}\zeta^i$ 与 $\mathrm{d}\eta^j$ 之间的线性关系式. 引入记号

$$\frac{\partial\zeta^i}{\partial\eta^j} = a^{i}_{\cdot j}$$

(以后将得出, 角标位置在上边或下边及其书写顺序都非常重要). 量 $a^{i}_{\cdot j}$ 组成矩阵

$$(a^{i}_{\cdot j}) = \boldsymbol{A},$$

式中第一个角标 i 对应矩阵的行, 第二个角标 j 对应矩阵的列. 上述变换在一般情况下互为单值映射, 由这一性质可知, 变换的雅可比行列式 (即矩阵 $(a^{i}{}_{\cdot j}^{\cdot})$ 的行列式) 不等于零, 于是 $\Delta = |a^{i}{}_{\cdot j}^{\cdot}| \neq 0$. 因为 $\Delta \neq 0$, 所以线性关系式 (4.2) 可以相对于 $\mathrm{d}\eta^j$ 求解, 与 (4.2) 同时可以写出公式

$$\mathrm{d}\eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial \zeta^j}\mathrm{d}\zeta^j. \tag{4.4}$$

引入矩阵

$$\boldsymbol{B} = (b^{i}{}_{\cdot j}^{\cdot}),$$

式中

$$b^{i}{}_{\cdot j}^{\cdot} = \frac{\partial \eta^i}{\partial \zeta^j}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是对正变换和逆变换引入的, 它们互为逆矩阵, 即其乘积等于单位矩阵. 实际上,

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (a^{i}{}_{\cdot j}^{\cdot})\cdot(b^{l}{}_{\cdot k}^{\cdot}) = (a^{i}{}_{\cdot j}^{\cdot} b^{j}{}_{\cdot k}^{\cdot}),$$

而因为 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ 和 η^1, η^2, η^3 都是独立的坐标, 所以

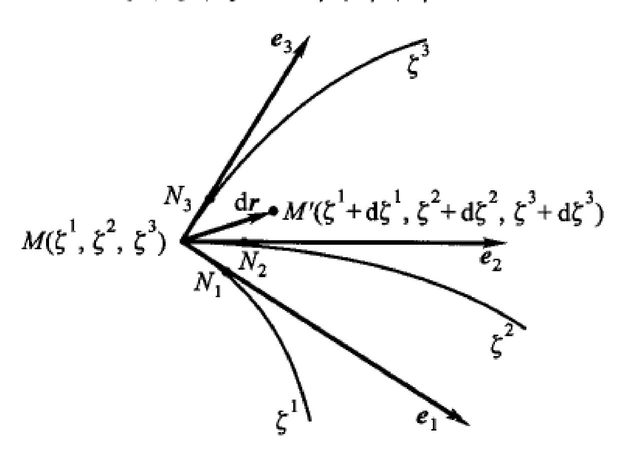


图 9. 基矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$

$$a^{i}{}_{\cdot j}^{\cdot} b^{j}{}_{\cdot k}^{\cdot} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j}\frac{\partial \eta^j}{\partial \zeta^k} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \zeta^k} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

以后将使用克罗内克符号

$$\delta^i_k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

我们有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (\delta^i_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E},$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 显然, 对于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式, 我们有等式

$$|b^{i}{}_{\cdot j}^{\cdot}| = \frac{1}{\Delta}.$$

以上讨论是对三维空间进行的, 但它们对任何 n 维空间都成立, 包括连续介质力学还涉及的一维、二维与四维空间.

我们指出, 上述讨论并不要求引入空间的度规. 空间 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ 可以是非度规空间, 或者具有非常复杂的度规.

基矢量　考虑到叙述的完整性, 也为了强调所采用的观点, 现在我们重复讨论引入基矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的问题. 在坐标系 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ 中考虑坐标为 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ 的点 M 和与之无限邻近的坐标为 $\zeta^1 + \mathrm{d}\zeta^1$, $\zeta^2 + \mathrm{d}\zeta^2$, $\zeta^3 + \mathrm{d}\zeta^3$ 的点 M' (图 9). 引入

一个新的对象

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \overline{MM'},$$

即无限邻近的按一定顺序选取的 2 个点 (具有顺序的 2 个点) M 与 M', 并在图中用箭头表示该对象 $\overline{MM'}$, 它只决定于点 M 与 M' 的坐标. 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 一起再引入另一个对象

$$k\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{4.5}$$

式中 k 为某个数. 如果 $k > 0$, 则对象 $k\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的方向与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 相同; 如果 $k < 0$, 其方向则与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 相反. 从点 M 引坐标线, 并考虑坐标线上的点 N_1, N_2, N_3, 它们分别只对应 $\mathrm{d}\zeta^1, \mathrm{d}\zeta^2, \mathrm{d}\zeta^3$ 中的一个坐标增量. 类似于对象 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, 再引入对象 $\overline{MN_1}, \overline{MN_2}, \overline{MN_3}$, 或者按照 (4.5), 取 $k_i = 1/\mathrm{d}\zeta^i$, 引入对象

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta^i} = \boldsymbol{e_i}.$$

我们称之为基矢量, 其方向与坐标线的切线一致.

在一般情况下, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的方向是任意的. 根据定义, 可以写出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\zeta^1\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}\zeta^2\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}\zeta^3\boldsymbol{e}_3.$$

量 $\mathrm{d}\zeta^1, \mathrm{d}\zeta^2, \mathrm{d}\zeta^3$ 称为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的分量. 显然, 坐标系 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ 的基矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 在该坐标系中的分量总分别是 (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). 基矢量既可以在坐标系 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ 中引入, 也可以在坐标系 η^1, η^2, η^3 中引入, 但同一点的基矢量在不同坐标系中并不相同. 我们把坐标系 η^1, η^2, η^3 的基矢量表示为 $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$, 在该坐标系中有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\eta^j\boldsymbol{e}'_j.$$

显然, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的分量和基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 都与坐标系的选取有关.

坐标系变换时基矢量与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的分量的变换

我们可以把新坐标系 η^1, η^2, η^3 的基矢量 $\boldsymbol{e}'_i$ 用旧坐标系 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ 的基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 表示出来, 现在推导其公式. 我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\eta^j\boldsymbol{e}'_j = \mathrm{d}\zeta^i\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial\zeta^i}{\partial\eta^j}\mathrm{d}\eta^j\boldsymbol{e}_i,$$

由此得

$$\boldsymbol{e}'_j = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial\zeta^i}{\partial\eta^j} = \boldsymbol{e}_i a^{i}_{\cdot j}. \tag{4.6}$$

对于 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的分量, 根据 (4.4), 有关系式

$$\mathrm{d}\eta^i = b^{i}_{\cdot j}\mathrm{d}\zeta^j. \tag{4.7}$$

我们指出, 基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按照 (4.6) 进行变换, 而 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的分量则利用矩阵 $\boldsymbol{A}$

的逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按照 (4.7) 进行变换 (必须注意 (4.6) 与 (4.7) 中角标的位置).

$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 相对于坐标变换的不变性

我们强调, 对象 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 相对于坐标变换是不变的:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\eta^j \boldsymbol{e}'_j = b^{j\cdot}_{\cdot i}\mathrm{d}\zeta^i a^{s\cdot}_{\cdot j}\boldsymbol{e}_s = \mathrm{d}\zeta^i \boldsymbol{e}_i,$$

因为

$$b^{j\cdot}_{\cdot i}a^{s\cdot}_{\cdot j} = \begin{Bmatrix} 1, & i = s \\ 0, & i \neq s \end{Bmatrix} = \delta^s_i.$$

当从一个坐标系变换到另一个坐标系时, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 通过相应坐标系的基矢量与分量的表达式不发生变化, 该表达式相对于坐标系变换是不变的.

协变量与逆变量

类似于基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 按照 (4.6) 进行变换的量称为协变的, 而类似于 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的分量按照 (4.7) 进行变换的量称为逆变的. 应当强调, 协变的量与逆变的量, 其变换是互逆的.

矢量的定义

现在可以按照 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的方式引入对象 $\boldsymbol{A}$, 它通过基矢量表示为:

$$\boldsymbol{A} = A^i \boldsymbol{e}_i,$$

并且其分量 A^i 在坐标变换时像 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的分量那样变换:

$$A'^i = b^{i\cdot}_{\cdot j}A^j.$$

像 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 那样相对于坐标变换不变的对象 $\boldsymbol{A}$ 称为矢量[1]:

$$\boldsymbol{A} = A^j \boldsymbol{e}_j = A'^i \boldsymbol{e}'_i. \tag{4.8}$$

矢量的分量 A^i 的变换与基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 的变换是互逆的, 这保证了矢量 $\boldsymbol{A}$ 的不变性. 基矢量是每个矢量的载体. 在 (4.8) 中, 基矢量的系数在一般情况下是点 M 的数值函数.

矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以具有任何几何的或者物理的本质, 但是它总可以通过基矢量由展开式 (4.8) 给出, 其中的数 (函数) A^i 与坐标系有关. 基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 控制着数 A^i 并创造了一个新的对象——矢量 $\boldsymbol{A}$.

基矢量的并积

可以提出这样的问题: 除了 $\boldsymbol{e}_i$, 能否再引入某些类似于 $\boldsymbol{e}_i$ 的基底对象吗? 它们也通过对一些数的控制, 使我们能够进一步引入一些相对于坐标变换不变、但比矢量更加复杂的概念. 这样的对象是可以引入的, 例如, 它

[1] 更严格地讲, 这样的量称为极矢量, 例如位移、速度、加速度等. 还有一类"矢量", 例如角速度、动量矩、磁场强度等, 其分量的变换方式仅在坐标变换的雅可比行列式为正时才与上述变换方式相同, 这样的量称为轴矢量或伪矢量. 对于雅可比行列式为负的坐标变换 (例如三维空间中的反演变换和镜像变换), 轴矢量分量的变换方式与上述变换方式相差一个因子 -1, 即 $A'^i = -b^{i\cdot}_{\cdot j}A^j$. 详见第四章 §3. ——译注

们可以取为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3,\\&\boldsymbol{E}_4=\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{E}_5=\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{E}_6=\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3,\\&\boldsymbol{E}_7=\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{E}_8=\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{E}_9=\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3,\end{aligned}$$

并考虑

$$\boldsymbol{T}=T^i\boldsymbol{E}_i, \tag{4.9}$$

式中, T^i 是数, 称为 $\boldsymbol{T}$ 在基 $\boldsymbol{E}_i$ $(i=1,2,\cdots,9)$ 中的分量.

基底对象 $\boldsymbol{E}_i$ 称为基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 的并积 (这里指 2 个矢量的并积, 因为每个乘积由 2 个矢量组成; 但也可以引入多个矢量的并积, 对于三维空间中 4 个矢量的并积, 其形式为 $\mathscr{E}_s=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l$, $s=1,2,\cdots,81$). 按照定义, 基矢量的并积是线性无关的, 即等式 $\boldsymbol{T}=0$ 仅当 9 个数 T^i 都等于零时才能成立. 为了方便, 我们直接用记号 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 取代新的记号 $\boldsymbol{E}_k$, 并把等式 (4.9) 写为

$$\boldsymbol{T}=T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j.$$

并乘是矢量的一种运算, 其结果是一个新的对象 (既不是矢量, 也不是标量). 为了定义这种运算, 只要指出其性质即可. 首先, 矢量的顺序在运算中很重要 ($\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\neq\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1$). 此外, 并乘运算按照定义是线性的 (成立分配律, 数值因数可以从乘号中提出). 例如, 成立等式

$$\boldsymbol{e}_i(a\boldsymbol{e}_j+b\boldsymbol{e}_k)=a\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j+b\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k,$$

式中的 a 与 b 是数.

基矢量的并积 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 同基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 本身一样, 都与坐标系有关. 知道 $\boldsymbol{e}_i$ 的变换公式, 并利用并积的线性性质, 易得量 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 的变换公式, 其形式为:

$$\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j=a^{p\cdot}_{\cdot i}a^{q\cdot}_{\cdot j}\boldsymbol{e}_p\boldsymbol{e}_q, \tag{4.10}$$

并积 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 在相应坐标系中的分量可以写为矩阵的形式, 该矩阵的元素中有一个为 1, 其余为 0. 例如, $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ 的分量组成矩阵

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

利用并积可以引入被称为张量的对象. 我们要求 $T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 相对于坐标系变换不变, 即

$$T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=T'^{ij}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j, \tag{4.11}$$

其中 T^{ij} 与 T'^{ij} 属于不同的坐标系. 根据并积的变换规则 (4.10), 由此显然可知 T^{ij}

在坐标系改变时应当按照以下公式进行变换:

$$T'^{ij} = b^{i}_{\cdot\,p} b^{j}_{\cdot\,q} T^{pq}. \tag{4.12}$$

张量的定义 不变的对象 $\boldsymbol{T} = T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 称为二阶张量. 张量分量的角标数目称为张量的阶. 显然, 矢量是一阶张量. 就像矢量 $\boldsymbol{A}$ 那样, 并积的变换 (4.10) 与张量分量的变换 (4.12) 是互逆的, 这保证了张量的不变性.

可以类似于二阶张量那样引入任意阶张量, 例如五阶张量

$$\boldsymbol{T} = T^{ijklm}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m = T'^{ijklm}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\boldsymbol{e}'_l\boldsymbol{e}'_m, \tag{4.13}$$

其中控制着数值 T^{ijklm} 的对象现在是并积 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m$, 其变换类似于 (4.10), 而张量分量的变换则类似于 (4.12).

我们强调, 矢量与张量定义为与坐标变换无关的对象, 而不是仅仅按照给定的规则进行变换的一组分量[1].

由 (4.11) 与 (4.13) 引入的张量分量 T^{ij}, T^{ijklm} 以逆变方式进行变换, 它们称为张量的逆变分量.

对称与反对称张量 在一般情况下, 张量 $\boldsymbol{T}$ 的所有分量各不相同. 若某 2 个角标的位置交换后, 张量 $\boldsymbol{T}$ 相应分量的数值不变, $T^{ijklm} = T^{jiklm}$, 则称张量 $\boldsymbol{T}$ 关于这些角标是对称的. 显然, 根据张量分量的变换规则 (4.12), 张量的对称性相对于坐标变换是不变的. 若某 2 个角标的位置交换后, 张量 $\boldsymbol{T}$ 相应分量的数值的符号发生变化, $T^{ijklm} = -T^{jiklm}$, 则称张量 $\boldsymbol{T}$ 关于这些角标是反对称的. 张量的反对称性相对于坐标变换也是不变的.

取张量 $\boldsymbol{T} = T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$, 令 $T^{*ij} = T^{ji}$, 则对象 $\boldsymbol{T}^* = T^{*ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 也是张量, 且 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^*$ 只对于对称张量才成立.

张量相加 · 张量与数相乘 取 2 个张量 $\boldsymbol{A} = A^{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$ 与 $\boldsymbol{B} = B^{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$, 它们的组合 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = (A^{ijk}+B^{ijk})\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$ 显然也是张量. 这个新的张量 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 称为张量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和. 于是, 利用上述法则可以

---

[1] 我们定义了不变的对象——矢量与张量, 其基底对象与分量在坐标变换 $\eta^i = \eta^i(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ 下利用互逆的矩阵 $(a^{i}_{\cdot\,j}) = (\partial\zeta^i/\partial\eta^j)$ 和 $(b^{i}_{\cdot\,j}) = (\partial\eta^i/\partial\zeta^j)$ 进行变换. 类似地可以引入其他基底对象 $\boldsymbol{\epsilon}_i$, 其变换由其他 (以其他方式与坐标变换相联系的) 矩阵 (A^i_j) 和 (B^i_j) 给出, 并在此基础上建立

$$\boldsymbol{Q} = Q^i\boldsymbol{\epsilon}_i = Q'^j\boldsymbol{\epsilon}'_j, \quad \boldsymbol{P} = P^{ij}\boldsymbol{\epsilon}_i\boldsymbol{\epsilon}_j = P'^{kl}\boldsymbol{\epsilon}'_k\boldsymbol{\epsilon}'_l$$

等相应的不变的对象, 使得

$$\boldsymbol{\epsilon}'_j = A^i_j\boldsymbol{\epsilon}_i, \quad Q'^j = B^j_iQ^i, \quad P'^{kl} = B^k_iB^l_jP^{ij}, \quad A^i_jB^j_k = \delta^i_k.$$

例如在研究正交变换时, 除了矢量与张量, 人们还引入旋量与自旋张量, 其基底对象与分量利用某些 (不同于 $(a^{i}_{\cdot\,j})$ 和$(b^{i}_{\cdot\,j})$ 的) 矩阵 (A^i_j) 与 (B^i_j) 进行变换, 这些矩阵是空间正交变换群的另外一种矩阵表示.

对于变换方式相同的不同基矢量, 在数学上和物理上相同的一组分量可以对应不同的张量.

从给出的张量组成新的张量——它们的和或差. 只有同阶张量才能相加减.

显然, 如果我们有一个张量 $\boldsymbol{A}$ 和与坐标系无关的任何一个数 (标量) k, 则对象 $\boldsymbol{C} = k \cdot \boldsymbol{A}$ 也是张量.

对称化与反对称化运算 任何一个二阶张量 $\boldsymbol{T} = T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 根据张量的加法与用数相乘的法则都可以对应一个对称张量

$$\boldsymbol{T}_0 = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

与一个反对称张量

$$\boldsymbol{T}_1 = \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji})\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j.$$

得到张量 $\boldsymbol{T}_0$ 与 $\boldsymbol{T}_1$ 的运算分别称为对称化与反对称化运算. 若张量 $\boldsymbol{T}$ 是对称的, 则 $\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T}_1 = 0$; 若 $\boldsymbol{T}$ 是反对称的, 则 $\boldsymbol{T}_0 = 0$, $\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{T}$.

我们指出, 一个张量按照定义等于零, 如果其所有分量都等于零.

逆变基矢量变换公式 按照 (4.6) 进行变换的基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 称为协变基矢量. 设我们有某个二阶张量 $\boldsymbol{\varkappa} = \varkappa^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$, 在某个坐标系 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ 中引入

$$\boldsymbol{e}^i = \varkappa^{ij}\boldsymbol{e}_j. \tag{4.14}$$

例如, $\varkappa^{1j}\boldsymbol{e}_j = \varkappa^{11}\boldsymbol{e}_1 + \varkappa^{12}\boldsymbol{e}_2 + \varkappa^{13}\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}^1$ 是 3 个基矢量 $\boldsymbol{e}_j$ 分别乘以数 $\varkappa^{1j}$ 之后的和. 类似地, 在另一个坐标系 η^1, η^2, η^3 中可以引入

$$\boldsymbol{e}'^p = \varkappa'^{pq}\boldsymbol{e}'_q.$$

我们知道 $\varkappa^{pq}$ 的变换公式 (4.12) 与 $\boldsymbol{e}_q$ 的变换公式 (4.6), 由此推出 $\boldsymbol{e}^i$ 的变换公式

$$\boldsymbol{e}'^p = \varkappa'^{pq}\boldsymbol{e}'_q = b^{p}_{\cdot i}b^{q}_{\cdot j}\varkappa^{ij}a^{k}_{\cdot q}\boldsymbol{e}_k = b^{p}_{\cdot i}\varkappa^{ij}\boldsymbol{e}_j = b^{p}_{\cdot i}\boldsymbol{e}^i, \tag{4.15}$$

这里利用了 $b^{q}_{\cdot j}a^{k}_{\cdot q} = \delta^k_j$. 可见矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 以逆变方式进行变换, 它称为逆变基矢量.

这样, 利用任意一个二阶张量 $\boldsymbol{\varkappa}$ 可以引入逆变基矢量 $\boldsymbol{e}^i$. 我们指出, 如果说协变基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 只与坐标系有关的话, 那么逆变基矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 既与坐标系有关, 也与用来构成它们的张量 $\boldsymbol{\varkappa}$ 有关.

张量 $\boldsymbol{\varkappa}$ 的协变分量 知道逆变基矢量 $\boldsymbol{e}^i$, 就可以求出协变基矢量 $\boldsymbol{e}_i$, 也就是可以相对于 $\boldsymbol{e}_i$ 求解 (4.14). 为此必须引入矩阵 $(\varkappa^{ij})$ 的逆矩阵 $(\varkappa_{ij})$, 这要求满足 $\det(\varkappa^{ij}) \neq 0$ 的条件. 从代数学原理可知

$$\varkappa_{ij} = \frac{k_{ji}}{\Delta}, \tag{4.16}$$

式中 k_{ij} 为矩阵 $(\varkappa^{ij})$ 相应元素的代数余子式, $\Delta = \det(\varkappa^{ij})$. 这样, 知道行列式不等于零的矩阵 $(\varkappa^{ij})$, 就可以按照 (4.16) 组成矩阵 $(\varkappa_{ij})$ 并相对于 $\boldsymbol{e}_i$ 求解 (4.14). 在某

坐标系 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ 中有

$$\boldsymbol{e}_j = \varkappa_{ji}\boldsymbol{e}^i. \tag{4.17}$$

类似地, 在另一个坐标系 η^1, η^2, η^3 中有

$$\boldsymbol{e}'_j = \varkappa'_{ji}\boldsymbol{e}'^i.$$

利用已知的 $\boldsymbol{e}_j$ 的变换公式 (4.6) 与 $\boldsymbol{e}^i$ 的变换公式 (4.15), 就得到分量 $\varkappa_{ij}$ 的变换公式. 实际上,

$$\boldsymbol{e}'_j = \varkappa'_{ji}\boldsymbol{e}'^i = a^{i\cdot}_{\cdot j}\boldsymbol{e}_i = a^{i\cdot}_{\cdot j}\varkappa_{ik}\boldsymbol{e}^k = a^{i\cdot}_{\cdot j}a^{k\cdot}_{\cdot s}\varkappa_{ik}\boldsymbol{e}'^s,$$

从而

$$\varkappa'_{ji} = a^{p\cdot}_{\cdot j}a^{q\cdot}_{\cdot i}\varkappa_{pq}. \tag{4.18}$$

可见, 如果组成表达式 $\varkappa_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$, 式中 $\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$ 为逆变基矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 的并积, 它们按照公式

$$\boldsymbol{e}'^i\boldsymbol{e}'^j = b^{i\cdot}_{\cdot k}b^{j\cdot}_{\cdot l}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^l$$

进行变换, 则该表达式是一个与坐标系的选取无关的对象, 因为 $\varkappa_{ij}$ 按协变方式变换, 而并积 $\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$ 按逆变方式变换. 此外, 根据 (4.14), 以及矩阵 $(\varkappa_{ij})$ 是矩阵 $(\varkappa^{ij})$ 的逆矩阵, 有

$$\varkappa_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j = \varkappa^{ip}\varkappa^{jq}\varkappa_{ij}\boldsymbol{e}_p\boldsymbol{e}_q = \varkappa^{qp}\boldsymbol{e}_p\boldsymbol{e}_q.$$

由此可见, 可以把 $\varkappa_{ji}$ 称为前面讨论的二阶张量 $\boldsymbol{\varkappa}$ 在逆变基 $\boldsymbol{e}^i$ 中的协变分量. 为简单起见, 以后我们将认为 $\boldsymbol{\varkappa}$ 是对称张量, 即 $\varkappa^{ij} = \varkappa^{ji}$, 亦即 $\varkappa_{ij} = \varkappa_{ji}$.

任意矢量的协变分量

对于任何矢量 $\boldsymbol{A}$ 显然都可以写出[1)]

$$\boldsymbol{A} = A^j\boldsymbol{e}_j = A^j\varkappa_{ij}\boldsymbol{e}^i = A_i\boldsymbol{e}^i,$$

式中

$$A_i = \varkappa_{ij}A^j. \tag{4.19}$$

由此可见, 矢量 $\boldsymbol{A}$ 的逆变分量 A^j 与逆变基矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 一样, 其角标都利用张量 $\boldsymbol{\varkappa}$ 的协变分量分别按照 (4.19) 与 (4.17) 由上标降为下标. 因此, A_i 也像 $\boldsymbol{e}_i$ 那样按照协变方式进行变换:

$$A'_i = a^{k\cdot}_{\cdot i}A_k;$$

A_i 称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 在逆变基 $\boldsymbol{e}^i$ 中的协变分量. 所以, 对于每个矢量 $\boldsymbol{A}$, 既可以引入利用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 变换的分量 A^i, 它们称为逆变分量, 也可以引入利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变换的分量 A_i, 它们称为协变分量. 在一般情况下, 矢量的协变分量与逆变分量是不同的, $A^j \neq A_j$.

[1)] 注意这里利用了 $\varkappa_{ij}$ 的对称性. ——译注

张量的协变分量与混变分量 对矢量进行的上述讨论可以应用于任意阶张量, 例如, 对于四阶张量可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= T^{ijkl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l = T^{ijkl}\varkappa_{ip}\varkappa_{jq}\varkappa_{km}\varkappa_{ln}\boldsymbol{e}^p\boldsymbol{e}^q\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}^n \\ &= T_{pqmn}\boldsymbol{e}^p\boldsymbol{e}^q\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}^n = T^{ijkl}\varkappa_{jp}\varkappa_{kq}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^p\boldsymbol{e}^q\boldsymbol{e}_l = T^{i\cdot\cdot l}_{\cdot pq\cdot}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^p\boldsymbol{e}^q\boldsymbol{e}_l.\end{aligned} \tag{4.20}$$

分量 T_{pqmn} 称为张量 $\boldsymbol{T}$ 的协变分量, $T^{i\cdot\cdot l}_{\cdot pq\cdot}$ 称为混变分量 (对角标 p, q 是协变的, 对角标 i, l 是逆变的). 混变分量的变换公式为

$$T'^{m\cdot\cdot s}_{\cdot nr\cdot} = T^{i\cdot\cdot l}_{\cdot pq\cdot}b^{m\cdot}_{\cdot i}a^{p\cdot}_{\cdot n}a^{q\cdot}_{\cdot r}b^{s\cdot}_{\cdot l},$$

即变换对下标 n, r 是协变的, 对上标 m, s 是逆变的.

升标与降标 我们看到, 利用张量 $\varkappa$ 可以使任何张量分量的角标上升或下降. 这样的运算称为升标或降标, 例如

$$\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j = T_{ij}\varkappa^{ik}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^j = T^{k\cdot}_{\cdot j}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^j. \tag{4.21}$$

我们得到了张量 $\boldsymbol{T}$ 通过混变分量 $T^{k\cdot}_{\cdot j}$ 的表达式, 它代替了通过协变分量 T_{ij} 的写法. 显然, 降标是利用 $\varkappa_{ij}$ 进行的, 如 (4.20); 升标是利用 $\varkappa^{ij}$ 进行的, 如 (4.21).

我们指出, 只有角标结构相同的张量分量才能相加减. 张量的对称与反对称性质也是对位置相同的角标定义的.

矢量的长度 以上所有讨论都是对任意但固定的空间点进行的. 现在引入空间的度规, 即给出在空间中确定长度的方法. 为了确定矢量的长度, 只要确定基矢量的标积

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = g_{ij}$$

即可, 它在给定点一般能取任意数值. 矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的长度的平方按照定义等于

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2 = \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\zeta^i\,\mathrm{d}\zeta^j\,\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \mathrm{d}\zeta^i\,\mathrm{d}\zeta^j\,g_{ij}, \tag{4.22}$$

任何矢量的长度的平方则等于

$$|\boldsymbol{A}|^2 = A^iA^jg_{ij}.$$

任何矢量的长度都通过其分量与基矢量的标积 g_{ij} 来表示.

长度 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 相对于坐标系的选取不变, 此条件具有以下形式:

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2 = g'_{pq}\,\mathrm{d}\eta^p\,\mathrm{d}\eta^q = g_{ij}\,\mathrm{d}\zeta^i\,\mathrm{d}\zeta^j = g_{ij}a^{i\cdot}_{\cdot p}a^{j\cdot}_{\cdot q}\,\mathrm{d}\eta^p\,\mathrm{d}\eta^q.$$

基本度规张量 由此可知 g_{ij} 具有张量的变换公式: $g'_{pq} = a^{i\cdot}_{\cdot p}a^{j\cdot}_{\cdot q}g_{ij}$. 这样, 根据长度 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 的不变性, 量 g_{ij} 应当视为张量 $\boldsymbol{g} = g_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$ 的协变分量, 该张量称为基本度规张量.

根据标积的定义, 张量 $\boldsymbol{g}$ 是对称张量:

$$g_{ij} = g_{ji}.$$

相对于坐标增量 $\mathrm{d}\zeta^i$ 的二次型 (4.22) 称为基本二次型, 它定义了度规——空间中邻近点之间的距离.

由代数学可知, 任何常系数二次型都可以化为正则形式, 即在每个选定点都可以求出这样的坐标 x^1, x^2, x^3, 使二次型 (4.22) 写为平方和的形式:

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2, \tag{4.23}$$

而张量 $\boldsymbol{g}$ 的矩阵化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们指出, 一般不能在整个空间中完成这种变换, 即无法求出这样的坐标系 x^1, x^2, x^3, 使 (4.22) 在整个空间中都化为 (4.23) 的形式. 如果存在这样的坐标系, 则空间称为欧几里得空间, 反之则称为非欧几里得空间. 对于 n 维空间, 如果利用坐标的实变换能够在整个空间中把 (4.22) 化为 $\mathrm{d}s^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (\mathrm{d}x^i)^2$ 的形式, 式中 $\alpha_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 并且至少有一个 α_i 的符号与其他不同, 则该空间称为伪欧几里得空间.

用张量 $\boldsymbol{g}$ 代替 $\boldsymbol{\varkappa}$ 时协变基与逆变基的相互关系

引入矩阵 (g_{ij}) 的逆矩阵 (g^{ij}), 其元素按照逆变规则变换. 我们将用它代替 $(\varkappa^{ij})$ 来引入逆变基矢量, 这时只要让 $\det(g_{ij}) \neq 0$. 利用 (g^{ij}) 可以引入逆变基矢量 $\boldsymbol{e}^j$:

$$\boldsymbol{e}^j = g^{ij} \boldsymbol{e}_i, \tag{4.24}$$

这里升标已经不是利用任意张量 $\boldsymbol{\varkappa}$ 而是利用基本度规张量 $\boldsymbol{g}$ 进行的. 以后我们将使用由 (g^{ij}) 引入的 $\boldsymbol{e}^i$.

我们来确定标积 $\boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{e}_p$ 的性质. 由 (4.24), 有

$$\boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{e}_p = g^{ij} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_p = g^{ij} g_{ip} = \delta^j_p, \tag{4.25}$$

即 $\boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1$, $\boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$, $\boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$, 等等. 由此可知, 基矢量 $\boldsymbol{e}^1$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 所在平面, 等等. 不难验算, 对于逆变基矢量成立以下公式:

$$\boldsymbol{e}^1 = \frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)}, \quad \boldsymbol{e}^2 = \frac{\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)}, \quad \boldsymbol{e}^3 = \frac{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)}, \tag{4.26}$$

而对于协变基矢量则有公式:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^3}{\boldsymbol{e}^1 \cdot (\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^3)}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{e}^3 \times \boldsymbol{e}^1}{\boldsymbol{e}^1 \cdot (\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^3)}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{e}^1 \times \boldsymbol{e}^2}{\boldsymbol{e}^1 \cdot (\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^3)},$$

式中的符号 $\times$ 表示通常的矢积. 协变基矢量与逆变基矢量的概念是相互的. 在笛卡儿正交坐标系中显然 $\boldsymbol{e}^j = \boldsymbol{e}_j$, 因此, 在这样的坐标系中矢量与张量的协变分量与逆变分量没有区别, 把角标写为上标或下标因而不再重要.

度规张量的混变分量 从 (4.25) 显见, 基本度规张量 $\boldsymbol{g}$ 的混变分量 $g^{i}_{\cdot j}$ 在任何坐标系中都组成单位矩阵:

$$(g^{i}_{\cdot j}) = \begin{pmatrix} g^{1}_{\cdot 1} & g^{1}_{\cdot 2} & g^{1}_{\cdot 3} \\ g^{2}_{\cdot 1} & g^{2}_{\cdot 2} & g^{2}_{\cdot 3} \\ g^{3}_{\cdot 1} & g^{3}_{\cdot 2} & g^{3}_{\cdot 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta^{i}_{j}).$$

张量的不定乘 我们已经认识了张量的某些运算, 现在再给出张量的一种乘法运算. 设有矢量 $\boldsymbol{A} = A^{i}\boldsymbol{e}_{i}$ 与张量 $\boldsymbol{T} = T^{k}_{\cdot j}\,\boldsymbol{e}_{k}\boldsymbol{e}^{j}$, 在形式上组成

$$\boldsymbol{B} = A^{i}T^{k}_{\cdot j}\,\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{k}\boldsymbol{e}^{j},$$

$$\boldsymbol{B}^{*} = A^{i}T^{k}_{\cdot j}\,\boldsymbol{e}_{k}\boldsymbol{e}^{j}\boldsymbol{e}_{i} = T^{ik}A_{j}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{k}\boldsymbol{e}^{j}.$$

显然, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}^{*}$ 都是张量, 但 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}^{*}$. 这种运算产生比初始张量更高阶的张量, 称为张量的不定乘运算, 其结果取决于相乘的顺序. 利用张量的不定乘可以组成任意阶张量 $A^{i}A^{j}A^{k}\cdots\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}\boldsymbol{e}_{k}\cdots$, 但并非所有张量都能表示为矢量的积. 利用不定乘可以引入形如

$$\begin{aligned} \mathscr{D} &= g^{ij}g^{pq}g^{rs}\cdots\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}\boldsymbol{e}_{p}\boldsymbol{e}_{q}\boldsymbol{e}_{r}\boldsymbol{e}_{s}\cdots \\ &= g_{ij}g_{pq}g_{rs}\cdots\boldsymbol{e}^{i}\boldsymbol{e}^{j}\boldsymbol{e}^{p}\boldsymbol{e}^{q}\boldsymbol{e}^{r}\boldsymbol{e}^{s}\cdots = \delta^{i}_{j}\delta^{p}_{q}\delta^{r}_{s}\cdots\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}^{j}\boldsymbol{e}_{p}\boldsymbol{e}^{q}\boldsymbol{e}_{r}\boldsymbol{e}^{s}\cdots \end{aligned}$$

的张量. 显然, 通过克罗内克符号表示的张量 $\mathscr{D}$ 的混变分量在任何坐标系下都相同, 即它们是坐标变换的不变量. 这些分量等于 0 或 1.

张量分量的数目 标量 k 可以视为零阶张量, 用一个数表示 ($3^0 = 1$). 矢量是一阶张量, 在三维空间中具有 3 个分量 ($3^1 = 3$), 而二阶张量具有 $3^2 = 9$ 个分量. 依此类推, 三维空间中的 p 阶张量具有 3^p 个分量, n 维空间中的 r 阶张量则有 n^r 个分量. 有时, 比如当存在对称性时, 张量的独立分量的数目会减少. 例如, 二阶对称张量 ($T_{ij} = T_{ji}$) 只有 6 个独立分量, 二阶反对称张量 ($T_{ij} = -T_{ji}$) 只有 3 个独立分量. 张量对称的概念表示其分量相对于某变换群不变. 例如, 前面给出的张量 $\mathscr{D}$ 的混变分量相对于所有的连续变换群是不变的. 张量 $\mathscr{D}$ 的具有任何角标结构的分量相对于正交变换群是不变的, 因为正交变换群正是由基本度规张量的分量 g_{ij} 是不变量这一条件定义的.

张量的标量不变量 在一般情况下, 张量的分量与坐标系的选取有关, 但是可以提出如下问题: 寻找这样的函数 $\Phi(T^{i}_{\cdot j})$, 其自变量是张量的分量, 但函数本身相对于坐标系的选取不变, 即

$$\Phi(T^{i}_{\cdot j}) = \Phi(T'^{i}_{\cdot j}).$$

张量分量的这种函数称为张量的不变量. 它们是数, 或者是空间点的函数. 正是张量与矢量的分量的这种函数应当与其他不变的对象一起出现在物理定律的数学表述中, 这种数学表述相对于物理现象的描述方法应当是不变的, 例如, 它应当与坐标系

的选取无关. 用类似的方法可以定义若干个张量的分量的不变的函数. 这样的函数称为标量. 我们给出一些简单的规则来组成矢量与张量的不变量. 取矢量

$$\boldsymbol{A} = A^i \boldsymbol{e}_i = A_j \boldsymbol{e}^j = A^i g_{ij} \boldsymbol{e}^j$$

并组成标积

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = A^i A^j \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = A^i A^j g_{ij} = A^i A_i.$$

所得表达式就是不变量 (矢量 $\boldsymbol{A}$ 的长度的平方), 因为矢量的异名分量的变换是互逆的. 矢量只有 1 个独立的不变量——它的长度, 所有其他不变量都是它的函数.

现在取任意二阶张量

$$\boldsymbol{T} = T^{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$$

并与度规张量组成对 2 个角标的缩并 $T^{ij} g_{ij}$ (按上标与下标求和的运算称为缩并), 就得到一个与坐标系无关的数, 因为带上标的分量与带下标的分量, 其变换是互逆的. 可以写出

$$T^{ij} g_{ij} = T^{i\cdot}_{\cdot i} = T^{1\cdot}_{\cdot 1} + T^{2\cdot}_{\cdot 2} + T^{3\cdot}_{\cdot 3}. \tag{4.27}$$

缩并

$$T^{i\cdot}_{\cdot j} T^{j\cdot}_{\cdot i}, \quad T^{i\cdot}_{\cdot j} T^{j\cdot}_{\cdot p} T^{p\cdot}_{\cdot i} \tag{4.28}$$

也是不变量. 这样, 对于二阶张量, 我们得到了 3 个不变量, 它们相对于分量是线性的、二次的和三次的. 下面将证明, 对于在实际应用中特别重要的二阶对称张量, 所有其他标量不变量都是这 3 个不变量的函数.

二阶对称张量的张量面

取任意点 O 及其邻近点 M, 从点 O 引坐标线 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$, 考虑矢量

$$\overline{OM} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\zeta^i \boldsymbol{e}_i$$

与对称张量

$$\boldsymbol{T} = T^{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = T_{ij} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j.$$

显然 $T_{ij}\,\mathrm{d}\zeta^i\,\mathrm{d}\zeta^j$ 是不变量, 我们可以取

$$T_{ij}\,\mathrm{d}\zeta^i\,\mathrm{d}\zeta^j = T'_{ij}\,\mathrm{d}\eta^i\,\mathrm{d}\eta^j = c, \tag{4.29}$$

式中 c 为某个数. 在点 O 的邻域内, 当 c 固定而 T_{ij} 取它在点 O 的值时, 方程 (4.29) 确定了一个称为张量面的二次曲面, 而微分 $\mathrm{d}\zeta^i$ 或 $\mathrm{d}\eta^i$ 则视为张量面上点的坐标. 每个二阶对称张量在每一点都可以与二次曲面 (4.29) 相对应.

二阶对称张量的主轴与主分量

我们知道, 利用坐标变换可以把这个二次曲面的方程化为正则形式, 即在点 O 可以选取坐标系 x^1, x^2, x^3, 使 (4.29) 化为

$$T_{11}(\mathrm{d}x^1)^2 + T_{22}(\mathrm{d}x^2)^2 + T_{33}(\mathrm{d}x^3)^2 = c.$$

在这样引入的坐标系 x^1, x^2, x^3 中存在正交坐标系, 因此在空间每一点都可以引入这样的正交坐标轴, 使二阶对称张量在该点只有 3 个分量 T_{11}, T_{22}, T_{33} 不等于零. 这样的坐标轴称为张量的主轴, 而坐标轴沿主轴方向的笛卡儿坐标系 ($g_{ii}=1$, 当 $i \neq j$ 时 $g_{ij}=0$) 称为张量 $\boldsymbol{T}$ 在点 O 的主坐标系. 显然, 协变分量与逆变分量之间的差别在主坐标系中消失了:

$$T^{ii} = T_{ii} = T^{i}{}_{\cdot i} = T_i$$

(式中对 i 不求和). 在主坐标系中, 张量的 3 个分量一般互不相等且不等于零, 它们称为张量的主分量. 对称张量的主轴与主分量的求法参见 109—110 页.

关于二阶对称张量分量的独立不变量数目的问题, 现在很容易就能回答了. 在主坐标系中, 所有不变量应当只是 3 个分量的函数, 所以独立不变量的数目不能超过 3. 由不变量 (4.27), (4.28) 在主坐标系中的写法可知, 前面得到的所有 3 个不变量都是独立的.

以后还需要张量分析的许多知识, 我们将在必要时加以叙述.

§5. 变形理论

设刚体相对于观察者所用坐标系 x^1, x^2, x^3 运动 (图 10), 取它在初始时刻 t_0 和任意某个时刻 t 的两个位置.

随体坐标系的基矢量依赖于时间

物体的每一点 M 都可以与随体坐标系 ξ^1, ξ^2, ξ^3 相联系. 随体坐标系与物体一起运动, 其基矢量在时刻 t_0 与时刻 t 是不同的. 我们用 $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$ 表示 t_0 时刻的基矢量, 用 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 表示 t 时刻的基矢量. 显然, 随体坐标系的基矢量一般而言与物体的点 M 有关, 而且还随时间变化. 此外, 如果坐标系 ξ^1, ξ^2, ξ^3 被冻结在介质中, 而介质像刚体那样运动, 则通过平动与旋转就能从三面体 $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$ 得到三面体 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$, 这时

$$|\mathring{\boldsymbol{e}}_i| = |\hat{\boldsymbol{e}}_i|, \quad \angle \mathring{\boldsymbol{e}}_i \mathring{\boldsymbol{e}}_j = \angle \hat{\boldsymbol{e}}_i \hat{\boldsymbol{e}}_j,$$

即

$$\mathring{\boldsymbol{e}}_i \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j.$$

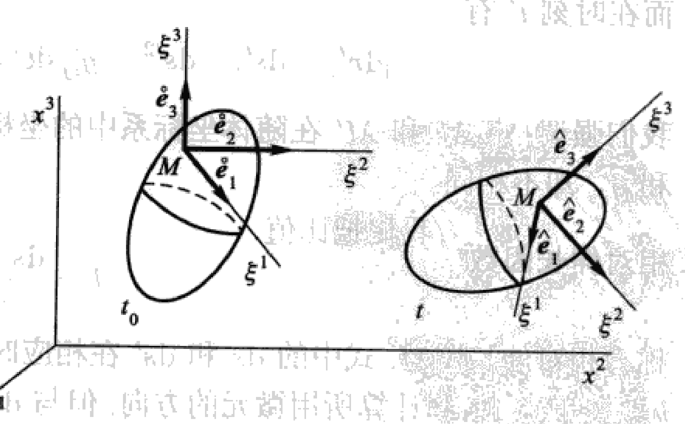


图 10. 刚体的运动

可变形体的运动则比较复杂. 事实上, 在可变形体运动时, 其点 M 与 M' 之间的距离发生变化, 所以随体坐标系的坐标线发生变形, 基矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 随时间而变化, 其大小与夹角都会改变.

连续介质诸点之间的距离在运动中会发生变化, 这一效应非常重要. 比如, 我们

指出, 介质微元之间的相互作用力就可能与它们之间的距离有关.

考虑可变形体在任意时刻 t 与 t' 的任意两个位置, 比如, 考虑它的点 M 与 M' 在这些时刻的位置 (图 11). 点 M 的基矢量在时刻 t' 表示为 $\boldsymbol{e}'_i$, 在时刻 t 表示为 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$. 显然, 在随体坐标系中

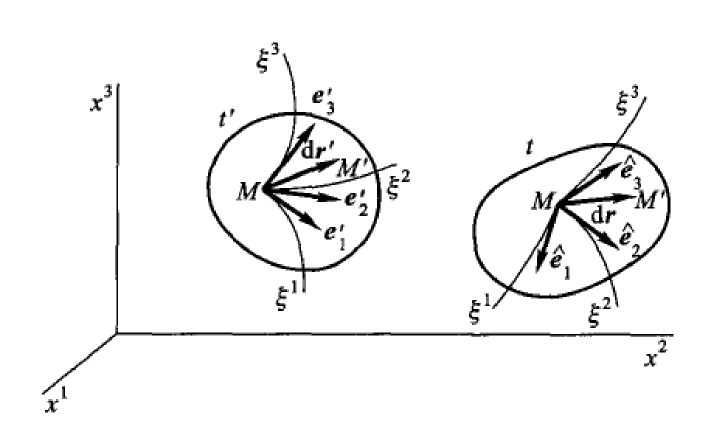


图 11. 可变形介质的运动

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\xi^i \hat{\boldsymbol{e}}_i, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \mathrm{d}\xi^i \boldsymbol{e}'_i.$$

我们想研究表征距离变化的特征量, 所以必须引入随体坐标系在时刻 t 和 t' 的度规张量.

但是在引入度规之前我们指出, 任何一条由点 M 出发的无穷小线段, 在连续介质的运动过程中都变为由该点 M 的对应点出发的无穷小线段.

其实, t 时刻的连续介质微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在时刻 t' 对应 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$, 同时还可以在时刻 t 引入连续介质微元 $k\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, 式中 k 为某个数. 在时刻 t', 这个微元对应空间 ξ^1, ξ^2, ξ^3 中的 $k\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$, 因为在这个空间中, 连续介质所有点的拉格朗日坐标保持不变, 于是应当成立按基矢量 $\boldsymbol{e}'_i$ 的分解式

$$k\,\mathrm{d}\xi^i\,\boldsymbol{e}'_i = k\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}'.$$

对于给定的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, 当 k 取不同的有限值时, 微元 $k\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在时刻 t 确定了一条自点 M 出发的线段微元, 与之对应的正是 t' 时刻在空间 ξ^1, ξ^2, ξ^3 中的线段微元 $k\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$.

现在引入随体坐标系空间在时刻 t 与 t' 的度规. 设在时刻 t 有

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}s^2 = \hat{g}_{ij}\,\mathrm{d}\xi^i\,\mathrm{d}\xi^j, \quad \hat{g}_{ij} = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j, \tag{5.1}$$

而在时刻 t' 有

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}'| = \mathrm{d}s', \quad \mathrm{d}s'^2 = g'_{ij}\,\mathrm{d}\xi^i\,\mathrm{d}\xi^j, \quad g'_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j. \tag{5.2}$$

我们强调, 点 M 和 M' 在随体坐标系中的坐标在时刻 t 和 t' 是不变的, 但分量 $\hat{g}_{ij}$ 和 g'_{ij} 却不相同.

相对伸长因数　我们把比值

$$l = \frac{\mathrm{d}s - \mathrm{d}s'}{\mathrm{d}s'} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'} - 1$$

称为相对伸长因数, 式中的 $\mathrm{d}s$ 和 $\mathrm{d}s'$ 在相应时刻通过连续介质的相同物质点. 因数 l 取决于点 M 和计算所用微元的方向, 但与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的长度无关. 如果 l 在可变形介质的每个点与每个方向都是无穷小量, 变形就称为无穷小的. 如果 l 取有限值, 变形就是有限的. 根据定义, 刚体的所有因数 l 都等于零.

我们注意到, 只要考虑连续介质完全任意的两个位置, 就可以引入变形与相对伸长因数 l, 并且只要知道 $\hat{g}_{ij}$, g'_{ij} 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的方向, 就可以对任何 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 计算 l.

应变张量 引入记号

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - g'_{ij}). \tag{5.3}$$

根据 (5.1) 与 (5.2), 有

$$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}s'^2 = 2\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}\xi^i\,\mathrm{d}\xi^j.$$

由此可见, ε_{ij} 可以视为张量的协变分量. 我们知道, 利用任何二阶张量 $\boldsymbol{\varkappa}$ 可以由某个张量的协变分量组成其逆变分量. 在度规空间中, 我们规定使用基本度规张量 $\boldsymbol{g}$ 来代替张量 $\boldsymbol{\varkappa}$. 在这里, 可以利用 g'^{ij} 或者 $\hat{g}^{ij}$ 来升标, 所以由协变分量 ε_{ij} 可以组成两组不同的逆变分量: $\hat{\varepsilon}^{ij}$ (用 $\hat{g}^{ij}$ 升标) 与 ε'^{ij} (用 g'^{ij} 升标). 这表示可以组成两个不同的张量:

$$\hat{\mathscr{E}} = \varepsilon_{ij}\hat{e}^i\hat{e}^j, \quad \mathscr{E}' = \varepsilon_{ij}e'^i e'^j,$$

它们具有相同的协变分量 (5.3), 但对应不同的基 $\hat{e}^i$ 与 e'^i. 这两个张量都称为应变张量[1]. 张量 $\hat{\mathscr{E}}$ 和 $\mathscr{E}'$ 的逆变分量与混变分量是不同的, 我们分别用 $\hat{\varepsilon}^{ij}$, ε'^{ij} 与 $\hat{\varepsilon}^{i}{}_{\cdot j}$, $\varepsilon'^{i}{}_{\cdot j}$ 来表示它们. 混变分量 $\varepsilon'^{i}{}_{\cdot j} \neq \hat{\varepsilon}^{i}{}_{\cdot j}$, 因为 $\varepsilon'^{i}{}_{\cdot j} = \varepsilon_{pj}g'^{pi}$, $\hat{\varepsilon}^{i}{}_{\cdot j} = \varepsilon_{pj}\hat{g}^{pi}$, 而 $g'^{pi} \neq \hat{g}^{pi}$.

应变张量是表征物体发生变形的基本特征量, 其分量出现在描述连续介质运动的基本方程中.

初始状态与"初始状态" 显然, 在我们所关心的时刻 t, 变形的大小不仅与物体的当前状态有关, 还关系到这些变形是相对于哪个状态计算的. 如果我们想得到表征变形的确定的物理量, 应当怎样选择这个状态呢? 显然, 此状态不可能是完全任意的, 它应当由具体的物理方法来确定. 我们注意到, 这个状态可以用不同方法来确定, 并且现在在变形理论中, 我们也将不去固定确定该状态的方法, 而只是把用某种方法选定的用于与连续介质当前状态进行比较的状态称为初始状态. 我们仅仅指出, 这时可能遇到以下情形: 该初始状态不一定能够在实际中实现. 例如, 可以把这样的通过想象而引入的状态当作初始状态, 此时每个连续介质微元的结构都是有序的, 微元处于一种不受任何力作用的自然状态. 我们把这种通过想象而引入的初始状态下的度规表示为 $\mathring{g}_{ij}$, 把初始状态下随体坐标系的基矢量表示为 $\mathring{e}_i$. 显然, 用这种方法引入的度规可能是非欧几里得度规. 连续介质的真实运动是在欧几里得空间中进行的, 因此在一般情况下, 连续介质从初始状态到当前状态的这种转变在实际中可能无法实现. 这种理想化的假想的"初始状态"(带引号) 可以用来估计度规的变化并引入应变张量.

我们以二维欧几里得空间中的 (即平面上的) 运动为例, 对上述内容加以解释. 考虑某个薄膜在平面上的运动, 薄膜在不受任何力作用时的状态取为初始状态. 设薄膜沿边缘受到拉伸, 并且正是因为这种拉伸, 薄膜才是平的. 如果去掉拉伸作用力, 薄膜就会翘起并布满褶皱; 尽管它还将是二维的, 但不会再是平的. 对于当前时刻的

---

[1] $\hat{\mathscr{E}}$ 与 $\mathscr{E}'$ 通常分别称为阿尔曼西应变张量与格林应变张量. ——译注

平的薄膜与 (去掉所有对它的拉伸作用力之后) 翘起的有褶皱的薄膜, 可以建立起它们的点之间的一一对应关系, 但为此一般要进入三维空间. 如果停留在二维空间, 同时还保持空间的欧几里得度规, 这是做不到的. 所以, 对比薄膜在二维欧几里得空间中的运动, 它在不受拉伸力作用时翘起的状态只能看作是"初始状态"(带引号). 这样, 如果按照某种物理方法引入的初始状态作为连续介质的状态既可以通过想象而达到, 也可以通过某种运动在实际中实现, 那么该初始状态就可以定义为不带引号的初始状态. 如果通过想象而引入的用于比较的状态不能在相同的空间中通过介质的连续运动而达到, 这就是"初始状态"(带引号 !).

分量 $\mathring{g}_{ij}$ 在一般情况下可以与 ξ^1, ξ^2, ξ^3 和 t 有关. 如果假想的"初始状态"是固定的, $\mathring{g}_{ij}$ 就只与 ξ^1, ξ^2, ξ^3 有关.

应变张量的协变分量的几何意义 现在解释应变张量 $\hat{\mathscr{E}} = \varepsilon_{ij}\hat{e}^i\hat{e}^j$ 与 $\mathring{\mathscr{E}} = \varepsilon_{ij}\mathring{e}^i\mathring{e}^j$ 的协变分量的几何意义. 我们把度规张量的分量写为以下形式:

$$\hat{g}_{ij} = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = |\hat{\boldsymbol{e}}_i| \cdot |\hat{\boldsymbol{e}}_j| \cos\psi_{ij}, \tag{5.4}$$

$$\mathring{g}_{ij} = \mathring{\boldsymbol{e}}_i \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_j = |\mathring{\boldsymbol{e}}_i| \cdot |\mathring{\boldsymbol{e}}_j| \cos\mathring{\psi}_{ij}, \tag{5.5}$$

式中 ψ_{ij} 为矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 与 $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ 之间的夹角, $\mathring{\psi}_{ij}$ 为 $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$ 与 $\mathring{\boldsymbol{e}}_j$ 之间的夹角. 作比值

$$\frac{|\hat{\boldsymbol{e}}_i|}{|\mathring{\boldsymbol{e}}_i|} = \frac{|\partial \boldsymbol{r}/\partial\xi^i|}{|\partial \boldsymbol{r}_0/\partial\xi^i|} = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i|}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{0i}|} = \frac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}s_{0i}} = l_i + 1, \tag{5.6}$$

式中 $\mathrm{d}s_i$ 与 $\mathrm{d}s_{0i}$ 为坐标线 ξ^i 的线微元, l_i 为沿 ξ^i 方向的相对伸长因数. 现在利用 (5.6), 从 (5.4) 可得

$$\hat{g}_{ij} = |\mathring{\boldsymbol{e}}_i| \cdot |\mathring{\boldsymbol{e}}_j|(1 + l_i)(1 + l_j) \cos\psi_{ij}. \tag{5.7}$$

取连续介质在时刻 t' 的状态为初始状态或"初始状态" $\mathring{g}_{ij}$, 利用 (5.5), (5.7) 和 (5.3), 得公式

$$2\varepsilon_{ij} = [(1 + l_i)(1 + l_j) \cos\psi_{ij} - \cos\mathring{\psi}_{ij}]|\mathring{\boldsymbol{e}}_i| \cdot |\mathring{\boldsymbol{e}}_j|, \tag{5.8}$$

它们可以方便地给出 ε_{ij} 的几何解释.

首先讨论 ε_{ij} 在角标相同时的几何解释. 由 (5.8) 有

$$2\varepsilon_{ii} = [(1 + l_i)^2 - 1]\mathring{g}_{ii},$$

从而

$$l_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{\mathring{g}_{ii}}} - 1. \tag{5.9}$$

如果变形很小, 则 ε_{ij} 很小. 把 (5.9) 展开为级数, 得

$$l_i \approx \frac{\varepsilon_{ii}}{\mathring{g}_{ii}}.$$

此外, 如果把初始状态的随体坐标系取为笛卡儿坐标系, 则 $\mathring{g}_{ii}=1$, 所以

$$l_i \approx \varepsilon_{ii},$$

即在无穷小变形的情形下, 应变张量的协变分量在角标相同时等于沿初始状态的笛卡儿坐标轴方向的相对伸长因数.

再考虑分量 ε_{ij} 在角标不同 $(i \neq j)$ 时的几何解释. 为简单起见, 在"初始状态", 我们在给定点选取这样的坐标系, 使 $\mathring{e}_i$ 互相垂直, 即 $\mathring{\psi}_{ij}=\pi/2$. 那么, 令

$$\psi_{ij}=\frac{\pi}{2}-\chi_{ij},$$

从 (5.4), (5.5) 和 (5.3) 得

$$2\varepsilon_{ij}=|\hat{e}_i|\cdot|\hat{e}_j|\sin\chi_{ij},$$

或

$$\sin\chi_{ij}=\frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{\hat{g}_{ii}\hat{g}_{jj}}}. \tag{5.10}$$

由此可见, 在一般情况下, 在"初始状态"下的直角在变形后不再是直角, 协变分量 ε_{ij} 在角标不同 $(i \neq j)$ 时表征初始坐标轴之间所成直角的倾斜. 如果变形是无穷小的, 并且在初始状态下的坐标系是笛卡儿坐标系, 则 $\mathring{g}_{ii}=1$, $\hat{g}_{ii}\approx 1$ (相差无穷小量). 利用级数展开, 易得

$$\sin\chi_{ij}\approx 2\varepsilon_{ij},$$

或

$$\chi_{ij}\approx 2\varepsilon_{ij}.$$

应变张量的主轴 包括应变张量在内的每个对称张量都可以与二次型 $\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}\xi^i\,\mathrm{d}\xi^j$ 相联系. 正如在 §4 中所指出的, 在每一点都可以求出这样的正交坐标系 η^1,η^2,η^3, 使二次型 $\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}\xi^i\,\mathrm{d}\xi^j$ 化为

$$\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}\xi^i\,\mathrm{d}\xi^j=\varepsilon'_{11}(\mathrm{d}\eta^1)^2+\varepsilon'_{22}(\mathrm{d}\eta^2)^2+\varepsilon'_{33}(\mathrm{d}\eta^3)^2.$$

从 ξ^i 到 η^i 的变换取决于分量 ε_{ij}, 所以在运动过程中, 相应的正交三面体 η^i 在不同时刻一般是不同的. 在空间 $\mathring{g}_{ij}$ 中取这样的轴 η^1,η^2,η^3, 它们将随着运动在空间 $\hat{g}_{ij}$ (随体坐标系) 中变换到相应的轴 η^1,η^2,η^3, 我们来证明 $\hat{e}_i$ 仍然互相垂直. 实际上, 对这样的轴 η^1,η^2,η^3 来说, 分量 ε'_{ij} 在 $i\neq j$ 时等于零, 因此, 根据 (5.10), $\chi_{ij}=0$, 即轴 η^1,η^2,η^3 还是正交的. 这样, 对于变量 η^1,η^2,η^3, 空间 $\mathring{g}_{ij}$ 和 $\hat{g}_{ij}$ 中的坐标轴三面体分别与 $\mathring{\mathscr{E}}$ 和 $\hat{\mathscr{E}}$ 的主轴三面体重合. 在这些变量下, 矩阵

$$(\mathring{g}_{ij}),\ (\hat{g}_{ij}),\ (\mathring{g}^{ij}),\ (\hat{g}^{ij}),\ (\varepsilon_{ij}),\ (\mathring{\varepsilon}^{i}_{\cdot j}),\ (\mathring{\varepsilon}^{ij}),\ (\hat{\varepsilon}^{i}_{\cdot j}),\ (\hat{\varepsilon}^{ij})$$

同时化为对角形式. 在初始状态下由主轴组成的正交三面体经过给定的位移后仍然正交, 主轴之间的夹角不发生变化, 但是, 主轴正交三面体可以像刚体那样进行平动

和旋转运动. 我们指出, 沿主轴的微元 $d\boldsymbol{r}$ 在运动中可以缩短或伸长. 我们强调, 应变张量主轴的概念在这里是对任意的有限变形而引入的. 应变张量 $\hat{\mathscr{E}}$ 与 $\mathring{\mathscr{E}}$ 的主轴在相应空间中经过介质的相同物质点.

应变张量的主分量 在时刻 t, 沿应变张量的主轴 η^1, η^2, η^3 有

$$ds_i^2 = \hat{g}_{ii}(d\eta^i)^2 \tag{5.11}$$

(对 i 不求和), 并且对于任意方向的微元 $d\boldsymbol{r}$, 其长度的平方在主轴下可以表示为

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2.$$

类似地, 在初始状态有,

$$ds_{0i}^2 = \mathring{g}_{ii}(d\eta^i)^2 \tag{5.12}$$

(对 i 不求和), 并且

$$ds_0^2 = ds_{01}^2 + ds_{02}^2 + ds_{03}^2.$$

这样沿主轴取的微元 ds_i 和 ds_{0i} 可以分别视为在当前状态和初始状态下在给定点邻域中的普通的笛卡儿坐标 (这时坐标 ds_i 和 ds_{0i} 沿不同主轴的尺度分别相同). 在观察者所在空间中, 坐标系 $ds_{01}, ds_{02}, ds_{03}$ 和 ds_1, ds_2, ds_3 一般是不同的.

利用 (5.11), (5.12) 和应变张量协变分量的定义 (5.3), 易得

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\sum_i \frac{\varepsilon'_{ii}}{\hat{g}_{ii}} ds_i^2 = 2\sum_i \frac{\varepsilon'_{ii}}{\mathring{g}_{ii}} ds_{0i}^2, \tag{5.13}$$

这里 ε'_{ii} 中的撇号表示应变张量的协变分量是在主轴下取的. 矩阵 $(\mathring{g}_{ij})$ 和 $(\hat{g}_{ij})$ 在主轴下具有对角形式, 所以其逆矩阵 $(\mathring{g}^{ij})$ 和 $(\hat{g}^{ij})$ 在主轴下也具有对角形式, 并且 $\mathring{g}^{ii} = 1/\mathring{g}_{ii}$, $\hat{g}^{ii} = 1/\hat{g}_{ii}$. 因此, (5.13) 中的比值 $\varepsilon'_{ii}/\mathring{g}_{ii}$ 和 $\varepsilon'_{ii}/\hat{g}_{ii}$ 分别等于 $\varepsilon'_{ii}\mathring{g}^{ii} = \mathring{\varepsilon}^{i}{}_{\cdot i} = \mathring{\varepsilon}_i$ 和 $\varepsilon'_{ii}\hat{g}^{ii} = \hat{\varepsilon}^{i}{}_{\cdot i} = \hat{\varepsilon}_i$ (在这两个表达式中对 i 不求和), 故它们是应变张量在相应主轴下的混变分量. 现在可以把式 (5.13) 写为

$$ds^2 - ds_0^2 = 2(\hat{\varepsilon}_1 ds_1^2 + \hat{\varepsilon}_2 ds_2^2 + \hat{\varepsilon}_3 ds_3^2) = 2(\mathring{\varepsilon}_1 ds_{01}^2 + \mathring{\varepsilon}_2 ds_{02}^2 + \mathring{\varepsilon}_3 ds_{03}^2).$$

这样, 连续介质的每个点都可以与普通的笛卡儿正交坐标系 s_{01}, s_{02}, s_{03} 和 s_1, s_2, s_3 相关联, 前者的坐标轴因介质运动而移动至后者的坐标轴的位置. 因为它们是笛卡儿正交坐标系, 所以角标的位置 (上或下) 在这些坐标系中无关紧要. 应变张量在这些坐标系中的相应分量 $\mathring{\varepsilon}_i$ 和 $\hat{\varepsilon}_i$ 就是主分量.

应变张量 $\hat{\mathscr{E}}, \mathring{\mathscr{E}}$ 的主分量之间的关系 应变张量 $\hat{\mathscr{E}}$ 与 $\mathring{\mathscr{E}}$ 具有不同的主分量, 即 $\hat{\varepsilon}_i \neq \mathring{\varepsilon}_i$, 但 $\hat{\varepsilon}_i$ 与 $\mathring{\varepsilon}_i$ 之间存在着联系. 我们来建立这一联系. 由 (5.13), 对于沿第 i 个主轴取的方向 $d\boldsymbol{r}_i$, 有

$$ds_i^2 - ds_{0i}^2 = 2\hat{\varepsilon}_i ds_i^2,$$

从而

$$2\hat{\varepsilon}_i = 1 - \frac{ds_{0i}^2}{ds_i^2}. \tag{5.14}$$

类似地有

$$ds_i^2 - ds_{0i}^2 = 2\mathring{\varepsilon}_i\, ds_{0i}^2, \tag{5.15}$$

$$2\mathring{\varepsilon}_i = \frac{ds_i^2}{ds_{0i}^2} - 1. \tag{5.16}$$

由式 (5.14) 和 (5.16) 可见 $\hat{\varepsilon}_i \neq \mathring{\varepsilon}_i$, 此外, 从它们易得

$$2\hat{\varepsilon}_i = 1 - \frac{1}{1 + 2\mathring{\varepsilon}_i} = \frac{2\mathring{\varepsilon}_i}{1 + 2\mathring{\varepsilon}_i}. \tag{5.17}$$

这就是我们想建立的张量 $\hat{\boldsymbol{\mathscr{E}}}$ 与 $\mathring{\boldsymbol{\mathscr{E}}}$ 的主分量之间的关系. 我们再来确定沿主轴方向的相对伸长因数 $l_i = (ds_i - ds_{0i})/ds_{0i}$ 与应变张量的主分量之间的联系. 由 (5.14) 得

$$l_i = \sqrt{\frac{1}{1 - 2\hat{\varepsilon}_i}} - 1. \tag{5.18}$$

类似地, 由 (5.16) 得

$$l_i = \sqrt{1 + 2\mathring{\varepsilon}_i} - 1. \tag{5.19}$$

公式 (5.18) 和 (5.19) 对有限变形成立. 如果变形是无穷小的, 则应变张量 $\hat{\boldsymbol{\mathscr{E}}}$ 与 $\mathring{\boldsymbol{\mathscr{E}}}$ 的分量也是小量, 于是按级数展开后, 从 (5.18) 和 (5.19) 得

$$l_i = \hat{\varepsilon}_i = \mathring{\varepsilon}_i,$$

即在无穷小变形的情况下, 沿主轴的相对伸长因数既等于当前空间中应变张量 $\hat{\boldsymbol{\mathscr{E}}}$ 的主分量, 也等于初始空间中应变张量 $\mathring{\boldsymbol{\mathscr{E}}}$ 的主分量.

张量主分量的求法 现在我们回忆应变张量的主分量的求法. 为简洁起见, 取矩阵

$$\boldsymbol{C} = (c^i_{\cdot j}) = (\lambda\delta^i_j - \varepsilon^i_{\cdot j}),$$

我们将把它理解为矩阵 $(\lambda\delta^i_j - \mathring{\varepsilon}^i_{\cdot j})$ 或矩阵 $(\lambda\delta^i_j - \hat{\varepsilon}^i_{\cdot j})$, 式中 λ 为某数值参数. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 在主轴下形如

$$\boldsymbol{C}^* = \begin{pmatrix} \lambda - \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

如果取 $\det \boldsymbol{C}^*$ 并令它等于零, 显然就得到 λ 的三次方程

$$(\lambda - \varepsilon_1)(\lambda - \varepsilon_2)(\lambda - \varepsilon_3) = 0, \tag{5.20}$$

其展开形式为

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0.$$

这个方程的根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 就是相应的应变张量的主分量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. 只要在主坐标系 η^1, η^2, η^3 中组成 (5.20), 就可以用这种方法求解.

取不同于主坐标系的任意坐标系 ξ^1, ξ^2, ξ^3, 并在该坐标系中组成矩阵 $\boldsymbol{C}$. 考虑从 η^1, η^2, η^3 到 ξ^1, ξ^2, ξ^3 的变换. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素为两个张量的分量之差, 所以也是张量的分量. 根据张量混变分量的变换公式, 得

$$\boldsymbol{C}' = (c^{p}_{\cdot q} b^{i}_{\cdot p} a^{q}_{\cdot j}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}.$$

由此可见, $\det \boldsymbol{C}' = \det \boldsymbol{C}$, 所以方程 (5.20) 或者

$$\det(\lambda \delta^i_j - \varepsilon^{i}_{\cdot j}) = 0 \tag{5.21}$$

相对于坐标系的选择是不变的, 应变张量的主分量总是由它的根来确定. 在 (5.21) 中, 如果用 $\hat{\varepsilon}^{i}_{\cdot j}$ 替换 $\varepsilon^{i}_{\cdot j}$, 就得到根 $\hat{\varepsilon}_i$; 如果用 $\mathring{\varepsilon}^{i}_{\cdot j}$ 代替 $\varepsilon^{i}_{\cdot j}$, 就得到根 $\mathring{\varepsilon}_i$. 方程 (5.21) 称为特征方程. 众所周知, 对于对称张量, 该方程总有 3 个实根. 特征方程 (5.20) 的系数是相对于坐标变换的不变量, 因为它们完全决定于方程的根, 即应变张量的主值. 展开 (5.20) 或 (5.21), 得 I_1, I_2, I_3 的公式:

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon^{\alpha}_{\cdot \alpha}, \\ I_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = \frac{1}{2}[(\varepsilon^{\alpha}_{\cdot \alpha})^2 - \varepsilon^{\alpha}_{\cdot \beta}\varepsilon^{\beta}_{\cdot \alpha}], \\ I_3 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \det(\varepsilon^{i}_{\cdot j}). \end{aligned} \tag{5.22}$$

这样, 为了求出应变张量的主分量, 应当在给定的坐标系 ξ^1, ξ^2, ξ^3 中组成系数由 (5.22) 给出的特征方程 (5.21), 并求它的根.

我们把张量 $\mathring{\mathscr{E}}$ 与 $\hat{\mathscr{E}}$ 的不变量 I_1, I_2, I_3 分别表示为 $\mathring{I}_1, \mathring{I}_2, \mathring{I}_3$ 与 $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$. 显然, 不变量 $\mathring{I}_1, \mathring{I}_2, \mathring{I}_3$ 可以通过 $\mathring{\varepsilon}_1, \mathring{\varepsilon}_2, \mathring{\varepsilon}_3$ 来表示, 而 $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$ 可以通过 $\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_3$ 来表示, 又因为 $\mathring{\varepsilon}_i \neq \hat{\varepsilon}_i$, 所以 $\mathring{I}_i \neq \hat{I}_i$. 主分量 $\mathring{\varepsilon}_i$ 与 $\hat{\varepsilon}_i$ 之间有联系, 所以不变量 $\mathring{I}_i$ 与 $\hat{I}_i$ 之间也有联系. 在无穷小变形的情况下, $\mathring{\varepsilon}_i = \hat{\varepsilon}_i$, 不变量 $\mathring{I}_i$ 与 $\hat{I}_i$ 相等. 当变形有限时, 利用 (5.17) 和 (5.22) 易求不变量 $\mathring{I}_i$ 与 $\hat{I}_i$ 之间的以下关系:

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3 = \frac{\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 12\mathring{I}_3}{1 + 2\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 8\mathring{I}_3}, \\ \hat{I}_2 &= \hat{\varepsilon}_1\hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_2\hat{\varepsilon}_3 + \hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_1 = \frac{\mathring{I}_2 + 6\mathring{I}_3}{1 + 2\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 8\mathring{I}_3}, \\ \hat{I}_3 &= \hat{\varepsilon}_1\hat{\varepsilon}_2\hat{\varepsilon}_3 = \frac{\mathring{I}_3}{1 + 2\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 8\mathring{I}_3}. \end{aligned}$$

体积膨胀因数 我们研究了当前状态与初始状态下的线微元 $\mathrm{d}s$ 与 $\mathrm{d}s_0$ 之间的关系, 现在求这些状态下的体微元之间的关系. 在初始状态下, 沿应变张量的主轴取以 $\mathrm{d}s_{01}, \mathrm{d}s_{02}, \mathrm{d}s_{03}$ 为边的长方体, 其体积 $\mathrm{d}V_0$ 由公式 $\mathrm{d}V_0 = \mathrm{d}s_{01}\,\mathrm{d}s_{02}\,\mathrm{d}s_{03}$

确定. 在运动过程中, 与它相对应的是以 ds_1, ds_2, ds_3 为边的长方体, 其体积为 $dV = ds_1\,ds_2\,ds_3$. 体积的相对变化量

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} \tag{5.23}$$

称为体积膨胀因数 θ. 根据 (5.15), 等式 (5.23) 可以写为

$$\theta = \sqrt{(1+2\mathring{\varepsilon}_1)(1+2\mathring{\varepsilon}_2)(1+2\mathring{\varepsilon}_3)} - 1. \tag{5.24}$$

根据 (5.22), 有

$$\theta = \sqrt{1 + 2\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 8\mathring{I}_3} - 1. \tag{5.25}$$

由定义, 量 θ 是不变的几何特征量, 其表达式由公式 (5.25) 给出, 它在使用任何坐标系时都成立.

用类似的方法可以在任意曲线坐标系中对平行六面体微元引入量 θ. 以后将证明, 公式 (5.23) 所定义的体积膨胀因数与原始体积 dV_0 的形状无关. 它在变形有限时等于给定点附近任何微小体积的相对变化.

在无穷小变形的情况下, 从 (5.24) 和 (5.25) 得公式

$$\theta \approx I_1 = \hat{\varepsilon}^{i}_{\cdot i} \approx \mathring{\varepsilon}^{i}_{\cdot i}.$$

因此, 应变张量的第一不变量在变形无穷小时可以视为体积膨胀因数.

根据运动规律计算应变张量的分量

现在讨论如何根据已知的运动规律

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \quad \xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t), \tag{5.26}$$

$$x_0^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0), \quad \xi^i = \xi^i(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t_0) \tag{5.27}$$

和观察者所在空间 x^1, x^2, x^3 的已知度规 g_{ij} 来确定应变张量的协变分量 ε_{ij} 这一问题. 我们强调, 在从随体坐标系到观察者所用坐标系的变换中, 时间 t 被视为参数. 如果初始状态对应于介质在 t_0 时刻的位置, 则在初始状态从观察者所用坐标系到拉格朗日坐标系的坐标变换由公式 (5.27) 给出. 在随体坐标系中, 应变张量的协变分量由以下等式定义[1]:

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij}),$$

式中 $\hat{g}_{ij}$ 为当前随体坐标系的度规. 因为

$$\hat{g}_{ij}\,d\xi^i\,d\xi^j = g_{pq}\,dx^p\,dx^q$$

所以[2]

$$\hat{g}_{ij} = g_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}.$$

---

[1] 这里为了强调我们是在当前时刻的随体坐标系中考虑问题, 故意把应变张量 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的协变分量记为 $\hat{\varepsilon}_{ij}$. 下文中的记号 $\mathring{\varepsilon}_{ij}$ 和 $\varepsilon_{ij}^{(x^k)}$ 有类似含义. ——译注

[2] 这实际上是张量的协变分量的变换公式. ——译注

因此, 在随体坐标系中

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^q}{\partial \xi^j} - \mathring{g}_{ij}\right), \tag{5.28}$$

式中的导数 $\partial x^m/\partial \xi^n$ 由 (5.26) 给出. 我们指出, 在一般情况下无法对"初始状态"空间的度规 $\mathring{g}_{ij}$ 作出任何结论, 因为它在不同情况下可以用不同物理方法引入. 但是, 仍然可以通过选取"初始状态"下的坐标系 ξ^1, ξ^2, ξ^3 来影响度规张量的分量 $\mathring{g}_{ij}$.

如果从观察者所用坐标系到初始状态的变换由 (5.27) 给出, 则在初始状态的拉格朗日坐标系中有

$$\mathring{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{ij} - g_{pq}\frac{\partial x_0^p}{\partial \xi^i}\frac{\partial x_0^q}{\partial \xi^j}\right),$$

式中的 $\partial x_0^m/\partial \xi^n$ 由 (5.27) 给出.

根据张量 $\hat{\mathscr{E}}$ 的分量从随体坐标系到观察者所用坐标系的变换公式, 除了随体坐标系中的公式 (5.28), 在观察者所用坐标系中还有

$$\varepsilon_{ij}^{(x^k)} = \frac{1}{2}\left(g_{ij} - \mathring{g}_{pq}\frac{\partial \xi^p}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^q}{\partial x^j}\right),$$

式中的导数 $\partial \xi^m/\partial x^n$ 由 (5.26) 给出.

位移矢量 考虑初始状态能够实际实现的情形, 这时度规 $\mathring{g}_{ij}$ 和 $\hat{g}_{ij}$ 都是欧几里得度规, 并且可以引入位移矢量 $\boldsymbol{w}$ (图 12):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{w}, \tag{5.29}$$

式中 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}$ 分别是连续介质的同一点在初始时刻 t_0 和当前时刻 t 的径矢.

由 (5.29) 易得基矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 与 $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$ 之间的关系, 利用这个关系就可以写出应变张量的分量 ε_{ij} 的公式. 把 (5.29) 对 ξ^i 求导, 得

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial \xi^i} = \hat{\boldsymbol{e}}_i - \mathring{\boldsymbol{e}}_i,$$

从而

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i = \mathring{\boldsymbol{e}}_i + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i}, \quad \text{或} \quad \mathring{\boldsymbol{e}}_i = \hat{\boldsymbol{e}}_i - \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i}, \tag{5.30}$$

所以

$$\hat{g}_{ij} = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = \mathring{\boldsymbol{e}}_i \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_j + \mathring{\boldsymbol{e}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j} + \mathring{\boldsymbol{e}}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j},$$

$$\mathring{g}_{ij} = \mathring{\boldsymbol{e}}_i \cdot \mathring{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j - \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j} - \hat{\boldsymbol{e}}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j}.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathring{\varepsilon}_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij}) &= \frac{1}{2}\left(\mathring{\boldsymbol{e}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j} + \mathring{\boldsymbol{e}}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i - \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^j}\right).\end{aligned} \tag{5.31}$$

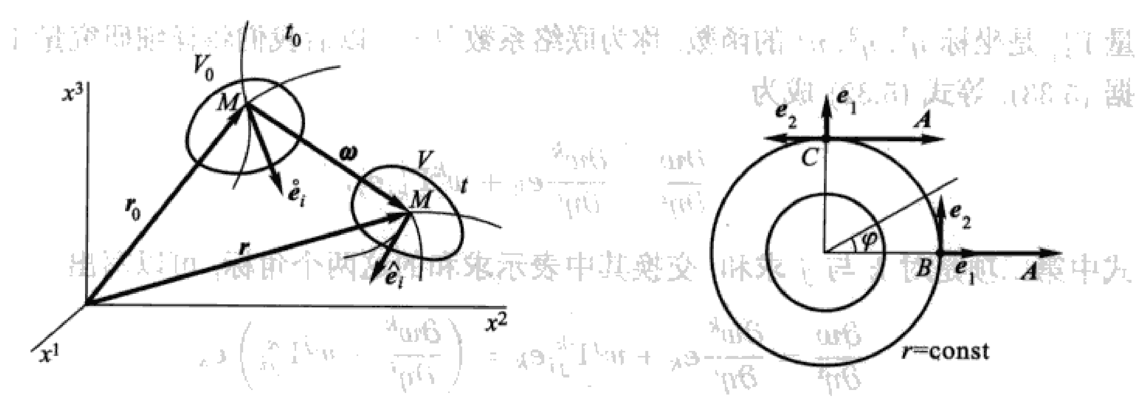


图 12. 位移矢量　　　　图 13. 平面上的极坐标系

公式 (5.31) 对于任意选取的拉格朗日坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3 都成立, 这些坐标一般是曲线坐标. 我们指出, 在分量 ε_{ij} 的表达式 (5.31) 中只含有位移矢量 $\boldsymbol{w}$ 对坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3 的一阶导数, 它们表征了连续介质的点的相对位移.

矢量及其分量对坐标的微分运算

我们已经得到了通过位移矢量 $\boldsymbol{w}$ 表示应变张量的分量 ε_{ij} 的公式, 现在来推导通过位移矢量 $\boldsymbol{w}$ 的分量表示应变张量的分量 ε_{ij} 的公式. 为此, 必须确定如何用矢量的分量的导数来表示矢量的导数.

显然, 矢量分量的普通导数并不决定矢量本身的变化, 因为从空间中的一点移动到另一点时, 基矢量一般也发生变化. 实际上, 例如, 在平面上取极坐标系, 并考虑大小与方向在平面上所有点都不变的矢量场 $\boldsymbol{A}$. 当从平面上的一点移动到另一点时, 矢量 $\boldsymbol{A}$ 不发生变化, 其导数显然应当等于零. 坐标 ξ^1 和 ξ^2 是半径 r 和极角 φ, 基矢量的方向为: $\boldsymbol{e}_1$ 沿从坐标原点出发的射线方向, $\boldsymbol{e}_2$ 沿圆周 $r = \text{const}$ 的切线方向. $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 的方向在平面上不同的点是不同的, 所以常矢量 $\boldsymbol{A}$ 的分量在平面上不同的点也是不同的 (例如图 13 中的点 B 与 C), 即常矢量的分量的导数不等于零.

在笛卡儿坐标系中

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}(w^k \boldsymbol{e}_k) = \frac{\partial w^k}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_k,$$

因为从一点移动到另一点时, 基矢量 $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}$ 不变.

张量与矢量的分量的协变导数及其性质

在任意的曲线坐标系 η^1, η^2, η^3 中, 基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 是变量, 所以应写出

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i}\boldsymbol{e}_k + w^k \frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial \eta^i}. \tag{5.32}$$

显然, 由定义可以认为导数 $\partial \boldsymbol{e}_k / \partial \eta^i$ 也是矢量, 它表征曲线坐标系的性质. 按基 $\boldsymbol{e}_j$ 分解此矢量, 并用记号 Γ^j_{ki} 表示其分量, 有

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial \eta^i} = \Gamma^j_{ki}\boldsymbol{e}_j. \tag{5.33}$$

量 Γ^j_{ki} 是坐标 η^1, η^2, η^3 的函数, 称为联络系数[1) 2)]. 以后我们将详细研究量 Γ^j_{ki}. 根据 (5.33), 等式 (5.32) 成为

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i}\boldsymbol{e}_k + w^k \Gamma^j_{ki}\boldsymbol{e}_j,$$

式中第二项是对 k 与 j 求和. 交换其中表示求和的这两个角标, 可以写出

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i}\boldsymbol{e}_k + w^j \Gamma^k_{ji}\boldsymbol{e}_k = \left(\frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^j \Gamma^k_{ji}\right)\boldsymbol{e}_k. \tag{5.34}$$

$\boldsymbol{e}_k$ 的系数 $\partial w^k/\partial \eta^i + w^j\Gamma^k_{ji}$ 带有 2 个角标, 这些系数有一个专门的记号 $\nabla_i w^k$, 它们称为矢量 $\boldsymbol{w}$ 的逆变分量的协变导数[3)]:

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^j \Gamma^k_{ji}. \tag{5.35}$$

我们来确定 $\nabla_i w^k$ 的性质.

在笛卡儿坐标系 ($\eta^i = x^i$) 中, 因为 $\partial \boldsymbol{e}_k/\partial x^i = 0$, 即 $\Gamma^k_{ji} = 0$, 所以有

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial x^i},$$

即矢量分量的协变导数与该分量对坐标的普通导数相同.

协变导数组成张量的分量. 实际上, 设 $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ 是新坐标系, η^1, η^2, η^3 是旧坐标系, 那么

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta^k} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i}\frac{\partial \eta^i}{\partial \zeta^k}.$$

可见, 由于 $\boldsymbol{w}$ 是不变的对象, 所以 $\partial \boldsymbol{w}/\partial \eta^i$ 像矢量的协变分量那样变换. 因此,

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i}\boldsymbol{e}^i$$

---

1) 我们用数学方法引入物理空间或相空间的模型, 其几何性质的确定与这些系数有密切关系. 对于几何空间的一般情况, 这些系数可以用不同的公式给出. 下面只讨论欧几里得空间、伪欧几里得空间与一般的黎曼空间. 按照定义, 这些空间的系数 Γ^i_{kj} 由相同的公式给出, 其中只含有度规张量的分量 g_{mn} 及其对坐标的导数.

给出 Γ^i_{kj} 后, 在空间的每一点就可以从矢量代数过渡到张量分析. 在张量分析中, 有必要把矢量与张量从给定点移动到空间的任何其他点, 从而对邻近点的矢量与张量进行比较, 进而把矢量与任意阶张量对坐标 x^k 的导数构造为张量.

在任何维数的空间中, 例如在应用于经典相对论的一些四维物理度规空间模型中, 下面关于张量使用的那些结论和公式是都成立的.

2) 记号 Γ^j_{ki} 通常也称为第二类克里斯托费尔符号, 后文中简称为克里斯托费尔符号. ——译注

3) ∇_i 称为协变微分算子, 下文中的 $\nabla^i = g^{ij}\nabla_j$ 称为逆变微分算子. ——译注

是一个不变的对象. 但按照 (5.34) 和 (5.35), 我们有

$$\boldsymbol{T} = \nabla_i w^k \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}^i,$$

即 $\boldsymbol{T}$ 是二阶张量, 其混变分量是协变导数 $\nabla_i w^k$.

我们指出, 导数 $\partial w^k/\partial\eta^i$ 不是张量的分量. 事实上, 如果把微分符号 $\partial/\partial\eta^i$ 之后的 w^k 替换为它在新坐标系中的表达式

$$w^k = w'^j \frac{\partial\eta^k}{\partial\zeta^j},$$

那么 $\partial\eta^k/\partial\zeta^j$ 也应该对 η^i 求导, 所以对于 $\partial w^k/\partial\eta^i$ 我们得不到张量的变换规则.

由协变导数的定义显见, 标量 φ 的协变导数与普通导数相同:

$$\nabla_i \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta^i}.$$

它定义的矢量就是标量场 φ 的梯度矢量. 作为场 φ 的特征量, 我们已经在前面详细讨论过这个矢量.

现在定义张量的逆变分量的协变导数. 具体讲, 取二阶张量 $\boldsymbol{H} = H^{jk}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$, 并进行以下运算:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial\eta^i} &= \frac{\partial H^{jk}}{\partial\eta^i}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k + H^{jk}\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial\eta^i}\boldsymbol{e}_k + H^{jk}\boldsymbol{e}_j\frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial\eta^i}\\ &= \frac{\partial H^{jk}}{\partial\eta^i}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k + H^{jk}\Gamma^l_{ji}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_k + H^{jk}\boldsymbol{e}_j\Gamma^l_{ki}\boldsymbol{e}_l.\end{aligned}$$

在第二个求和式中交换表示求和的角标 l 与 j, 在第三个求和式中交换 l 与 k, 得

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial\eta^i} = \left(\frac{\partial H^{jk}}{\partial\eta^i} + H^{lk}\Gamma^j_{li} + H^{jl}\Gamma^k_{li}\right)\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k = \nabla_i H^{jk}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k,$$

式中定义了

$$\nabla_i H^{jk} = \frac{\partial H^{jk}}{\partial\eta^i} + H^{lk}\Gamma^j_{li} + H^{jl}\Gamma^k_{li},$$

它称为二阶张量 $\boldsymbol{H}$ 的逆变分量的协变导数. 容易看出, 可以按照公式

$$\boldsymbol{T}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial\eta^i}\boldsymbol{e}^i = \nabla_i H^{jk}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^i$$

或

$$\boldsymbol{T}_2 = \nabla_i H^{jk}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$$

或

$$\boldsymbol{T}_3 = \nabla_i H^{jk}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_k$$

由二阶张量引入三阶张量. 显然, 张量 $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3$ 一般是不同的.

类似地可以组成任意阶张量的逆变分量的协变导数.

显然, 由协变导数的定义 (它对张量分量的线性性质), 逆变分量之和的协变导数等于逆变分量的协变导数之和:

$$\nabla_i(v^k + w^k) = \nabla_i v^k + \nabla_i w^k.$$

现在证明, 乘积的协变微分规则与乘积在普通意义上的微分规则相同. 设需要计算 $\nabla_i(v^j w^k)$, 为此必须应用张量的逆变分量的协变微分规则, 由前面的内容 (§4) 可知, 乘积 $v^j w^k$ 是二阶张量的分量. 于是,

$$\begin{aligned}\nabla_i (v^j w^k) &= \frac{\partial v^j w^k}{\partial \eta^i} + v^l w^k \Gamma^j_{li} + v^j w^l \Gamma^k_{li} \\ &= \left(\frac{\partial v^j}{\partial \eta^i} + v^l \Gamma^j_{li}\right) w^k + v^j \left(\frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^l \Gamma^k_{li}\right) \\ &= w^k \nabla_i v^j + v^j \nabla_i w^k.\end{aligned}$$

这就证明了需要的结论. 任意数目分量的乘积的协变微分运算是完全类似的.

现在讨论当矢量不是由逆变分量给出, 而是由协变分量给出时的协变微分问题. 设 $\boldsymbol{w} = w_j \boldsymbol{e}^j$, 需要计算 $\partial \boldsymbol{w}/\partial \eta^i$. 这时

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} \boldsymbol{e}^j + w_j \frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial \eta^i}. \tag{5.36}$$

显然, 就像 $\partial \boldsymbol{e}_j/\partial \eta^i$ 那样, $\partial \boldsymbol{e}^j/\partial \eta^i$ 也是矢量, 可以按 $\boldsymbol{e}^k$ 分解. 在欧几里得空间及更一般情况下的黎曼空间中, 成立公式

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial \eta^i} = -\Gamma^j_{ki} \boldsymbol{e}^k, \tag{5.37}$$

式中的 Γ^j_{ki} 就是前面引入的联络系数, 在欧几里得空间和黎曼空间中亦称克里斯托费尔符号. 为了证明 (5.37) 成立, 取标积

$$\boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{e}_k = \delta^j_k.$$

此等式在空间中所有点都成立. 对坐标 η^i 求导, 得

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial \eta^i} \cdot \boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{e}^j \cdot (\Gamma^l_{ki} \boldsymbol{e}_l) = 0.$$

在最后的求和式中, 只有与 $l = j$ 相对应的项才不等于零, 所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial \eta^i} \cdot \boldsymbol{e}_k = -\Gamma^j_{ki}.$$

这个公式显然等价于 (5.37). 利用 (5.37), 公式 (5.36) 成为

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} \boldsymbol{e}^j - w_j \Gamma^j_{ki} \boldsymbol{e}^k.$$

在最后的求和式中, 把表示求和的角标 j 与 k 互换, 得

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \left(\frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} - w_k \Gamma^k_{ji}\right)\boldsymbol{e}^j = \nabla_i\, w_j \boldsymbol{e}^j.$$

表达式 $\partial w_j/\partial \eta^i - w_k\Gamma^k_{ji}$ 就定义了矢量的协变分量的协变导数:

$$\nabla_i\, w_j = \frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} - w_k \Gamma^k_{ji}.$$

类似地可以引入任何张量的协变分量的协变导数.

我们指出, $\nabla_i\, w_j$ 与 $\nabla_i\, w^j$ 分别是同一个二阶张量的协变分量与混变分量:

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i}\boldsymbol{e}^i = \nabla_i\, w_j \boldsymbol{e}^j \boldsymbol{e}^i = \nabla_i\, w^j \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}^i.$$

由此可知, 尽管度规张量的分量 g_{ij} 与 g^{ij} 依赖于 η^1, η^2, η^3, 但是对于协变微分运算而言, 它们应当相当于常量. 换言之, 可以把它们放入符号 ∇_i 或者从其中提出而不改变结果. 其实, 作为同一个张量的不同分量, $\nabla_i\, w^j$ 与 $\nabla_i\, w_k$ 之间存在着联系:

$$\nabla_i\, w^j = g^{jk}\nabla_i\, w_k, \tag{5.38}$$

而

$$w^j = g^{jk} w_k, \tag{5.39}$$

所以

$$\nabla_i (g^{jk} w_k) = g^{jk} \nabla_i\, w_k,$$

即

$$\nabla_i\, g^{jk} = 0.$$

如果用 $\nabla_i\, w_k = g_{kj}\nabla_i\, w^j$ 代替 (5.38), 用 $w_k = g_{kj} w^j$ 代替 (5.39), 类似地可得

$$\nabla_i\, g_{jk} = 0.$$

克里斯托费尔符号的性质 现在详细研究欧几里得度规空间中克里斯托费尔符号的计算问题, 并阐明克里斯托费尔符号的性质. 我们指出, 还存在比欧几里得空间或黎曼空间更复杂的空间, 其克里斯托费尔符号不是计算出来的, 而是给定的, 且给定方法就包含在该空间的定义中.

克里斯托费尔符号不是某个张量的分量. 例如, 以下讨论即给出这个结论. 在同一空间中, 克里斯托费尔符号在笛卡儿坐标系中等于零, 而在曲线坐标系中不等于零. 显然, 张量的分量不可能具有这样的性质.

在欧几里得空间中, 克里斯托费尔符号对下标是对称的:

$$\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}.$$

现证明之. 在欧几里得空间中, 径矢 $\boldsymbol{r}(\eta^1,\ \eta^2,\ \eta^3)$ 总是存在的, 并且 $\boldsymbol{e}_j = \partial\boldsymbol{r}/\partial\eta^j$. 因为

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial \eta^k} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial \eta^k \partial \eta^j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial \eta^j \partial \eta^k} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial \eta^j}, \tag{5.40}$$

所以 $\Gamma^i_{jk}\boldsymbol{e}_i = \Gamma^i_{kj}\boldsymbol{e}_i$.

现在给出用度规张量 $\boldsymbol{g}$ 的分量来计算克里斯托费尔符号的公式. 在黎曼空间中, 克里斯托费尔符号对下标的对称性是由定义给出的, 所以下面得到的 Γ^i_{kj} 的公式 (5.41) 在黎曼空间中也成立.

取关系式

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial \eta^k} \cdot \boldsymbol{e}_s + \frac{\partial \boldsymbol{e}_s}{\partial \eta^k} \cdot \boldsymbol{e}_j,$$

由此得

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} - \frac{\partial \boldsymbol{e}_s}{\partial \eta^k} \cdot \boldsymbol{e}_j = \Gamma^l_{jk}\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_s = \Gamma^l_{jk} g_{ls}.$$

类似地

$$\frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial \boldsymbol{e}_s}{\partial \eta^j} \cdot \boldsymbol{e}_k = \Gamma^l_{kj}\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_s = \Gamma^l_{kj} g_{ls}.$$

把这两个等式相加, 应用克里斯托费尔符号对下标的对称性、等式 (5.40) 以及

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial \eta^s} \cdot \boldsymbol{e}_j + \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial \eta^s} \cdot \boldsymbol{e}_k = \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s},$$

得

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s} = 2\Gamma^l_{jk} g_{ls}.$$

取最后一个关系式与 $g^{is}/2$ 的缩并, 就得到需要的公式

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s} \right). \tag{5.41}$$

用位移矢量的分量表示应变张量 现在回到公式 (5.31), 并推导用位移矢量的分量表示应变张量的分量的公式. 位移矢量 $\boldsymbol{w}$ 既可以按照当前的基 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 分解, 也可以按照初始的基 $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$ 分解, 所以相应地可以引入同一个矢量 $\boldsymbol{w}$ 的两种分量 $\hat{w}^k$ 与 $\mathring{w}^k$, 即

$$\boldsymbol{w} = \mathring{w}^k \mathring{\boldsymbol{e}}_k = \hat{w}^k \hat{\boldsymbol{e}}_k.$$

也可以引入两种协变导数:

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} = \mathring{\nabla}_i\, \mathring{w}^k \mathring{\boldsymbol{e}}_k, \tag{5.42}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} = \hat{\nabla}_i\, \hat{w}^k \hat{\boldsymbol{e}}_k. \tag{5.43}$$

第一种协变导数是在初始空间中计算的, 其克里斯托费尔符号用 $\mathring{g}_{ij}$ 计算; 第二种协变导数是在当前空间中计算的, 其克里斯托费尔符号用 $\hat{g}_{ij}$ 计算. 把 (5.42) 代入 (5.31) 的第一个等式, 得

$$\mathring{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}[(\mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k)\mathring{g}_{kj} + (\mathring{\nabla}_j \mathring{w}^k)\mathring{g}_{ki} + (\mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \mathring{\nabla}_j \mathring{w}^l)\mathring{g}_{kl}].$$

利用度规张量的分量可以放入协变导数符号内而不改变结果的性质, 有

$$\mathring{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathring{\nabla}_i \mathring{w}_j + \mathring{\nabla}_j \mathring{w}_i + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}_k \mathring{\nabla}_j \mathring{w}^k). \tag{5.44}$$

类似地, 利用 (5.43) 和 (5.31) 的第二个等式, 可得

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{\nabla}_i \hat{w}_j + \hat{\nabla}_j \hat{w}_i - \hat{\nabla}_i \hat{w}_k \hat{\nabla}_j \hat{w}^k). \tag{5.45}$$

在无穷小相对位移的情况下, 忽略 $|\boldsymbol{w}|$ 的平方项, 得

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathring{\nabla}_i \mathring{w}_j + \mathring{\nabla}_j \mathring{w}_i) = \frac{1}{2}(\hat{\nabla}_i \hat{w}_j + \hat{\nabla}_j \hat{w}_i). \tag{5.46}$$

显然, ε_{ij} 等于张量 $\nabla_i w_j \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j$ 在对称化运算后所得张量的分量. 在笛卡儿坐标系中

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_j}{\partial x^i} + \frac{\partial w_i}{\partial x^j}\right).$$

我们强调, 只有在对运动介质的所有点都能引入位移矢量 $\boldsymbol{w}$ 的时候, 应变张量分量的公式 (5.31) 和 (5.44) 才成立, 而利用 $\mathrm{d}s^2$ 和 $\mathrm{d}s_0^2$ 的度规按照公式 (5.3) 或 (5.28) 定义的应变张量及其分量与存在位移矢量的假设是无关的.

论协调方程的存在性

由 ε_{ij} 的对称性, 应变张量的 9 个分量中只有 6 个分量不同. 在空间中的给定点, 它们可以是任意的数. 当存在位移 $\boldsymbol{w}$ 时, 这 6 个分量按照 (5.44) 通过 9 个导数 $\nabla_j w_i$ 来表示. 然而, ε_{ij} 不可能是空间 ξ^1, ξ^2, ξ^3 的点的任意函数, 因为由上述公式 (5.44), 自变量为 ξ^1, ξ^2, ξ^3 的 6 个函数 ε_{ij} 仅通过自变量为 ξ^1, ξ^2, ξ^3 的 3 个函数 w_i 来表示. 因此, ε_{ij} 应当满足一定的方程, 它们称为应变的协调方程.

只有存在位移矢量 $\boldsymbol{w}$, 亦即只有连续介质的当前状态与初始状态都属于欧几里得空间, 才应当存在协调方程. 所以, 我们先讨论欧几里得空间的条件.

克里斯托费尔符号的变换公式

众所周知, 克里斯托费尔符号 Γ_{ij}^k 不是某个张量的分量, 在三维空间中它们由 27 个量组成. 对于欧几里得空间, 我们在前面得到的公式 (5.41) 给出了克里斯托费尔符号与度规张量的分量之间的关系. 按照定义, 这个公式对黎曼空间亦成立.

设 Γ'^k_{ij} 和 Γ^k_{ij} 分别表示坐标系 η^i 和 ξ^i 的克里斯托费尔符号, 我们来建立克里斯托费尔符号在坐标系 ξ^i 变换为坐标系 η^i 时的变换公式. 显然, $\boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{e}_\alpha \partial\xi^\alpha/\partial\eta^i$. 把这个等式对 η^j 求导, 考虑到

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}'_i}{\partial \eta^j} = \Gamma'^{\alpha}_{ij}\boldsymbol{e}'_\alpha, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial \xi^\beta} = \Gamma^\omega_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\omega = \Gamma^\omega_{\alpha\beta}\frac{\partial \eta^\gamma}{\partial \xi^\omega}\boldsymbol{e}'_\gamma$$

(因为 $e_\omega = e'_\gamma \partial\eta^\gamma/\partial\xi^\omega$), 得

$$\Gamma'^{\alpha}_{ij} e'_\alpha = \left(\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}\frac{\partial\eta^\gamma}{\partial\xi^\omega}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^i}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\eta^j} + \frac{\partial^2\xi^\omega}{\partial\eta^i\partial\eta^j}\frac{\partial\eta^\gamma}{\partial\xi^\omega}\right) e'_\gamma.$$

取此等式两边与 e'^γ 的标积, 即得所求公式[1])

$$\Gamma'^{\gamma}_{ij} = \left(\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^i}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\eta^j} + \frac{\partial^2\xi^\omega}{\partial\eta^i\partial\eta^j}\right)\frac{\partial\eta^\gamma}{\partial\xi^\omega}.$$

满足 $\Gamma^k_{ij}=0$ 的坐标系的方程

能够求出这样的坐标系 η^i, 使所有 Γ'^{γ}_{ij} 都等于零吗?

在欧几里得空间中可以引入适用于全空间的笛卡儿坐标系, 其中 $g_{ik} = \mathrm{const}$, 所以在空间中的所有点 $\Gamma'^{\gamma}_{ij} = 0$. 在黎曼空间中的情况则有所不同. 我们来写出确定所有系数 $\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}$ 均为零的坐标系的方程. 因为 $\det(\partial\eta^\gamma/\partial\xi^\omega) \neq 0$, 所以, 只有成立等式

$$\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^i}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\eta^j} + \frac{\partial^2\xi^\omega}{\partial\eta^i\partial\eta^j} = 0, \quad \omega,\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3, \tag{5.47}$$

所有 Γ'^{γ}_{ij} 才可能等于零. 在黎曼空间中, 在给定的某一点总可以使这些等式得到满足, 即总可以引入新坐标 η^i, 使点 ξ^i_0 所对应的点 η^i_0 处所有 $\Gamma'^{\gamma}_{ij} = 0$. 显然, 为此只要取[2])

$$\xi^\omega - \xi^\omega_0 = \delta^\omega_s(\eta^s - \eta^s_0) - \frac{1}{2}\Gamma_0{}^{\omega}_{\alpha\beta}(\eta^\alpha - \eta^\alpha_0)(\eta^\beta - \eta^\beta_0) + \cdots$$

可以引入这样的坐标系, 使 $\Gamma^{\gamma}_{ij} = 0$ 在给定曲线上的所有点都成立 (费米坐标). 为了证明这个有趣而且有用的命题, 只要指出一种方法来构成这样的坐标系 ζ^i 即可, 此时在给定的任意曲线 C 上的所有点都成立等式

$$\Gamma^{\gamma}_{ij} = 0. \tag{5.48}$$

如果考虑欧几里得空间, 那么在引入笛卡儿坐标系后, 等式 (5.48) 不仅在曲线 C 上成立, 而且在空间的所有点都成立. 因此, 应当只在黎曼空间中检验等式 (5.48) 沿曲线 C 成立, 这时 (5.51) 中的分量 $R_{\beta s\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\omega}$ 并非都等于零.

在 n 维黎曼空间的情况下, 对于无穷小体积内的所有点, 以及曲面上维数高于 1 的任意微元, 等式 (5.48) 都不可能精确成立.

设曲线 C 的方程在最初的坐标系 x^i 中具有以下形式:

$$x^\alpha = \varphi^\alpha(x^1), \quad \alpha = 2,\ 3,\ \cdots,\ n,$$

---

[1]) 所得变换公式与条件 (5.47) 独立于定义 (5.41), 它们仅仅是把公式 (4.6) 和 (5.33) 应用于原坐标系与变换后的坐标系之后的结果. 为简单起见, 以后认为 $\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\omega}_{\beta\alpha}$, 所以公式 (5.41) 对于度规空间成立.

[2]) 式中省略了 $\eta^k - \eta^k_0$ 的高阶项, 而 $\Gamma_0{}^{\omega}_{\alpha\beta}$ 表示坐标系 ξ^i 中 $\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}$ 在点 ξ^i_0 的值. ——译注

且函数 $\varphi^\alpha(x^1)$ 定义于用恰当方式选取的一些区间内的所有点 x^1. 完成坐标变换

$$\begin{aligned}\xi^1 &= x^1,\\ \xi^2 &= x^2 - \varphi^2(x^1),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \xi^n &= x^n - \varphi^n(x^1)\end{aligned}$$

后我们得到, 曲线 C 在坐标系 ξ^i 中对应于

$$\xi^2 = \xi^3 = \cdots = \xi^n = 0$$

和变量 ξ^1. 显然, 在坐标系 ξ^i 中曲线 C 与坐标线 ξ^1 重合.

克里斯托费尔符号的变换可以写为

$$\frac{\partial\xi^k}{\partial\eta^\gamma}\Gamma'^\gamma_{ij} = \Gamma^k_{pq}\frac{\partial\xi^p}{\partial\eta^i}\frac{\partial\xi^q}{\partial\eta^j} + \frac{\partial^2\xi^k}{\partial\eta^i\partial\eta^j}.$$

因为 $\det(\partial\xi^k/\partial\eta^\omega) \neq 0$, 所以若等式 (5.47) 对于所有 $\omega = 1, 2, \cdots, n$ 和固定的角标 i, j 都成立, 则亦成立

$$\Gamma'^k_{ij} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

首先考虑从坐标系 ξ^i 到坐标系 η^i 的如下变换, 使得坐标系 η^i 中对于所有 k 与除 $i = j = 1$ 之外的所有 i 和 j 都成立 $\Gamma'^k_{ij} = 0$:

$$\begin{aligned}\xi^1 &= \eta^1 + b^1_\alpha\eta^\alpha - \frac{1}{2}[b^\nu_\varkappa b^\mu_\chi\Gamma^1_{\nu\mu} + (b^1_\varkappa b^\mu_\chi + b^1_\chi b^\mu_\varkappa)\Gamma^1_{\mu1} + b^1_\varkappa b^1_\chi\Gamma^1_{11}]\eta^\varkappa\eta^\chi + F^1,\\ \xi^\alpha &= b^\alpha_\varkappa\eta^\varkappa - \frac{1}{2}[b^\nu_\varkappa b^\mu_\chi\Gamma^\alpha_{\nu\mu} + (b^1_\varkappa b^\mu_\chi + b^1_\chi b^\mu_\varkappa)\Gamma^\alpha_{\mu1} + b^1_\varkappa b^1_\chi\Gamma^\alpha_{11}]\eta^\varkappa\eta^\chi + F^\alpha,\end{aligned} \tag{5.49}$$

式中, $\varkappa, \mu, \chi, \nu$ 与 α 取值 $2, 3, \cdots, n$; $b^1_\beta(\eta^1)$, $b^\alpha_\beta(\eta^1)$ ($\det(b^\alpha_\beta) \neq 0$) 为 η^1 的函数; F^1 与 F^α 为 η^1 与 η^α 的任意函数, 并且当 η^α 趋于零时它们像 η^α 的高于二阶的无穷小量那样趋于零. 显然, 沿曲线 C 有

$$\eta^2 = \eta^3 = \cdots = \eta^n = 0, \quad \xi^1 = \eta^1.$$

在式 (5.49) 中, 可以认为量 $\Gamma^k_{ij}(\xi^i)$ 等于 $\Gamma^k_{ij}(\eta^1)$ 在曲线 C 上的值. 把 (5.49) 中的 $\xi^i(\eta^k)$ 代入条件 (5.47), 即得函数 $b^1_\beta(\eta^1)$ 与 $b^\alpha_\beta(\eta^1)$ 的方程.

先把条件 (5.47) 改写为

$$\frac{\partial^2\xi^\omega}{\partial\eta^i\partial\eta^j} = -\Gamma^\omega_{\mu\nu}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial\eta^i}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial\eta^j} - \Gamma^\omega_{1\mu}\frac{\partial\xi^1}{\partial\eta^i}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial\eta^j} - \Gamma^\omega_{\mu1}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial\eta^i}\frac{\partial\xi^1}{\partial\eta^j} - \Gamma^\omega_{11}\frac{\partial\xi^1}{\partial\eta^i}\frac{\partial\xi^1}{\partial\eta^j}.$$

由式 (5.49) 可知, 在曲线 C 上成立以下等式:

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial\eta^1}=1,\quad \frac{\partial\xi^1}{\partial\eta^\varkappa}=b^1_\varkappa,\quad \frac{\partial^2\xi^1}{(\partial\eta^1)^2}=0,\quad \frac{\partial^2\xi^1}{\partial\eta^1\partial\eta^\varkappa}=\frac{\mathrm{d}b^1_\varkappa}{\mathrm{d}\eta^1},$$

$$\frac{\partial^2\xi^1}{\partial\eta^\varkappa\partial\eta^\chi}=-[b^\nu_\varkappa b^\mu_\chi\Gamma^1_{\nu\mu}+(b^1_\varkappa b^\mu_\chi+b^1_\chi b^\mu_\varkappa)\Gamma^1_{\mu1}+b^1_\varkappa b^1_\chi\Gamma^1_{11}],$$

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^1}=0,\quad \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^\varkappa}=b^\alpha_\varkappa,\quad \frac{\partial^2\xi^\alpha}{(\partial\eta^1)^2}=0,\quad \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial\eta^\varkappa\partial\eta^1}=\frac{\mathrm{d}b^\alpha_\varkappa}{\mathrm{d}\eta^1},$$

$$\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial\eta^\varkappa\partial\eta^\chi}=-[b^\nu_\varkappa b^\mu_\chi\Gamma^\alpha_{\nu\mu}+(b^1_\varkappa b^\mu_\chi+b^1_\chi b^\mu_\varkappa)\Gamma^\alpha_{\mu1}+b^1_\varkappa b^1_\chi\Gamma^\alpha_{11}].$$

把导数在 C 上的这些值代入 (5.47), 得以下结论:

对于 $\omega=\alpha$, $i=\varkappa$, $j=\chi$, 式 (5.47) 恒成立;

对于 $\omega=i=1$, $j=\varkappa$, 或者 $\omega=j=1$, $i=\varkappa$, 有

$$\frac{\mathrm{d}b^1_\varkappa}{\mathrm{d}\eta^1}=-\Gamma^1_{1\mu}b^\mu_\varkappa;$$

对于 $\omega=\alpha$, $i=1$, $j=\varkappa$, 或者 $\omega=\alpha$, $i=\varkappa$, $j=1$, 得

$$\frac{\mathrm{d}b^\alpha_\varkappa}{\mathrm{d}\eta^1}=-\Gamma^\alpha_{1\mu}b^\mu_\varkappa.$$

从所得微分方程确定出 $b^1_\varkappa$ 与 $b^\alpha_\varkappa$ 后, 再利用式 (5.49) 就得到从变量 ξ^j 至 η^i 的一系列变换, 使曲线 C 上除了符号 Γ'^k_{11} $(k=1,2,\cdots,n)$ 可能不为零外, 其余所有符号 Γ'^k_{ij} 均为零. 为了从坐标系 η^i 变换至这样的坐标系 ζ^k, 使所有符号 $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ 在曲线 C 上均为零, 方程 (5.47) 在曲线 C 上的形式应为

$$\Gamma'^\omega_{11}\frac{\partial\eta^1}{\partial\zeta^i}\frac{\partial\eta^1}{\partial\zeta^j}+\frac{\partial^2\eta^\omega}{\partial\zeta^i\partial\zeta^j}=0. \tag{5.50}$$

为了得到满足这些方程的变换, 令

$$\eta^1=f(\zeta^1);\quad \eta^\alpha=g^\alpha(\zeta^1)+\zeta^\alpha.$$

当 $i\neq1$ 或 $j\neq1$ 时方程 (5.50) 恒成立, 而当 $i=j=1$ 时得

$$\Gamma'^1_{11}(f')^2+f''=0,\quad \Gamma'^\alpha_{11}(f')^2+(g^\alpha)''=0.$$

把 $\Gamma'^\omega_{11}(\eta^1)$ 的自变量 η^1 替换为 $f(\zeta^1)$ 并求解这些方程, 我们就得到一个确定的变换, 使问题得到解决. 按顺序应用上述每一步变换, 即得从 x^i 到 ζ^i 的总体变换.

我们指出, 所得结果与公式 (5.41) 以及空间的原始度规都是无关的, 重要的只

是克里斯托费尔符号的对称性 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ 和 Γ_{ij}^k 的变换公式.

在曲线 C 上, 每个张量在坐标系 ζ^i 中的所有一阶协变导数显然与普通导数相同. 张量沿曲线 C 不变的条件归结为它在坐标系 ζ^i 中的分量沿该曲线不变.

如果曲线 C 是封闭的或者具有自交点, 那么沿 C 环绕并回到出发点或者自交点后, 坐标 ζ^k 与基矢量 $e_k(\zeta^i)$ 的值一般而言将不同于初始值. 显然, 此时尽管在坐标系 ζ^i 中常矢量与常张量在曲线 C 上具有相同的分量, 但是它们在沿该曲线环绕后将不同于初始的矢量与张量. 由此还推出, 在点 M 相等的两个张量沿不同的上述曲线移动至另一点 N 后, 其值将不再相等. 可以证明, 这些结果与非欧几里得空间的性质有重要的关系.

在黎曼空间中, 对于度规张量的分量恒成立等式 $\nabla_k g_{ij} = 0$. 在坐标系 ζ^k 中, 沿曲线 C 有 $\nabla_k g_{ij} = \partial g_{ij}/\partial \zeta_k = 0$, 因此在坐标 ζ^k 下沿 C 有 $g_{ij}(\zeta_k) = e_i \cdot e_j = \text{const}$. 由此推出, C 上诸点的基矢量 $e_i(\zeta^k)$ 与 $e^i(\zeta^k)$ 组成一个不变的系统, 它在沿 C 移动时只能如刚体一般旋转.

由符号 Γ_{ij}^k 的一般变换容易看出, 每个线性变换

$$\zeta'^i = a_k^i \zeta^k$$

也使坐标 ζ'^i 下的符号 $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ 在曲线 C 上等于零, 式中的 a_k^i 为常系数. 适当选取实系数 a_k^i, 可以在坐标系 ζ'^i 中沿曲线 C 满足以下等式: 当 $i \neq j$ 时 $g_{ij} = 0$, 而 $g_{ii} = \pm 1$ (符号取决于度规的符号差). 在一般情况下, 只有曲线 C 上的任意给定点才能够任意地给出相应基矢量系的方位.

欧几里得空间的条件 如果要求等式 (5.47) 在整个空间都成立, 即要求空间是欧几里得空间 (或者伪欧几里得空间, 或者一般地要求能够引入坐标 x^s, 使 g_{ik} 在整个空间成为常量), 这些等式就是用于确定在整个空间从当前坐标系 ξ^i 到笛卡儿坐标系 η^i 的变换的微分方程组. 该方程组在一般情况下是不可积的. 欧几里得空间或伪欧几里得空间的条件与微分方程组 (5.47) 的可积性条件相同, 我们来写出这个条件. 为此, 把 (5.47) 对 η^k 求导, 再利用 (5.47) 从所得等式中消去二阶导数, 有

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \xi^s} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\omega}\Gamma_{\alpha s}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\omega}\Gamma_{\beta s}^{\lambda}\right)\frac{\partial \xi^s}{\partial \eta^k}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^3 \xi^\omega}{\partial \eta^i \partial \eta^j \partial \eta^k} = 0.$$

交换表示求和的角标 s 与 β 以及角标 k 与 j, 并利用符号 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}$ 对下标的对称性, 得其他类似的等式:

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha s}^{\omega}}{\partial \xi^\beta} - \Gamma_{\lambda s}^{\omega}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\omega}\Gamma_{\beta s}^{\lambda}\right)\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i}\frac{\partial \xi^s}{\partial \eta^k} + \frac{\partial^3 \xi^\omega}{\partial \eta^i \partial \eta^k \partial \eta^j} = 0.$$

把相应等式相减消去三阶导数后, 再利用从 ξ^i 到 η^i 的变换的行列式不应为零的性

质, 即得方程组 (5.47) 可积的充分必要条件 [1)], 其形式如下 [2)]:

$$R_{\beta s \alpha}^{\cdot\cdot\cdot\omega} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \xi^s} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha s}^{\omega}}{\partial \xi^\beta} + \Gamma_{\lambda s}^{\omega}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\omega}\Gamma_{\alpha s}^{\lambda} = 0. \tag{5.51}$$

对于欧几里得空间, 这些等式在任何坐标系中都应当成立. 如果空间既不是欧几里得空间, 也不是伪欧几里得空间, 则等式 (5.51) 不成立.

黎曼—克里斯托费尔张量

在黎曼空间的一般情况下, 用这种方法引入的量 $R_{\beta s \mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}$ 可以视为一个四阶张量的分量. 为了证明这个结论, 取某可微矢量 $\boldsymbol{a}$, 并考虑下面两个张量:

$$\boldsymbol{T} = \nabla_j \nabla_i a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j, \quad \boldsymbol{T}^* = \nabla_i \nabla_j a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j.$$

显然, 一般 $\boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{T}^*$. 直接计算差 $\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^*$, 得

$$\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^* = R_{ij\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} a^\mu \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j.$$

因为 $\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^*$ 是张量, 而 $\boldsymbol{a}$ 是任意矢量, 所以 $R_{ij\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}$ 应当像四阶张量的分量那样变换. 这个张量称为黎曼—克里斯托费尔张量或者空间的曲率张量.

欧几里得空间的黎曼—克里斯托费尔张量恒等于零. 在欧几里得空间中, 重复进行协变微分运算的结果与运算次序无关 [3)].

用度规张量的分量表示黎曼—克里斯托费尔张量的分量

黎曼—克里斯托费尔张量的协变分量为

$$\begin{aligned} R_{ij\mu\nu} &= g_{\alpha\nu} R_{ij\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} \\ &= \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu i}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu j}}{\partial \xi^i} + g^{\alpha\omega}(\Gamma_{\omega\mu j}\Gamma_{\alpha\nu i} - \Gamma_{\omega\mu i}\Gamma_{\alpha\nu j}), \end{aligned} \tag{5.52}$$

式中的符号 $\Gamma_{\nu\alpha j}$ 根据 (5.41) 等于 [4)]

$$\Gamma_{\nu\alpha j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{j\nu}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial \xi^\nu}\right).$$

---

1) 等式 (5.51) 的必要性是显然的, 充分性可证明如下. 把方程 (5.47) 写为 $\partial^2\xi^\omega/\partial\eta^j\partial\eta^i = f_{ij}^\omega = f_{ji}^\omega$ 的形式 (因为 $\Gamma_{\alpha\beta}^\omega = \Gamma_{\beta\alpha}^\omega$). 由等式 (5.51) 可知

$$f_{ij}^\omega \,\mathrm{d}\eta^j = \mathrm{d}Q_i^\omega, \quad f_{ji}^\omega \mathrm{d}\eta^i = \mathrm{d}Q_j^\omega, \tag{*}$$

式中的 $\mathrm{d}Q_i^\omega$ 是函数 Q_i^ω 的全微分, 对 (*) 进行积分即得该函数. 由式 (*) 可知, 微分形式 $Q_i^\omega\,\mathrm{d}\eta^i$ 是全微分, 因为 $\partial Q_i^\omega/\partial\eta^j = \partial Q_j^\omega/\partial\eta^i = f_{ij}^\omega$. 根据 (5.47), 可以认为 $Q_i^\omega = \partial\xi^\omega/\partial\eta^i$. 因此, 只要对等式 $\mathrm{d}\xi^\omega = (\partial\xi^\omega/\partial\eta^i)\,\mathrm{d}\eta^i = Q_i^\omega\,\mathrm{d}\eta^i$ 进行积分, 就能得到满足方程 (5.47) 的函数 $\xi^\omega(\eta^k)$.

2) 角标的位置与 H. 外尔在其著作 (Weyl H. Space-Time-Matter. London: Methuen, 1922) 中使用的分量记号 $R_{\beta s \alpha}^{\cdot\cdot\cdot\omega}$ 相应, 此后大多数其他作者也在教材和科学文献中这样使用.

3) 为了更全面地揭示问题的本质, 最好注意以下等式:

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^i}\boldsymbol{e}^i\right)\boldsymbol{e}^j = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^j}\boldsymbol{e}^j\right)\boldsymbol{e}^i = \nabla_j \nabla_i a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j.$$

然而对于黎曼空间, 有 $\boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{T}^* = \nabla_j \nabla_i a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}^j \boldsymbol{e}^i = \nabla_i \nabla_j a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j$.

4) 记号 $\Gamma_{\nu\alpha j}$ 通常称为第一类克里斯托费尔符号, 显然 $\Gamma_{\nu\alpha j} = g_{s\nu}\Gamma_{\alpha j}^s$. ——译注

在任何给定点都能选取使 $\Gamma_{\nu\alpha j}=0$ 的坐标系, 但是 $\Gamma_{\nu\alpha j}$ 的导数在非欧几里得空间中不等于零, 所以在这样的坐标系 x^i 中, 对于黎曼—克里斯托费尔张量的分量总可以写出以下公式:

$$R_{ij\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\nu i}}{\partial x^j\partial x^\mu}+\frac{\partial^2 g_{\mu j}}{\partial x^i\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 g_{\mu i}}{\partial x^j\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 g_{\nu j}}{\partial x^i\partial x^\mu}\right).$$

黎曼—克里斯托费尔张量的分量的对称性

从这些公式直接推出以下对称性:

$$R_{ij\mu\nu}=-R_{ji\mu\nu},\quad R_{ii\mu\nu}=0,$$

$$R_{ij\mu\nu}=-R_{ij\nu\mu},\quad R_{ij\nu\nu}=0,$$

$$R_{ij\mu\nu}=R_{\mu\nu ij},\quad R_{ij\mu\nu}+R_{\mu ij\nu}+R_{j\mu i\nu}=0.$$

根据张量变换的性质, 这些对称性在任何坐标系和空间的任何点都成立. 我们指出, 这里列出的对称性并非都是相互独立的.

$n=3$ 时黎曼—克里斯托费尔张量的独立分量的数目

在三维空间中 $(n=3)$ 黎曼—克里斯托费尔张量只有 6 个独立分量, 它们在黎曼空间的一般情况下可能不等于零. 例如, 以下分量就是这样的独立分量:

$$R_{1212},\quad R_{1313},\quad R_{2323},\quad R_{1213},\quad R_{2123},\quad R_{3132}. \tag{5.53}$$

可以用以下方法列出这些分量. 根据上述对称性, $R_{iiii}=0$. 如果角标中只有 2 个不同, 则对于固定的 2 个角标, 所有分量都通过 1 个分量即可表示出来. 因此, 在 $n=3$ 且角标中只有 2 个不同的情况下, 仅有 3 个独立分量, 例如在 (5.53) 中列出的分量. 如果有 3 个角标不同, 则在 $n=3$ 时, 在分量的 4 个角标中总有 2 个是相同的. 对于非零分量, 这些相等的角标不应同时位于前面或后面的 2 个位置, 可以认为它们位于第一和第三个位置. 当相同的角标固定时, 只有 1 个分量 R_{ijik} 是独立的. 所有这样的独立分量共有 3 个, 它们都已经在 (5.53) 中列出.

欧几里得空间的条件是黎曼—克里斯托费尔张量等于零. 黎曼—克里斯托费尔张量等于零的条件, 即欧几里得空间和伪欧几里得空间的条件, 等价于表示 6 个分量 (例如 (5.53)) 等于零的 6 个方程.

里奇张量与外尔张量

不难看出, 同四阶张量 $R_{ij\mu\nu}$ 一起还可以引入一个二阶张量, 其分量 $R_{i\nu}$ 等于

$$R_{i\nu}=R_{i\cdot\mu\nu}^{\cdot\mu\cdot\cdot},$$

即把 $R_{ij\mu\nu}$ 的角标 j 升标, 令 j 等于 μ, 再对 μ 进行缩并. 由对称性显然可见, 如果对两侧的角标进行上述运算, 也将得到同一个张量. 这样组成的二阶张量称为里奇张量.

把里奇张量对 ν 进行缩并后得到的标量 $R_{\cdot\nu}^{\nu\cdot}=R$ 称为黎曼空间的曲率. 对于欧几里得空间与伪欧几里得空间, 显然 $R_{ijkl}=0$, $R_{ij}=0$, $R=0$, 所以欧几里得空

间与伪欧几里得空间称为平坦空间.

容易看出, 在 n 维黎曼空间中可以按照等式

$$W_{ijkl}=R_{ijkl}-\frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl}+R_{jl}g_{ik}-R_{il}g_{kj}-R_{kj}g_{il})+\frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})$$

引入分量为 W_{ijkl} 的四阶张量. 张量

$$\boldsymbol{W}=W_{ijkl}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^l$$

称为外尔张量. 分量 W_{ijkl} 具有与分量 R_{ijkl} 相同的对称性, 此外, 对角标 k 的以下缩并也等于零: $W_{i\cdot kl}^{\cdot k\cdot\cdot}=0$, $W_{kil\cdot}^{\cdot\cdot\cdot k}=0$. 一般而言, 外尔张量仅当 $n\geqslant 4$ 时才不为零. 考虑到其对称条件, 外尔张量在二维与三维情况下恒等于零. 在广义相对论的四维黎曼空间中, 一般 $W_{ijkl}\neq 0$, 外尔张量不为零.

令 $A=ij$, $B=kl$. 六阶矩阵 W_{AB} 的代数性质, 包括其标准形式, 表征着黎曼空间 (特别当 $R_{ij}=0$ 时) 的重要特征.

应变的协调方程 应变张量的分量由等式

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}=\hat{g}_{\alpha\beta}-\mathring{g}_{\alpha\beta}$$

定义. 在存在位移矢量 $\boldsymbol{w}$ 的条件下, 两个二次型

$$\mathrm{d}s^2=\hat{g}_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}\xi^\alpha\,\mathrm{d}\xi^\beta,\quad \mathrm{d}s_0^2=\mathring{g}_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}\xi^\alpha\,\mathrm{d}\xi^\beta$$

确定了欧几里得空间中线微元长度的平方. 因此, 由基本张量 $\mathring{g}_{\alpha\beta}$ 与 $\hat{g}_{\alpha\beta}$ 组成的黎曼一克里斯托费尔张量应当等于零, 这给出方程

$$\mathring{R}_{ij\mu\nu}=0,\quad \hat{R}_{ij\mu\nu}=0.$$

在实践中通常可以认为, 物体在当前状态下位于欧几里得空间, 于是 $\hat{R}_{ij\mu\nu}\equiv 0$ 对 $\hat{g}_{ij}$ 成立. 那么, 因为 $\mathring{g}_{ij}=\hat{g}_{ij}-2\varepsilon_{ij}$, 所以方程 $\mathring{R}_{ij\mu\nu}=0$ 是应变张量分量的方程, 称为应变的协调方程. 利用公式 (5.52), 它们可以容易地写为展开的形式. 例如, 如果在当前应变状态选取笛卡儿直线 (一般非正交) 坐标系, 则 $\partial\hat{g}_{\alpha\beta}/\partial\xi^j=0$, 所以协调方程 $\mathring{R}_{ij\mu\nu}=0$ 可以写为

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{\nu i}}{\partial\xi^j\partial\xi^\mu}+\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu j}}{\partial\xi^i\partial\xi^\nu}-\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu i}}{\partial\xi^j\partial\xi^\nu}-\frac{\partial^2\varepsilon_{\nu j}}{\partial\xi^i\partial\xi^\mu}-\mathring{g}^{\alpha\omega}(G_{\omega\mu j}G_{\alpha\nu i}-G_{\omega\mu i}G_{\alpha\nu j})=0,\quad(5.54)$$

式中

$$G_{\nu\alpha j}=\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\nu}}{\partial\xi^j}+\frac{\partial\varepsilon_{j\nu}}{\partial\xi^\alpha}-\frac{\partial\varepsilon_{\alpha j}}{\partial\xi^\nu},$$

而分量 $\mathring{g}^{\alpha\omega}$ 定义为以 $\hat{g}_{\alpha\omega}-2\varepsilon_{\alpha\omega}$ 为元素的矩阵的逆矩阵的元素,

$$(\mathring{g}^{\alpha\omega})=(\hat{g}_{\alpha\omega}-2\varepsilon_{\alpha\omega})^{-1}.$$

当初始状态的拉格朗日坐标系是直线坐标系且 $\mathring{g}_{\alpha\beta}=\text{const}$ 时, 协调方程 $\hat{R}_{ij\mu\nu}=0$ 可以类似地写出.

方程 (5.54) 是 6 个函数 $\varepsilon_{\alpha\beta}(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3)$ 的二阶偏微分方程, 对二阶导数是线性的, 对一阶导数是非线性的.

当角标 $i,\ j,\ \mu,\ \nu$ 遍取 1, 2, 3 中所有可能的值时, 方程组 (5.54) 只由 6 个独立的方程构成. 显然, 把 ε_{ij} 通过 w_α 表示的公式 (5.45) 是协调方程组 (5.54) 的通解.

无穷小变形的协调方程

在无穷小变形的情况下, 协调方程 (5.54) 的形式为

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{\nu i}}{\partial\xi^j\partial\xi^\mu}+\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu j}}{\partial\xi^i\partial\xi^\nu}-\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu i}}{\partial\xi^j\partial\xi^\nu}-\frac{\partial^2\varepsilon_{\nu j}}{\partial\xi^i\partial\xi^\mu}=0. \tag{5.55}$$

这些方程称为圣维南协调方程. 直接把公式 (5.46) 代入方程 (5.55) 即可验证, 对于任意 3 个函数 w_α, 公式 (5.46) 都是 (5.55) 的通解.

在无穷小变形的情况下, 协调方程 (5.55) 是 ε_{ij} 的 6 个独立的二阶线性偏微分方程.

这样, 如果对连续介质的初始状态与当前状态可以引入位移矢量 $\boldsymbol{w}$, 就应当成立协调方程, 并且 ε_{ij} 通过 $\boldsymbol{w}$ 的分量的表达式可以视为这些方程的通解.

现在详细研究连续介质在运动时发生变形的几何描述.

刚体运动时的变换

首先考虑刚体的运动. 取刚体的任意两个位置 I 与 II (图 14), 设 M 与 M' 是刚体任意同一个点的两个位置. 利用刚体的平动可以使点 M' 与点 M 重合. 我们知道, 当刚体的某一点 M 不动时, 刚体的任何运动都是围绕经过点 M 的某个轴的简单旋转.

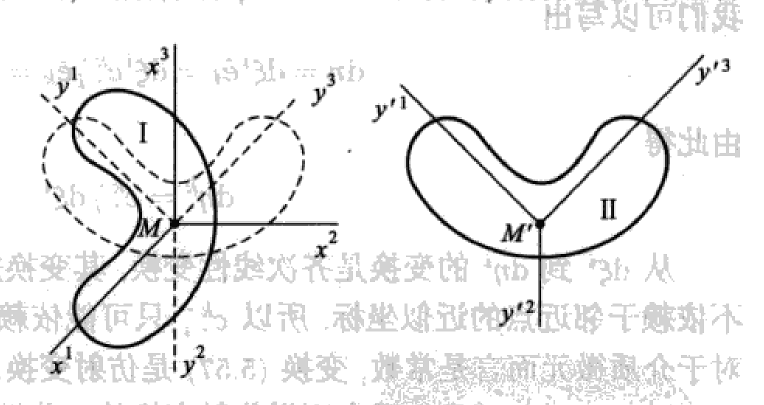


图 14. 刚体运动时的变换

在位置 I, 取原点位于点 M 且冻结于刚体中的坐标轴 x^1, x^2, x^3. 在位置 II, 它们移动至轴 y'^1, y'^2, y'^3, 而原点移动至点 M' (见图 14). 用 y^1, y^2, y^3 表示轴 y'^1, y'^2, y'^3 从点 M' 平移至点 M 后的位置. 从 x^i 到 y^i 的旋转变换可以写为 $y^i=c^i_{\cdot j}x^j$, 其中 $(c^i_{\cdot j})$ 是对刚体所有的点都相同的正交矩阵. 因此, 刚体的任意运动 (不计平动) 对应于某个正交变换.

现在设物体能够变形, 这时出现的变换具有最一般的形式. 我们只假设此变换满足对坐标的单值性、连续性和可微性.

连续介质微元运动时的变换

如果考虑连续介质物质点 M 的无穷小邻域, 则精确到一阶小量可以认为该变换是仿射变换. 我们来证明这个结论. 在时刻 t_0, 拉格朗日坐标系在点 M 的基矢量表示为 $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$, 点 M 的

邻域内所有点的位置完全由 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ 给出, 并且

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0 = \mathrm{d}\xi^i \mathring{\boldsymbol{e}}_i.$$

在我们所研究的时刻 t, 点 M 移动至点 M', 其邻域内所有点的位置由矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 给出, 它的分量在基 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 中也等于 $\mathrm{d}\xi^i$, 即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\xi^i \hat{\boldsymbol{e}}_i.$$

如果使点 M 与点 M' 重合, 并把 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 按基矢量 $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$ 分解, 则此分解式中的分量将不等于 $\mathrm{d}\xi^i$. 把这些分量表示为 $\mathrm{d}\eta^i$, 于是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\eta^i \mathring{\boldsymbol{e}}_i.$$

$\mathrm{d}\eta^i$ 与 $\mathrm{d}\xi^i$ 之间的关系就决定了连续介质微元的变换 [1], 此变换由以下等式求出:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\xi^i \hat{\boldsymbol{e}}_i = \mathrm{d}\eta^i \mathring{\boldsymbol{e}}_i.$$

根据 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$, $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$ 与 $\boldsymbol{w}$ 之间的关系式 (5.30),

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i = \mathring{\boldsymbol{e}}_i + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} = \mathring{\boldsymbol{e}}_i + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \mathring{\boldsymbol{e}}_k = (\delta_i^k + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k)\mathring{\boldsymbol{e}}_k = c^{k}_{\cdot\, i} \mathring{\boldsymbol{e}}_k,$$

式中

$$c^{k}_{\cdot\, i} = \delta_i^k + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k, \tag{5.56}$$

我们可以写出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\xi^i \hat{\boldsymbol{e}}_i = \mathrm{d}\xi^i c^{k}_{\cdot\, i} \mathring{\boldsymbol{e}}_k = \mathrm{d}\eta^k \mathring{\boldsymbol{e}}_k,$$

由此得

$$\mathrm{d}\eta^k = c^{k}_{\cdot\, i}\, \mathrm{d}\xi^i. \tag{5.57}$$

从 $\mathrm{d}\xi^i$ 到 $\mathrm{d}\eta^i$ 的变换是齐次线性变换, 其变换矩阵 $(c^{k}_{\cdot\, i})$ 不依赖于微分 $\mathrm{d}\xi^i$, 即不依赖于邻近点的近似坐标, 所以 $c^{k}_{\cdot\, i}$ 只可能依赖于点 M 的坐标. 因此, 系数 $c^{k}_{\cdot\, i}$ 对于介质微元而言是常数, 变换 (5.57) 是仿射变换.

仿射变换的性质 我们现在列举仿射变换的一些性质, 它们可以从公式 (5.57) 的线性性质直接推出.

经过仿射变换后, 直线变换为直线, 平面变换为平面, 并且平行的直线与平面变换为平行的直线与平面. 例如, 平行四边形变换为平行四边形. 由此可知, 所有大小与方向均相同的线段都按照同样的方式伸长 (或缩短).

任何线段在变形前后的长度比与线段的初始长度无关, 只依赖于其方向 (因为它是一阶齐次函数之比). 由此可知, 任何线段的相对伸长因数也与线段的长度无关, 只依赖于其方向.

[1] 对于介质微元, $\mathrm{d}\eta^i$ 与 $\mathrm{d}\xi^i$ 可视为在基为 $\mathring{\boldsymbol{e}}_i$ 的同一个斜角坐标系中的笛卡儿坐标.

线段必定变换为线段, 并且它被点分割的比例保持不变.

代数曲线或曲面变换为同次曲线或曲面. 例如, 二次曲面变换为二次曲面: 球面变换为椭球面或球面, 并且球面的共轭直径变换为共轭直径. 球面的所有共轭直径都是正交的, 而椭球面在一般情况下具有唯一的一组 (共 3 条) 正交共轭直径, 所以必定至少存在一个正交三面体, 它仍然变换为正交三面体, 即应变张量的主轴是存在的.

在仿射变换下, 体积一般而言会发生变化, 但其相对变化量 $\theta = (V - V_0)/V_0$ 与相应几何体的初始形状与大小无关.

正是因此, 当采用平行六面体通过应变张量的分量来计算体积相对变化量的时候, 我们得到的结果对于任何体微元都是正确的.

连续介质微元变换的几何描述

连续介质的任何无穷小球面在变形时都变换为椭球面. 在这个变换中, 如果主方向在空间中的方位不变, 则称发生了纯变形, 它归结为沿 3 个互相垂直的主轴方向的膨胀或压缩.

球面变换为椭球面后, 如果主方向在空间中的方位发生变化, 则称发生了一般情况的仿射变换, 它归结为纯变形 (沿 3 个主轴的膨胀) 和在空间中的旋转. 我们指出, 在纯变形的情况下, 介质微元中与主轴方向不同的任何线段一般而言都要改变它在空间中的方向.

当微元像刚体那样运动时, 球面变换为同半径的球面, 并且所有互相垂直的三面体都可以视为主三面体, 所有这些三面体都相对于同一个轴旋转相同的角度. 这时, 我们称发生了纯旋转.

由 (5.56), 仿射变换的矩阵 $(c^{k}_{\cdot i})$ 决定于位移矢量 $\boldsymbol{w}$ 的分量对坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3 的 9 个导数, 所以在给定点, 该矩阵在一般情况下由任意 9 个数组成. 表征纯变形的是应变张量的 3 个主分量和确定主轴的空间方向的 3 个参数 (或者应变张量的 6 个分量), 而剩下的 3 个参数则表征主轴在空间中的旋转. 在纯旋转的情况下, 矩阵是正交的, 它只依赖于 3 个独立参数 (旋转轴的方向和旋转角).

这样, 连续介质微元的任意运动都归结为在空间中的平动、转动与纯变形 (沿 3 个互相垂直的主轴的压缩或膨胀).

变形的几何特征量对固体一般很重要, 而在流体中, 这些特征量本身的作用就小得多. 例如当液体从一个容器倒入另一个容器后, 液体 (如果它是均匀的) 还是原来的液体, 尽管在倾倒时, 在液体中会发生程度要多高就有多高的复杂而强烈的变形. 在流体中, 变形的一些性质只有通过体积的改变才会明显地表现出来. 流体会阻碍压缩, 被压缩的流体有别于不被压缩的情况.

应变张量在可变形固体理论中具有主要的和决定性的意义, 但在液体和气体运动的理论——流体力学 (以及某些固体的变形理论) 中, 具有更大意义的是另一个特征量——应变率张量. 变形本身可能无关紧要, 重要的是发生变形的速度有多快.

§6. 应变率张量

应变率张量的定义 引入应变张量

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij}) \tag{6.1}$$

关系到连续介质的两个状态: 当前所考虑的状态 $\hat{g}_{ij}$ 和一般而言的"初始状态" $\mathring{g}_{ij}$. 如果初始状态 $\mathring{g}_{ij}$ 可以在实际中实现, 那么对于连续介质所有的点, 与 t_0 时刻的初始状态和 t 时刻的当前状态相对应的位移矢量 $\boldsymbol{w}$ 就是存在的, 并且应变张量满足公式 (5.44) 和 (5.45). 除了连续介质的这两种状态, 我们还考虑接近当前时刻的 $t+\Delta t$ 时刻的状态, 并把其度规张量的分量表示为 $\hat{g}'_{ij}$. 显然, 可以相对于连续介质在 t 与 $t+\Delta t$ 时刻的状态引入应变张量的分量, 并用 $\Delta\varepsilon_{ij}$ 来表示这些分量. 我们有

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}'_{ij} - \hat{g}_{ij}) = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w^p \nabla_j w_p), \tag{6.2}$$

式中 $\boldsymbol{w} = w_i\hat{\boldsymbol{e}}^i$, 并且协变导数是在初始空间 $\hat{g}_{ij}$ 中计算的. 因为与 t 和 $t+\Delta t$ 时刻的状态相对应的位移 $\boldsymbol{w}$ 是存在的, 所以式 (6.2) 成立. 显然

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}\Delta t = v_i\hat{\boldsymbol{e}}^i\Delta t,$$

即 $w_i = v_i\Delta t$ 的量级是 Δt. 若 Δt 是无穷小量, 则 w_i 是无穷小位移. 因此,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) = e_{ij}. \tag{6.3}$$

量 e_{ij} 是一个对称张量的分量, 这个张量称为应变率张量. 如果已知速度场 $\boldsymbol{v}$, 就可以按照 (6.3) 来计算分量 e_{ij}. 显然, 公式 $e_{ij} = (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)/2$ 的形式在任何运动的曲线坐标系中都保持不变, 因为矢量 $\boldsymbol{v}$ 是借助于观察者所用参考系和随体坐标系确定的, 它们是研究连续介质运动的基础.

应变张量和应变率张量的分量之间的联系 直接由 (6.2) 可知, 对于应变率张量的分量, 在随体坐标系中成立公式

$$\hat{e}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\hat{g}_{ij}}{\mathrm{d}t}. \tag{6.4}$$

如果"初始状态" $\mathring{g}_{ij}$ 不依赖于时间 t, 则利用 (6.1), 由 (6.3) 易得

$$\hat{e}_{ij} = \frac{\mathrm{d}\hat{\varepsilon}_{ij}}{\mathrm{d}t}. \tag{6.5}$$

此公式给出了应变张量和应变率张量在随体坐标系中的分量之间的联系.

我们再次强调, 式 (6.5) 仅仅在 $\mathring{g}_{ij}$ 与时间无关时才成立, 而根据 $\hat{e}_{ij}$ 的定义, 式 (6.4) 永远成立.

应变张量与应变率张量是不同的张量, 但 $e_{ij}\Delta t$ 是在 Δt 时间内发生的位移所

对应的无穷小变形的应变张量的分量, 即

$$e_{ij}\Delta t = \varepsilon_{ij}. \tag{6.6}$$

我们指出, 应变张量 $\mathscr{E}$ 是在比较连续介质的两个状态后引入的, 而应变率张量则是当前给定时刻的状态的特征量.

应变率张量的分量的协调条件

显然, 应变张量的分量 (6.6) 应满足协调条件. 把 (6.6) 代入 (5.54) 并在 $\Delta t \to 0$ 时取极限, 得应变率张量分量的如下协调条件 (笛卡儿坐标):

$$\frac{\partial^2 e_{\nu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 e_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 e_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 e_{\nu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0. \tag{6.7}$$

同方程组 (5.55) 一样, 方程组 (6.7) 也包括 6 个独立的二阶线性偏微分方程. 从 (5.53) 所指出的角标组合可得相应的独立方程. 公式 (6.3) 对于任意 3 个函数 v_i 都给出方程组 (6.7) 的通解.

可以类似于应变率张量那样引入其他张量, 其分量是 ε_{ij} 对 t 的更高阶的导数. 还可以考虑这样的张量, 其分量是 ε_{ij} 对空间坐标的导数, 例如张量 $\nabla_k \varepsilon_{ij} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j \boldsymbol{e}^k$.

§7. 连续介质微元中的速度分布

连续介质微元经过 Δt 时间的无穷小仿射变换

取一个连续介质微元, 我们来研究其中的速度分布问题. 我们在这里把介质微元理解为介质中坐标为 $\xi^i + \mathrm{d}\xi^i = \xi^i + \rho^i$ 的点的集合, 这些点与坐标为 ξ^1, ξ^2, ξ^3 的给定点 O 相差无穷小距离 ρ. 点 O 称为介质微元的中心. 假设速度场 $\boldsymbol{v}$ 连续并且至少有一阶导数.

设点 O 的速度为 $\boldsymbol{v}_0$, 介质微元任意一点 O_1 的速度为 $\boldsymbol{v}_1$. 由介质中相同的点组成的矢量 $\overline{OO_1} = \boldsymbol{\rho}$ 经过无穷小的 Δt 时间后移动至矢量 $\overline{O'O'_1} = \boldsymbol{\rho}'$. 显然 (图 15),

$$\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0)\Delta t. \tag{7.1}$$

在点 O 的邻域展开 $\boldsymbol{v}$, 精确到 $\boldsymbol{\rho}$ 的一阶小量有

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \xi^i}\right)_0 \rho^i + \rho \boldsymbol{O}(\rho), \quad \lim_{\rho\to 0} \boldsymbol{O}(\rho) = 0. \tag{7.2}$$

图 15. 连续介质微元经过 Δt 时间后的位移

把 (7.2) 代入 (7.1), 得

$$\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \xi^i}\right)_0 \rho^i \Delta t + \rho \boldsymbol{O}(\rho)\Delta t.$$

由此可见, 精确到 $\rho\Delta t$ 阶小量, 连续介质微元经过无穷小的 Δt 时间后发生了无穷小仿射变换 ($\boldsymbol{v}$ 对 ξ^i 的导数值取自微元中心 O).

可变形连续介质微元中的速度分布

等式 (7.2) 把连续介质微元中任意点 O_1 的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 通过微元中心的速度 $\boldsymbol{v}_0$、速度 $\boldsymbol{v}$ 对坐标的导数在微元中心的值和该点的坐标表示出来. 我们把它写为另外一种形式:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{v}_0 + \nabla_i v_k \rho^i \boldsymbol{e}^k + \rho \boldsymbol{O}(\rho) \\
&= \boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2}(\nabla_i v_k + \nabla_k v_i)\rho^i \boldsymbol{e}^k + \frac{1}{2}(\nabla_i v_k - \nabla_k v_i)\rho^i \boldsymbol{e}^k + \rho \boldsymbol{O}(\rho) \\
&= \boldsymbol{v}_0 + e_{ki}\rho^i \boldsymbol{e}^k + \omega_{ki}\rho^i \boldsymbol{e}^k + \rho \boldsymbol{O}(\rho).
\end{aligned} \tag{7.3}
$$

在 (7.3) 最后一个式子中分别写出了含有对称张量 e_{ki} 与反对称张量 ω_{ki} 的项, 其中

$$
\omega_{ki} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_k - \nabla_k v_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial \xi^i} - \frac{\partial v_i}{\partial \xi^k}\right). \tag{7.4}
$$

现在考虑连续介质微元内诸点的速度公式 (7.3) 中每一项的运动学意义. 为此, 我们把 (7.3) 写为笛卡儿坐标轴上的投影, 使推导过程较为明显. 取

$$
\boldsymbol{\rho} = x^1\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + x^3\boldsymbol{k} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},
$$

得

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + e_{1i}x^i + \omega_{1i}x^i, \\
v_1 &= v_0 + e_{2i}x^i + \omega_{2i}x^i, \\
w_1 &= w_0 + e_{3i}x^i + \omega_{3i}x^i,
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

式中的分量 e_{ki} 与 ω_{ki} 不依赖于 x^i, 并且忽略了 x^i 的高阶项. 若引入二次型

$$
\Phi = \frac{1}{2}e_{pq}x^p x^q,
$$

则显然有

$$
e_{ki}x^i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}.
$$

公式 (7.5) 可以改写为

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} + \omega_{1i}x^i, \\
v_1 &= v_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} + \omega_{2i}x^i, \\
w_1 &= w_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} + \omega_{3i}x^i.
\end{aligned} \tag{7.6}
$$

因此, 在连续介质微元中, 诸点的速度由三部分组成: 第一部分 $\boldsymbol{v}_0$ (u_0, v_0, w_0) 不依赖于坐标 x^1, x^2, x^3, 所以是整个微元的平动速度 (等于微元中心的运动速度); 第二部分 $(\partial\Phi/\partial x^1, \partial\Phi/\partial x^2, \partial\Phi/\partial x^3)$ 具有势函数 Φ. 为了更详细地研究第三部分

$(\omega_{1i}x^i, \omega_{2i}x^i, \omega_{3i}x^i)$, 我们在笛卡儿坐标系中引入反对称矩阵

$$(\omega_{ji}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

即引入记号

$$\omega_1 = \omega_{32}, \quad \omega_2 = \omega_{13}, \quad \omega_3 = \omega_{21}. \tag{7.7}$$

根据 (7.4) 和 (7.7), 在笛卡儿坐标系中有

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{7.8}$$

直接验算即可证明, 公式 (7.8) 在形式上易从以下表达式得出:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{i} + \omega_2\boldsymbol{j} + \omega_3\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}. \tag{7.9}$$

按照 (7.7) 引入记号 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 后, 我们把公式 (7.6) 改写为

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \omega_2 z - \omega_3 y, \\ v_1 &= v_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \omega_3 x - \omega_1 z, \\ w_1 &= w_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \omega_1 y - \omega_2 x, \end{aligned}$$

或者根据 (7.9) 把它写为

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})_x, \\ v_1 &= v_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})_y, \\ w_1 &= w_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})_z. \end{aligned} \tag{7.10}$$

在矢量形式下, 最终我们有用来代替 (7.3) 和 (7.10) 的公式

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \operatorname{grad}\Phi + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \rho \boldsymbol{O}(\rho). \tag{7.11}$$

公式 (7.11) 与刚体速度分布的欧拉公式的比较 众所周知, 刚体的速度分布满足欧拉公式

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho},$$

式中, $\boldsymbol{v}_0$ 为刚体某一确定点 O 的速度, $\boldsymbol{v}_1$ 为刚体任意点 O_1 的速度, $\boldsymbol{\Omega}$ 为刚体的瞬时角速度矢量, $\boldsymbol{\rho}$ 为径矢 $\overline{OO_1}$. 连续介质微元诸点的速度公式 (7.11) 在形式上与欧拉公式的区别在于存在项 $\operatorname{grad}\Phi$ 和 $\rho\boldsymbol{O}(\rho)$, 其中最后一项与 $\boldsymbol{\rho}$ 相比是无穷小量, 在一阶近似下可以不予考虑.

相对伸长率 我们来解释 $\operatorname{grad}\Phi$ 这一项的意义. 矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 因连续介质运动而变为 $\boldsymbol{\rho}'$. 矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 的变化, 即 $\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}=\Delta\boldsymbol{\rho}$, 只能是由于介质微元中不同的点以不同的速度运动造成的. 事实上, 由 (7.1), 在 $\Delta t \to 0$ 时取极限, 有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0. \tag{7.12}$$

我们来计算介质中沿 $\boldsymbol{\rho}$ 方向的线段的相对伸长率:

$$e_\rho = \frac{1}{|\boldsymbol{\rho}|}\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{\rho}|}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho^2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\rho^2}\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho})}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho^2}\left(\boldsymbol{\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right).$$

利用等式 (7.12) 和 (7.11), 再注意到 $\boldsymbol{\rho}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}) = 0$, 得

$$\begin{aligned} e_\rho &= \frac{1}{\rho^2}\left(\boldsymbol{\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{\rho^2}(\boldsymbol{\rho}\cdot\operatorname{grad}\Phi) = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}z\right) \\ &= \frac{2\Phi}{\rho^2} = e_{ij}\frac{x^i}{\rho}\frac{x^j}{\rho} = e_{ij}\alpha^i\alpha^j, \end{aligned} \tag{7.13}$$

式中

$$\alpha^i = \frac{x^i}{\rho} = \cos(\boldsymbol{\rho}, x^i).$$

因此, 如果已知应变率张量的分量 e_{ij} 和方向 $\boldsymbol{\rho}$, 就可以计算沿这个方向的相对伸长率 e_ρ.

应变率张量的分量的运动学意义 式 (7.13) 直接给出应变率张量带相同角标的分量的运动学意义. 设 $\boldsymbol{\rho}$ 沿 x^i 轴方向, 则 (7.13) 右侧各项除一项外其余均为零, 故得

$$e_{x^i} = e_{ii}.$$

因此

$$e_x = e_{11}, \quad e_y = e_{22}, \quad e_z = e_{33},$$

即应变率张量带相同角标的分量就是介质中原先与相应笛卡儿正交坐标轴平行的线段的相对伸长率. 我们通过另外一种讨论也能得到这样的解释. 根据 (7.1), 经过 Δt 时间后, 连续介质微元相对于介质在 t 时刻的状态发生了无穷小变形, 所以相对于介质在 t 和 $t+\Delta t$ 时刻的状态可以引入应变张量 $\mathscr{E}$, 于是有

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij}\Delta t.$$

由此显见分量 e_{ij} 的运动学解释, 它与无穷小变形的应变张量的分量 ε_{ij} 只相差系数 Δt. 分量 ε_{ij} 在 $i \neq j$ 时表征介质中原先沿 x, y, z 坐标轴方向分布的线段之间所成直角的倾斜, 而分量 e_{ij} 在 $i \neq j$ 时等于介质中原先成直角而在当前时刻平行于相应坐标轴的线段之间的夹角的倾斜速度之半.

从 (7.13) 可见, 在连续介质微元诸点的速度公式 (7.11) 中, $\operatorname{grad}\Phi$ 这一项对应微元的变形. 引入记号

$$\boldsymbol{v}^* = \operatorname{grad}\Phi.$$

此速度称为纯变形速度. 如果 $\boldsymbol{v}^* = 0$, 则所有 $e_\rho = 0$, 从而不存在变形, 即沿任何方向 ρ 的线段, 其长度不发生变化. 相反, 如果没有变形, 则所有 $e_\rho = 0$, 进而由 (7.13) 有 $\operatorname{grad}\Phi = \boldsymbol{v}^* = 0$.

应变率张量的主轴与主分量

正如所有二阶对称张量那样, 对于应变率张量可以引入主轴. 在沿主轴方向的笛卡儿坐标系中, 应变率张量的分量 e_{ij} 的矩阵具有以下形式:

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}.$$

在任何给定时刻 t 和介质中任何点 O 都可以指出应变率张量的主轴. 量 e_1, e_2, e_3 称为应变率张量的主分量. 显然, $e_i > 0$ 对应着沿第 i 个轴的拉伸, 而 $e_i < 0$ 对应着沿第 i 个轴的压缩.

还可以像所有对称张量那样把应变率张量与张量面联系起来. 若所有 e_i 同号, 则张量面是椭球面; 若 e_i 异号, 则张量面是双曲面. 应变张量与应变率张量的主轴一般是不同的.

矢量 ω · 三维空间中反对称张量与矢量的关系

考虑公式 (7.11) 中的第三项, 即 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$. 我们首先证明, 前面在笛卡儿坐标系中引入的量 $\boldsymbol{\omega}$ 是矢量. 其实, 公式 (7.11) 是矢量等式, 所以 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ 是矢量, 标积 $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{c}$ 则是不变量, 其中 $\boldsymbol{c}$ 是任意矢量. 显然, 书写不变量 $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{c}$ 时可以改变相乘的次序, 它可以写为 $\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ 是任意矢量. 因为 $\boldsymbol{\omega}$ 与任意矢量 $\boldsymbol{b}$ 的标积是不变量, 所以 $\boldsymbol{\omega}$ 是矢量. 按照矢量分量的一般变换规则, 可以利用 (7.8) 求出任意曲线坐标系中的 ω_i.

由以上讨论可知, 速度场 $\boldsymbol{v}$ 总可以与张量 $e_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$ 和矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 相联系.

我们从 $\boldsymbol{\omega}$ 的引入方法中得出一个一般结论: 三维空间中任何一个二阶反对称张量 $\boldsymbol{\Omega} = \omega_{ik}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^k$ 总可以与矢量 $\boldsymbol{\omega}$[1] 相联系, 使得 $\boldsymbol{\Omega}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 在笛卡儿坐标系中的分量之间的关系由公式 (7.7) 给出.

---

[1] 我们指出, $\boldsymbol{\omega}$ (以及极矢量的矢积 $\boldsymbol{b}$) 并非在所有坐标变换中都像普通的极矢量那样变换. 参见 131—132 页.

无穷小仿射变换的可交换性

我们在前面已经证明, 连续介质微元在连续运动时在无穷小的 $\mathrm{d}t$ 时间内发生了无穷小的仿射变换, 该变换现在可以写为

$$\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + \operatorname{grad}\Phi\,\mathrm{d}t + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}t + \rho\boldsymbol{O}(\rho)\,\mathrm{d}t, \tag{7.14}$$

其中第二、三项是 $\rho\,\mathrm{d}t$ 阶小量. 等式 (7.14) 可以改写为

$$x'^i = (\delta^i_j + c^{i\cdot}_{\cdot j})x^j = x^i + c^{i\cdot}_{\cdot j}x^j,$$

其中 x'^i 和 x^i 分别是 $\boldsymbol{\rho}'$ 和 $\boldsymbol{\rho}$ 的分量, 系数 $c^{i\cdot}_{\cdot j}$ 是 $\mathrm{d}t$ 阶的量.

我们记得, 无穷小的介质微元在变形有限时也发生仿射变换, 但变换是有限的, 其矩阵为 (5.56). 假设我们有按次序进行的两个仿射变换:

$$x'^i = (\delta^i_j + a^{i\cdot}_{\cdot j})x^{*j}, \tag{7.15}$$

$$x^{*j} = (\delta^j_p + b^{j\cdot}_{\cdot p})x^p. \tag{7.16}$$

如果先进行变换 (7.16), 再进行变换 (7.15), 则变换结果为

$$x'^i = (\delta^i_p + a^{i\cdot}_{\cdot p} + b^{i\cdot}_{\cdot p} + a^{i\cdot}_{\cdot j}b^{j\cdot}_{\cdot p})x^p.$$

相反, 如果先完成变换 (7.15), 再完成变换 (7.16), 则得

$$x'^i = (\delta^i_p + a^{i\cdot}_{\cdot p} + b^{i\cdot}_{\cdot p} + b^{i\cdot}_{\cdot j}a^{j\cdot}_{\cdot p})x^p.$$

但是由于一般 $a^{i\cdot}_{\cdot j}b^{j\cdot}_{\cdot p} \neq b^{i\cdot}_{\cdot j}a^{j\cdot}_{\cdot p}$, 所以仿射变换在一般情况下是不可交换的. 不过, 如果仿射变换是无穷小的, 则矩阵 $(a^{i\cdot}_{\cdot j}b^{j\cdot}_{\cdot p})$ 和 $(b^{i\cdot}_{\cdot j}a^{j\cdot}_{\cdot p})$ 的元素是二阶小量, 因此, 无穷小仿射变换精确到一阶小量是可交换的.

把连续介质微元在 $\mathrm{d}t$ 时间内的变换分解为最简单的变换之和

现在回到描述介质微元变换的公式 (7.14). 该变换可以分解为 2 个变换, 即应变率张量所定义的变换

$$\boldsymbol{\rho}^* = \boldsymbol{\rho} + \operatorname{grad}\Phi\,\mathrm{d}t \tag{7.17}$$

和矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 所定义的变换

$$\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}^* + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}^*)\,\mathrm{d}t, \tag{7.18}$$

且变换的次序可不予考虑.

二次型 $\Phi = e_{ij}x^ix^j/2$ 可以化为正则形式

$$\Phi = \frac{1}{2}(e_1x^2 + e_2y^2 + e_3z^2).$$

变换 (7.17) 在主轴下可以写为

$$x^* = (1 + e_1\,\mathrm{d}t)x, \quad y^* = (1 + e_2\,\mathrm{d}t)y, \quad z^* = (1 + e_3\,\mathrm{d}t)z,$$

式中

$$e_1 \approx \frac{x^* - x}{x\,\mathrm{d}t}, \quad e_2 \approx \frac{y^* - y}{y\,\mathrm{d}t}, \quad e_3 \approx \frac{z^* - z}{z\,\mathrm{d}t}$$

是主伸长率 ($e_i > 0$) 或者主压缩率 ($e_i < 0$). 变换 (7.17) 显然可以替换为 3 个形如

$$x^{**} = (1 + e_1\,\mathrm{d}t)x, \quad y^{**} = y, \quad z^{**} = z \tag{7.19}$$

的变换, 其中每个变换都是沿一个主轴的纯膨胀或者纯压缩.

这样, 连续介质微元的任何无穷小变形都可以分解为 4 个变换: 一个是矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 所决定的变换 (7.18), 另外 3 个变换 (7.19) 表示沿互相垂直的 3 个主轴的纯伸长, 并且与介质微元发生有限变形的情况不同的是, 完成上述变换的次序并不重要.

我们指出, 尽管所有讨论都是对从微元中心 O 出发的矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 进行的, 但是根据仿射变换的性质, 对于所有平行的线段, 其长度的相对变化是相同的, 所以 (不从点 O 出发的) 任意的小矢量都会进行同上所述的变换. 平行于 x 轴的所有小矢量的相对伸长都等于 $e_1\,\mathrm{d}t$, 平行于 y 轴和 z 轴的所有小矢量的相对伸长则分别都等于 $e_2\,\mathrm{d}t$ 和 $e_3\,\mathrm{d}t$. 对于任意矢量 $\boldsymbol{\rho}$, 其单位长度上的伸长为 $e_\rho \mathrm{d}t$.

涡量及其运动学意义 现在给出矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的运动学意义. 取矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 所决定的变换 (7.18), 该变换使矢量 $\boldsymbol{\rho}^*$ 发生变化. 令

$$\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}^* = \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^*.$$

根据 (7.18), 标积 $\boldsymbol{\rho}^* \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^*$ 等于零, 即矢量 $\boldsymbol{\rho}^*$ 的变化垂直于矢量 $\boldsymbol{\rho}^*$ 本身, 从而所有 $e_{\rho^*} = 0$. 因此, 介质微元在变换 (7.18) 下就如刚体一般, 于是我们可以这样来解释 $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}^*)\,\mathrm{d}t$, 它相当于介质微元在发生变形之前或之后突然固化, 并以瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 进行旋转所形成的位移. 这样, 矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 应当解释为介质微元在 $\mathrm{d}t$ 时间内像刚体那样旋转的瞬时角速度, 即应变率张量的主轴三面体的瞬时旋转角速度. 因此, 矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 是应变率张量主轴的瞬时旋转角速度, 我们把它称为速度的涡量[1].

当介质微元发生有限变形的时候, 运动也归结为旋转与纯变形. 若已知仿射变换矩阵 $(c^i_{\cdot j})$ 的元素, 就能求出旋转矢量, 但这个问题很复杂. 连续介质微元在 $\mathrm{d}t$ 时间内的运动由无穷小仿射变换来描述, 此时旋转矢量等于 $\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t$.

连续介质微元诸点速度分解的柯西–亥姆霍兹定理 最后, 我们来总结以上所有讨论的结果, 并表述连续介质微元诸点速度分解的柯西–亥姆霍兹定理. 由 (7.11), 在以点 O 为中心的连续介质微元中, 任何点 O_1 的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 等于

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathrm{grad}\,\Phi = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_{\mathrm{rot}} + \boldsymbol{v}^*,$$

它由微元像刚体那样运动的平动速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和转动速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rot}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$, 以及纯变形速度 $\boldsymbol{v}^* = \mathrm{grad}\,\Phi$ 叠加而成.

速度的散度 现在引入速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的散度的概念. 在 t 时刻取由连续介质的点组成的无穷小球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

[1] 在很多文献中, 涡量定义为 2ω, 即 (7.9) 中的行列式称为涡量. ——译注

它经过 Δt 时间后变为椭球面, 其方程在主轴下显然为

$$\frac{x^{*2}}{(1+e_1\Delta t)^2}+\frac{y^{*2}}{(1+e_2\Delta t)^2}+\frac{z^{*2}}{(1+e_3\Delta t)^2}=R^2$$

(此时, 球面必定变为椭球面, 或者在个别情况下变为球面, 因为 $e_i\Delta t$ 与 1 相比是小量).

我们来研究该无穷小球体的体积经过 Δt 时间后如何变化. 显然, 其体积在 t 时刻为 $V_0=4\pi R^3/3$, 而在 $t+\Delta t$ 时刻, 由介质中同样这些点组成的椭球的体积为

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3(1+e_1\Delta t)(1+e_2\Delta t)(1+e_3\Delta t).$$

写出并计算介质无穷小体积的相对变化在 $\Delta t\to 0$ 且 $V_0\to 0$ 时的极限, 有

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ V_0\to 0}}\frac{V-V_0}{V_0\Delta t}=e_1+e_2+e_3. \tag{7.20}$$

和 $e_1+e_2+e_3$ 显然是不变量——应变率张量的第一不变量. 我们知道, 这个不变量可以通过应变率张量在任意坐标系中的分量表示如下:

$$e_1+e_2+e_3=e^{\alpha}_{\cdot\,\alpha}=g^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}.$$

从 e_{ij} 的定义 (6.3) 可以看出

$$e^{\alpha}_{\cdot\,\alpha}=\nabla_\alpha v^\alpha.$$

按照定义, 不变量 $\nabla_\alpha v^\alpha$ 称为速度矢量的散度, 用 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ 表示:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\nabla_\alpha v^\alpha. \tag{7.21}$$

在笛卡儿坐标系中显然有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

等式 (7.20) 是为了计算无穷小球体体积 V_0 的相对变化率而写出的. 由仿射变换的上述一般性质可知, 该变化率与微元所占空间区域 V_0 的形状无关.

§8. 斯托克斯定理和奥－高定理以及矢量场的某些相关性质

矢量的旋度与散度 设我们有某个连续的矢量场 $\boldsymbol{A}$, 且矢量 $\boldsymbol{A}$ 具有对坐标的一阶导数. 对场 $\boldsymbol{v}$ 进行的所有讨论都可以重复于场 $\boldsymbol{A}$, 从而得到

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}+\operatorname{grad}\Psi+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\rho}+\rho\boldsymbol{O}(\rho),$$

其中

$$\Psi=\frac{1}{2}a_{ij}x^ix^j,\quad a_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_i A_j+\nabla_j A_i),$$

并且在笛卡儿坐标系中有

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}. \tag{8.1}$$

这个行列式也可以这样组成, 此时只要用 x, y, z 的某 3 个可微函数 P, Q, R 来代替矢量的分量 A_1, A_2, A_3 (在固定的坐标系中, 任意 3 个数可以视为矢量的分量). 若 $\boldsymbol{A}$ 是矢量, 则式 (8.1) 所定义的矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度, 表示如下:

$$\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}.$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度可以类似于 (7.21) 那样定义为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla_\alpha A^\alpha,$$

或者在笛卡儿坐标系中定义为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}.$$

这样, 可以认为涡量等于速度矢量的旋度之半,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}.$$

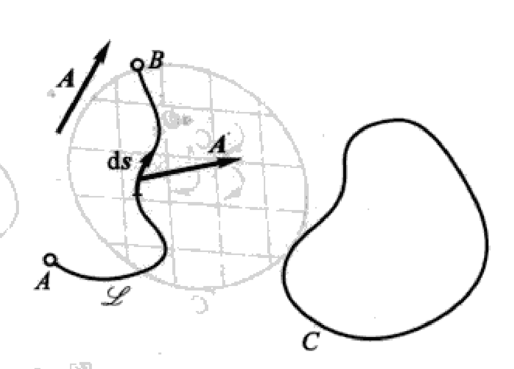


图 16. 用于定义环量

矢量的环量 在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的定义域中取某不封闭曲线 $\mathscr{L}$ 或封闭曲线 C (图 16), 并组成标积 $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$, 其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 是曲线 $\mathscr{L}$ 或 C 的具有方向的线微元. 这个标积显然是不变量. 作积分

$$\int_{AB} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \Gamma,$$

并且应当指明沿曲线进行积分的方向. 这样引入的标量 Γ 称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿曲线 $\mathscr{L}$ 的环量. 在一般情况下, 环量 Γ 与用来计算它的曲线 $\mathscr{L}$ 有关. 显然,

$$\Gamma_{AB} = -\Gamma_{BA}.$$

如果矢量 $\boldsymbol{A}$ 是连续介质诸点的速度 $\boldsymbol{v}$, 则

$$\Gamma = \int_{AB} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{AB} u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z$$

称为速度的环量.

设速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 有势, $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$, 则

$$\Gamma = \int_{AB} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{AB} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \mathrm{d}s = \varphi_B - \varphi_A.$$

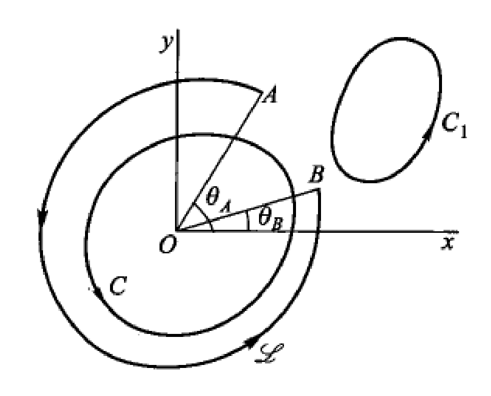


图 17. 情况 (8.2) 的环量: $\Gamma_C = 2\pi k$, $\Gamma_{C_1} = 0$, 而当曲线绕 O 点 n 周时 $\Gamma_C = 2\pi kn$

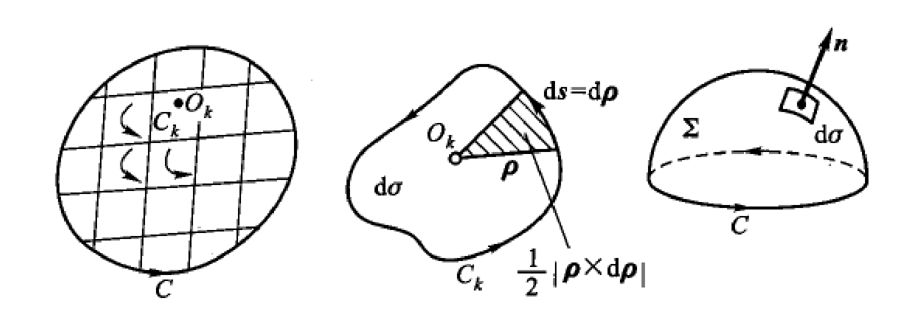


图 18. 用于推导斯托克斯定理

由此可见, 在有势运动的情形下, 速度的环量取决于点 A 和 B 的坐标. 若势函数 φ 是坐标的单值函数, 则 Γ 的值与曲线 $\mathscr{L}$ 的形状无关. 例如, 当 $\varphi = Q/4\pi r$, $Q = \text{const}$ 时, Γ 与 $\mathscr{L}$ 无关, 且由此可知, 这时沿封闭曲线 C 的环量为零, $\Gamma_C = 0$. 而如果

$$\varphi = k\theta = k\,\text{Arctan}\,\frac{y}{x}, \quad k = \text{const}, \tag{8.2}$$

则

$$\varphi_B - \varphi_A = k(\theta_B - \theta_A).$$

由此可知, 这时存在包围坐标原点的封闭曲线 C, 沿该曲线的环量不等于零 (图 17).

斯托克斯定理 现在设速度 $\boldsymbol{v}$ 无势. 取封闭曲线 C, 假设在这条曲线上可以张起一个光滑的曲面 Σ, 使场 $\boldsymbol{v}$ 在曲面上连续可微, 亦即假设封闭曲线 C 可以在 $\boldsymbol{v}$ 的连续可微区域内收缩至一点. 按图 18 所示方法用许多封闭曲线 C_k 分隔曲面 Σ, 有

$$\Gamma = \int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} = \sum_k \int_{C_k} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}. \tag{8.3}$$

这个等式是显然的, 因为沿曲线 C_k 的公共边取的积分在求和时由于方向相反而互相抵消 (图 18).

可以把 C_k 取为任意小的封闭曲线, 于是在计算 $\Gamma_{C_k} = \int\limits_{C_k} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}$ 时可以认为曲

线 C_k 上的速度 $\boldsymbol{v}$ 由柯西–亥姆霍兹定理确定,

$$\boldsymbol{v}_{C_k} = \boldsymbol{v}_{O_k} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \operatorname{grad} \Phi + \rho \boldsymbol{O}(\rho),$$

这是以曲面 Σ 上的封闭曲线 C_k 内部某点 O_k 为中心的连续介质微元诸点的速度分解公式. 在计算 Γ_{C_k} 时, $\boldsymbol{v}_{O_k}$ 和 $\operatorname{grad} \Phi$ 这两项等于零, 因为它们是有势矢量, 并且势函数是单值的, 而项 $\rho \boldsymbol{O}(\rho)$ 的贡献与 $\int_{C_k} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 相比是高阶小量. 容易证明 (参见图 18):

$$\int_{C_k} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{C_k} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} = \int_{C_k} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\rho} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\rho})$$

$$= \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{C_k} \boldsymbol{\rho} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} = 2\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = 2\omega_n \, \mathrm{d}\sigma. \tag{8.4}$$

因为在无穷小封闭曲线 C_k 的极限情况下, 矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 可以当作常量 (它只与 O_k 有关); 积分 $\int_{C_k} \boldsymbol{\rho} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}$ 的大小等于 $2\,\mathrm{d}\sigma$, 其方向为 $\mathrm{d}\sigma$ 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ 是单位法向矢量), 并且从 $\boldsymbol{n}$ 所指的方向看, 从 $\boldsymbol{\rho}$ 到 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}$ 的旋转方向为逆时针方向; 最后, 曲面 Σ 张于无穷小封闭曲线 C_k 的部分可以认为是平的.

现在, 由 (8.3) 和 (8.4), 在 $k \to \infty$ 且 C_k 收缩至一点时取极限, 得公式

$$\int_C v_s \, \mathrm{d}s = 2 \int_\Sigma \omega_n \, \mathrm{d}\sigma, \tag{8.5}$$

即沿封闭曲线 C 的速度环量等于涡量在该曲线张起的曲面 Σ 上的通量的 2 倍. 这个公式称为斯托克斯定理. 我们强调, (8.5) 中的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 应当这样选取, 使曲线 C 的环绕方向从法线的端点看为逆时针方向.

显然, 斯托克斯定理不仅对连续介质的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 成立, 而且对满足连续可微这个必要条件的任何其他矢量 $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}^i$ 也成立. 现在对矢量 $\boldsymbol{A}$ 写出斯托克斯定理的不同形式:

$$\int_C A_s \, \mathrm{d}s = \int_C A_i \, \mathrm{d}x^i = \int_\Sigma (\operatorname{rot} \boldsymbol{A})_n \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \cos(\boldsymbol{n}, x) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \cos(\boldsymbol{n}, y) + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \cos(\boldsymbol{n}, z) \right] \mathrm{d}\sigma.$$

有势运动与无旋运动 连续介质在某区域内的运动称为无旋的, 如果在该区域内的所有点 $\boldsymbol{\omega} = 0$. 如果在全部或部分区域内 $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, 运动就称为有旋的. 在无旋运动的情况下, 在给定时刻沿应变率张量的主轴分布的细线在无穷

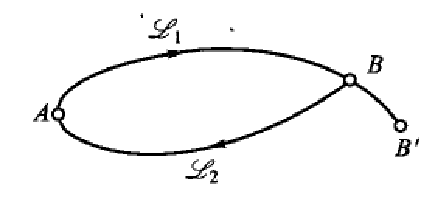


图 19. 用于证明无旋运动与有势运动的等价性

小时间间隔内会保持自己的空间方位.

从形式上验算就容易得出, 如果 $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$, 则 $\boldsymbol{\omega} = 0$. 因此, 沿任何满足斯托克斯定理条件的封闭曲线, 速度环量都等于零. 这样, 如果运动有势, 它就是无旋的.

我们来证明逆命题: 如果运动无旋, $\boldsymbol{\omega} = 0$, 它就是有势的, 亦即存在函数 φ, 使 $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$.

为了证明这个结论, 取给定点 A 和 B 之间的两条这样的曲线 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ (图 19), 其中每条曲线都可以在连续无旋运动区域内变形为另一条曲线. 根据斯托克斯定理,

$$\int\limits_{\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2} u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z = 0,$$

所以

$$\Gamma_{AB} = \int\limits_{\mathscr{L}_1} u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-\mathscr{L}_2} u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z.$$

因为曲线 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 是任意的, 所以由此可知

$$\int\limits_{AB} u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z = \varphi(x, y, z),$$

即沿从点 A 至点 B 的曲线的环量与积分路径无关. 如果起点 A 是固定的, 则环量只与终点 B 的坐标有关, 且 Γ 在任意无穷小线微元 BB' 上的增量显然等于

$$u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}\varphi.$$

于是, 由 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ 的任意性, 有

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

因此, 有势运动与无旋运动的概念是等价的.

势函数的多值性与流动区域的多连通性 众所周知, 一个区域称为单连通的, 如果该区域内的任何一条封闭曲线都能够在不离开区域的情况下收缩至一点; 否则该区域称为多连通的. 显然, 若连续有势运动区域是单连通区域, 则位势 φ 是坐标的单值函数; 若该区域是多连通区域, 则 φ 可能是坐标的多值函数. 在多连通区域内, 沿不能收缩至一点的封闭曲线, 环量 Γ 可以不等于零, 而沿能在该区域内部互相转换的封闭曲线, 环量均相等. 在 (8.2) 给出的例子中, 有势运动 $\varphi = k\theta$ 的连续区域不是单连通的, z 轴是奇异直线.

无源场及其性质 矢量场 $\boldsymbol{B}$ 称为无源的, 如果成立不变的方程

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = \nabla_\alpha B^\alpha = 0.$$

利用 $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$ 与 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ 的定义直接验算就容易证明, 任何矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度场总是无源的, 即, 若 $\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$, 则 $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$. 例如 $\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\boldsymbol{v}/2$, 所以在任何连续介质的运动中涡量场都满足等式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}=0,$$

或者在笛卡儿坐标系下

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}=0.$$

所以, 速度的涡量场 (涡旋场) 总是无源场.

如果介质不可压缩, 即任何其物质体的大小在运动中保持不变, 则根据 (7.20) 有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,$$

即不可压缩介质的速度场是无源场. 由物理学可知, 真空中的磁场强度矢量场 $\boldsymbol{H}$ 也总是无源场,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0.$$

任何无源矢量 $\boldsymbol{B}$ 都可以表示为[1)]

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}. \tag{8.6}$$

其实, 可以用以下方法通过矢量 $\boldsymbol{A}_1$ 来构造矢量 $\boldsymbol{B}$ 的表达式 (8.6) 的一个特殊形式. 取笛卡儿坐标系, 令 $A_{1z}=0$, 则等式 $\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_1$ 给出用于确定 A_{1x} 与 A_{1y} 的如下方程组:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{\partial A_{1y}}{\partial z}&=B_x,\\
\frac{1}{2}\frac{\partial A_{1x}}{\partial z}&=B_y,\\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{1y}}{\partial x}-\frac{\partial A_{1x}}{\partial y}\right)&=B_z.
\end{aligned} \tag{8.7}$$

只要取[2)]

$$A_{1y}=-2\int_{z_0}^{z}B_x\,\mathrm{d}z+2\int_{x_0}^{x}B_z(x,y,z_0)\,\mathrm{d}x,\quad A_{1x}=2\int_{z_0}^{z}B_y\,\mathrm{d}z,$$

方程组 (8.7) 在条件 $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$ 下就会得到满足. 事实上, 直接即可看出 (8.7) 的前两个方程此时成立. (8.7) 的第三个方程也成立, 因为由等式

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

---

1) 矢量 $\boldsymbol{A}$ 称为无源矢量 $\boldsymbol{B}$ 的矢量势. ——译注

2) 值得指出的是, 要想使式中的定积分成立, 无源场 $\boldsymbol{B}$ 所在区域必须是凸区域. 一般的讨论见文献: Stevenson A.F. Note on the existence and determination of avector potential. Q. Appl. Math., 1954, 12(2): 194—198. 在本书第二卷第八章 §26 中也有一些相关的讨论. ——译注

得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{1y}}{\partial x}-\frac{\partial A_{1x}}{\partial y}\right)=-\int\limits_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}\right)\mathrm{d}z+B_z(x,y,z_0)$$
$$=\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\partial B_z}{\partial z}\mathrm{d}z+B_z(x,y,z_0)=B_z(x,y,z).$$

显然, 满足条件 (8.6) 的所有矢量 $\boldsymbol{A}$ 都可以表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\operatorname{grad}\Psi,$$

其中 Ψ 是任意标量函数. 其实, 对于差 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_1$, 应当成立等式

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_1)=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_1=0,$$

即这个差应表示为某函数 Ψ 的梯度.

我们以涡量场 $\boldsymbol{\omega}$ 为例来讨论无源场的一般性质.

对涡量场可以像所有矢量场那样引入 (参见第二章 §3) 矢量线、矢量面与矢量管的概念, 即涡线、涡面与涡管. 涡线是指在每一点切线方向都与涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 方向相同的曲线. 涡线的微分方程是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\omega_1}=\frac{\mathrm{d}y}{\omega_2}=\frac{\mathrm{d}z}{\omega_3}.$$

涡面 $f(x,y,z)=0$ 由涡线连续地组成, 其方程是

$$\omega_1\frac{\partial f}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial f}{\partial y}+\omega_3\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

如果经过 (不是涡线的) 封闭曲线 C 的所有点引涡线, 就组成涡管. 涡管的侧面是涡面, 所以在其侧面上 $\omega_n=0$.

我们来研究涡管的性质. 如图 20 所示, 在涡管的侧面取 2 条封闭曲线 C_1 和 C_2, 并用割线 $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ 把它们连接起来, 就组成了完全位于涡管侧面的曲面 Σ. 对之应用斯托克斯定理, 得

$$\int\limits_{\partial\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0.$$

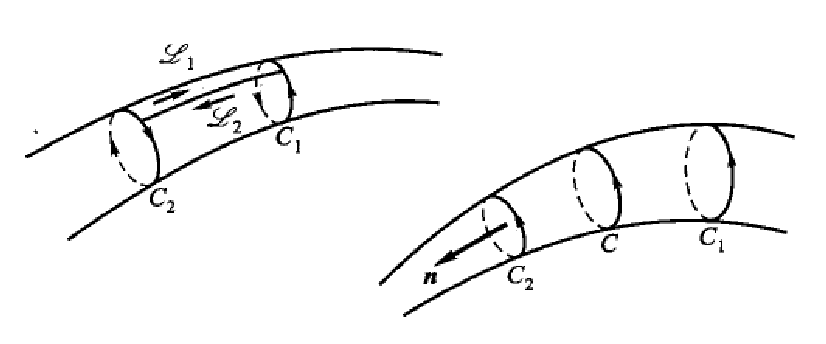


图 20. 用于研究涡管的性质

曲面 Σ 的边界 $\partial\Sigma$ 的环绕方向参见图 20. 割线的两侧 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 上的积分是沿不同方向取的, 所以沿它们的积分之和为零. 曲线 C_1 和 C_2 的环绕方向也是相反的, 因此, 如果把其中一条曲线的环绕方向改为相反方向, 就

得到

$$\int_{C_1} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{C_2} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \quad \text{或} \quad \Gamma_{C_1} = \Gamma_{C_2}.$$

此时曲线 C_1 与 C_2 显然可以是环绕给定涡管 1 周的任意封闭曲线, 所以

$$\Gamma_C = \text{const},$$

其中 C 是环绕给定涡管 1 周的任意封闭曲线.

环量

$$\Gamma_C = \int_C \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

或者根据斯托克斯定理与之相等的量

$$2\int_\Sigma \omega_n\, \mathrm{d}\sigma$$

称为涡管强度, 这里 Σ 是张于 C 的曲面, 而 C 的环绕方向与 Σ 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 之间的关系在推导斯托克斯定理时已经指出.

涡旋的亥姆霍兹运动学定理 涡管强度沿涡管不变, 是给定涡管的特征量. 这个结论称为涡旋的亥姆霍兹运动学第一定理.

亥姆霍兹运动学第二定理表述为: 涡管不可能在介质的内部产生或消失. 这个结论可以直接从场 $\boldsymbol{\omega}$ 的连续性条件与涡管强度不变的性质推导出来. 因此, 涡管或者是封闭的, 或者在运动介质的边界上消失或产生, 或者延伸至无穷远处, 如果介质是无界的.

涡旋运动的例子 直觉上似乎可以认为, 只要在流动中有封闭的流线, 流体的运动就总是有旋的 ($\boldsymbol{\omega} \neq 0$). 其实, 如果在流动中观察到类似于图 21 (a) 所示的速度分布, 沿图中所画流线的环量就不等于零,

$$\Gamma_C = \int_C v_s\, \mathrm{d}s \neq 0,$$

因为被积表达式的符号在全部积分路径上都不发生变化. 根据斯托克斯定理, 在曲线 C 张成的曲面上应当存在 $\omega_n \neq 0$ 的点, 所以流动是有旋的. 然而, 这个结论只有在可以应用斯托克斯定理的条件下才是正确的, 这时要求能够在 C 上张起这样的曲面 Σ, 使场 $\boldsymbol{v}$ 及其偏导数在该曲面上都是连续的. 例如, 如果封闭曲线 C 包含有一个母线平行于 z 轴的圆柱形刚体 (图 21 (b)), 就不能下结论说, 具有图 21 (a) 所示速度分布的平面流动是有旋的. 当场 $\boldsymbol{v}$ 或 $\boldsymbol{\omega}$ 在 C 内部具有奇点时, 也不能下这样的结论.

因此, 我们以流动 (8.2) 为例更加详细地进行讨论. 该流动有势:

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi, \quad \varphi = k\theta = k\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x}.$$

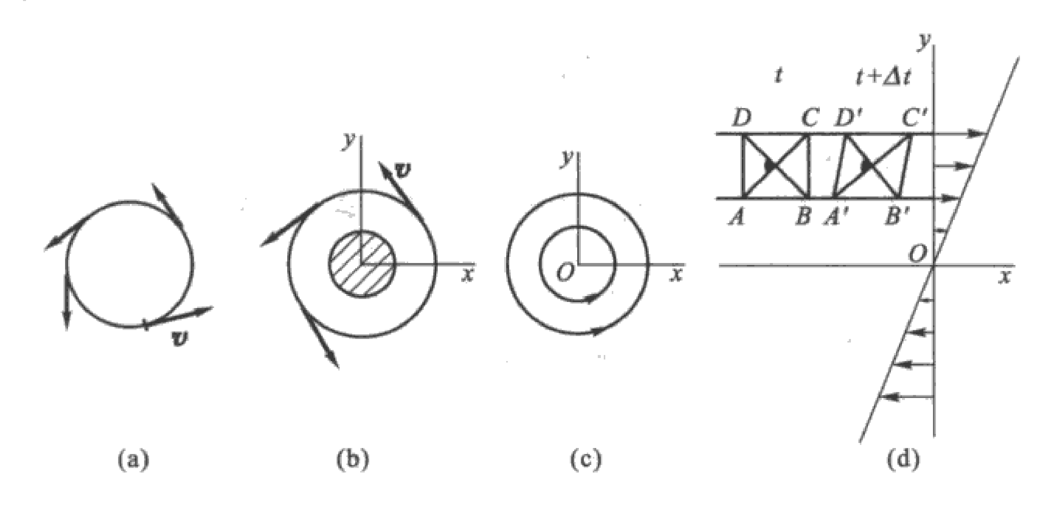


图 21.　可能出现的有旋流动与无旋流动的例子

流线垂直于曲面 $\varphi = \text{const}$, 即流线是平面 xOy 上的圆. 速度的方向是 φ 增加的方向, 所以当 $k > 0$ 时流动方向如图 21 (c) 所示. 沿任何与流线重合的圆周, 环量 Γ 均不为零, 尽管流动在 z 轴以外区域皆有势. 势函数在 z 轴上没有定义. 若计算这种流动的涡量, 我们将看到, 它在 z 轴之外处处为零, 而在 z 轴上则应使 $\boldsymbol{\omega}$ 的值为无穷大. 因此, 场 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 沿 z 轴有奇异性. 这是沿 z 轴的具有有限强度 $\Gamma = 2\pi k$ 的孤立涡丝, 该流动称为孤立点涡流动.

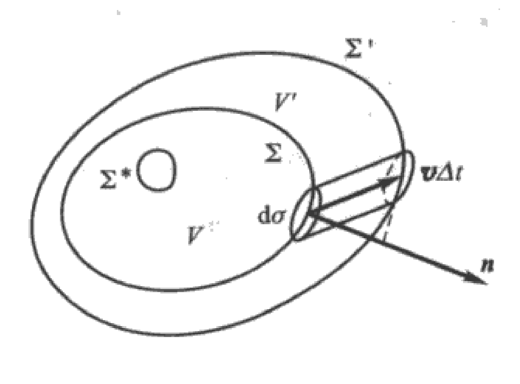


图 22.　用于证明奥－高定理

不应当认为有旋流动就一定意味着在流动中存在封闭的流线. 考虑流动

$$u = ay, \quad v = w = 0,$$

其中 a 是正的常数 (图 21 (d)). 在该流动中, 轨迹与流线重合, 都是平行于 x 轴的直线, 并且沿任何直线 $x = \text{const}$ 的速度分布都是线性的. 直接计算 $\boldsymbol{\omega}$ 在笛卡儿坐标轴上的分量, 得

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = -\frac{a}{2},$$

即流动是有旋的, $\boldsymbol{\omega}$ 处处相同, 其方向与 z 轴方向相反. 在 t 时刻取正方形流体微元 $ABCD$, 它在 $t + \Delta t$ 时刻变为菱形 $A'B'C'D'$, 并且可以证明, 应变率张量的主轴在 t 时刻与正方形的对角线重合, 它们在 $t + \Delta t$ 时刻变为菱形的对角线. 主轴之间的夹角在运动过程中显然保持直角不变, 但是主轴的空间方位发生变化, 它们以角速度 $\boldsymbol{\omega} = -a\boldsymbol{k}/2$ 旋转.

奥－高定理　现在回忆奥－高定理. 在时刻 t, 在运动的连续介质中取表面为 Σ 的物质体 V, 并在表面 Σ 的每一点选取 V 的外法线 $\boldsymbol{n}$. 在时刻 $t + \Delta t$, 该物质体移动至 V', 而 Σ 变为 V' 的表面 Σ' (图 22).

体积的变化显然为

$$V' - V = \int_{\Sigma} v_n \Delta t \, \mathrm{d}\sigma.$$

此时已经自动考虑到体积 V' 小于 V 的情况, 因为我们总是取 V 的外法线. 体积的变化率等于

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V' - V}{\Delta t} = \int_{\Sigma} v_n \, \mathrm{d}\sigma.$$

对于表面为 Σ^* 的无穷小物质体 V^*, 类似地有

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V'^* - V^*}{\Delta t} = \int_{\Sigma^*} v_n \, \mathrm{d}\sigma.$$

利用速度矢量散度的定义 (7.20) 及其运动学含义, 在笛卡儿坐标系中得

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^*} v_n \, \mathrm{d}\sigma &= \int_{\Sigma^*} [u \cos(\boldsymbol{n}, x) + v \cos(\boldsymbol{n}, y) + w \cos(\boldsymbol{n}, z)] \mathrm{d}\sigma \\ &= V^* \operatorname{div} \boldsymbol{v} + V^* \varepsilon = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) V^* + V^* \varepsilon, \end{aligned} \tag{8.8}$$

其中 ε 是无穷小量.

有限的物质体 V 总可以分割为诸多无穷小物质体 V^*. 只要 $\boldsymbol{v}$ 在 V 内部连续可微, 就可以对每个无穷小物质体 V^* 写出等式 (8.8). 把 (8.8) 对所有 V^* 求和, 并在分割数趋于无穷大且 $V^* \to 0$ 时取极限, 得

$$\int_{\Sigma} [u \cos(\boldsymbol{n}, x) + v \cos(\boldsymbol{n}, y) + w \cos(\boldsymbol{n}, z)] \mathrm{d}\sigma = \int_{V} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \mathrm{d}\tau, \tag{8.9}$$

因为在等式的左侧, 沿相邻曲面 Σ^* 的积分因法线方向相反而相互抵消, 于是在极限中仅剩下了对外表面 Σ 的积分.

等式 (8.9) 把对封闭曲面 Σ 的积分变换为对该曲面所围几何体 V 的积分, 这就是奥一高定理. 等式 (8.9) 可以写为不依赖于坐标系的形式:

$$\int_{\Sigma} v_n \, \mathrm{d}\sigma = \int_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\tau.$$

显然, 任何在几何体 V 内与曲面 Σ 上皆连续可微的矢量 $\boldsymbol{A}$ 都可以像速度 $\boldsymbol{v}$ 那样理解, 从而对之写出奥一高公式:

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \int_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}\tau.$$

此外, 因为在给定坐标系中任何 3 个函数 P, Q, R 都可以理解为矢量的分量,

所以对 x, y, z 的任何 3 个连续可微的函数 P, Q, R 都可以写出奥–高定理, 即

$$\int\limits_{\Sigma}[P\cos(\boldsymbol{n},x)+Q\cos(\boldsymbol{n},y)+R\cos(\boldsymbol{n},z)]\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}\tau.$$

在奥–高公式左右两侧的积分中, 被积函数都是与坐标系的选择无关的不变量. 如果它们在笛卡儿坐标系中是已知的, 则在任何其他坐标系中都易求这些函数. 亦即, 设在任何坐标系 η^1, η^2, η^3 中 $\boldsymbol{A}=A^k\boldsymbol{e}_k$, $\boldsymbol{n}=n_i\boldsymbol{e}^i$, 则

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}=A^kn_k,\quad \mathrm{div}\boldsymbol{A}=\nabla_k A^k=\frac{\partial A^k}{\partial\eta^k}+A^i\Gamma^k_{ki},$$

其中克里斯托费尔符号 Γ^i_{kj} 是通过前面得到的公式用空间 η^1, η^2, η^3 的 g_{ij} 来计算的 (可以根据从笛卡儿坐标系到当前坐标系 η^1, η^2, η^3 的变换公式来计算 g_{ij}).

奥–高定理现在可以写为如下在任意曲线坐标系中都成立的形式:

$$\int\limits_{\Sigma}A^kn_k\,\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{V}\nabla_k A^k\,\mathrm{d}\tau.$$

我们指出, 在推导奥–高定理时, 空间的维数可以是任意的. 在力学与物理学中, 这个定理经常被应用于二维、三维与四维区域.

物质体积分对时间的求导公式

我们再推导一个以后有用的矢量分析公式. 设我们有任意一个依赖于空间点坐标和时间 t 的函数 f (它可以是张量). 对于运动的物质体 V, 考虑积分

$$\int\limits_{V}f(x,\ y,\ z,\ t)\,\mathrm{d}\tau,$$

并计算导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V}f(x,\ y,\ z,\ t)\,\mathrm{d}\tau,$$

其中不仅被积函数与 t 有关, 积分域 V 也与 t 有关. 由导数的定义可以写出 (见图 22)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V(t)}f(x,\ y,\ z,\ t)\,\mathrm{d}\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int\limits_{V'}f(x,\ y,\ z,\ t+\Delta t)\,\mathrm{d}\tau-\int\limits_{V}f(x,\ y,\ z,\ t)\,\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int\limits_{V'}[f(x,\ y,\ z,\ t+\Delta t)-f(x,\ y,\ z,\ t)]\mathrm{d}\tau+\int\limits_{V'-V}f(x,\ y,\ z,\ t+\Delta t)\,\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$=\int\limits_{V}\frac{\partial f(x,\ y,\ z,\ t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\int\limits_{\Sigma}fv_n\,\mathrm{d}\tau, \tag{8.10}$$

因为几何体 $V'-V$ 由柱体微元 $\mathrm{d}\tau=v_n\,\mathrm{d}\sigma\Delta t$ 组成 (见图 22), 并且当 $\Delta t\to 0$ 时曲

面 Σ' 成为 Σ, 而 $f(x,\ y,\ z,\ t+\Delta t)\to f(x,\ y,\ z,\ t)$. 对 (8.10) 的最后一个积分应用奥—高公式, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V f(x,\ y,\ z,\ t)\,\mathrm{d}\tau=\int\limits_V\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla_i\left(fv^i\right)\right]\mathrm{d}\tau. \tag{8.11}$$

积分域 V 是运动的, 求导结果自然就依赖于运动的物质体 V 诸点的速度场 $\boldsymbol{v}$.

显然, 以下运动学公式永远成立:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla_i\left(fv^i\right)=\frac{\partial f}{\partial t}+v^i\nabla_i f+f\nabla_i v^i=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+f\nabla_i v^i,$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+v^i\nabla_i f$$

是函数 f 对时间 t 的全导数在任意坐标系中的表达式. 所以, 公式 (8.11) 还可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V f(x,\ y,\ z,\ t)\,\mathrm{d}\tau=\int\limits_V\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+f\nabla_i v^i\right)\mathrm{d}\tau.$$

现在把公式 (8.11) 应用到一个特殊情况. 令

$$f=\frac{1}{V},$$

式中 V 是连续介质的体积. 此时, 函数 f 依赖于变化的体积 V, 即依赖于 (8.10) 的积分域, 所以函数 f 显然只依赖于 t 而不依赖于坐标. 显然, 以下运动学恒等式永远成立:

$$\int\limits_V\frac{\mathrm{d}\tau}{V(t)}=1,$$

从而由 (8.11) 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V\frac{\mathrm{d}\tau}{V(t)}=\int\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{V}\right)+\nabla_i\left(\frac{1}{V}v^i\right)\right]\mathrm{d}\tau=0,$$

或

$$\int\limits_V\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{V}\right)+\frac{1}{V}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}\tau=0. \tag{8.12}$$

无论对运动介质的全部体积 V, 还是其任何一部分体积, 都可以写出这个恒等式.

对无穷小体积 ΔV 应用 (8.12), 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\Delta V}\right)+\frac{1}{\Delta V}\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \tag{8.13}$$

式中 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ 取自 ΔV 收缩到的那一点. 我们强调, 此式对于任何介质均成立, 它与运动介质的性质毫无关系. 例如, 它对于诸如相空间这样的非物质介质也是成立的.

第三章　连续介质力学的动力学概念和动力学方程

§1. 连续性方程

我们来研究物理对象的运动, 即物体和场的运动. 本章和以后许多章基本上只研究物体运动的规律. 所谓物体, 是指那些具有惯性的对象.

惯性由质量表征. 我们既可以引入整个物体的质量 m, 也可以引入其任何一部分的质量 m_i. 在牛顿力学中, 整个物体的质量 m 按照定义等于组成物体的所有部分的质量 m_i 之和.

质量守恒定律 · 密度　任何由同样一些连续介质微元组成的物质体, 其质量 m 守恒. 这个定律是牛顿力学的基本定律, 可以视为通过实验确立的自然定律, 它在一定的近似下是正确的. 对于任何物质体, 有

$$m = \text{const}.$$

这是连续介质力学的基本方程之一, 该方程还可以写为另外一种形式, 即

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{1.1}$$

引入平均密度

$$\rho_{\text{mean}} = \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

其中 ΔV 是质量 Δm 所占的体积. 实际密度定义为如下极限:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

在连续介质力学的研究中基本上总是用密度 ρ 代替质量 m. 对于微小体积成立等式

$$\Delta m = \rho \Delta V,$$

而对于有限体积则成立等式

$$m = \int_V \rho \, \mathrm{d}\tau,$$

其中的积分是对运动的物质体计算的. 因此, 知道 ρ 就可以求出 m.

物质微元的密度 ρ 可以不守恒, 因为在微元运动时其体积可以发生变化.

连续介质物质体的质量守恒定律现在显然可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho \, \mathrm{d}\tau = 0. \tag{1.2}$$

欧拉变量下的连续性方程 应用第二章的物质体积分求导法则 (8.11), 在质量守恒定律成立的条件下有

$$0 = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} \right) \mathrm{d}\tau = \int_V \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right) \mathrm{d}\tau,$$

或者, 由于该等式对任何物质体都成立, 我们得到连续介质力学的第一个基本微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{1.3}$$

该方程称为欧拉变量下的连续性方程. 这个方程显然可以直接得自第二章的公式 (8.13), 因为任何物质体的质量都是守恒的.

在物质体中守恒的物理量所满足的条件 除质量 m 外, 在连续介质的任何物质体中还有其他一些物理量在运动过程中守恒. 例如, 设 N 是任意物质体中的分子或原子的数目, 则 N 在物质体中通常是守恒的. 若引入单位体积中的分子或原子的数目 $n = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \Delta N / \Delta V$, 式中 ΔV 是 ΔN 个粒子所占的体积, 则根据 N 在任何物质体中守恒的假设, 利用第二章公式 (8.13) 可得 n 的微分方程, 它类似于 (1.3):

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + n \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{1.4}$$

若在连续介质中有化学反应发生, 则方程 (1.3) 成立, 而方程 (1.4) 不成立.

还存在其他一些在任何物质体中都守恒的标量、矢量或张量. 我们用 Φ 来表示这样的守恒量, 并引入这个量的密度:

$$f = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V}.$$

显然, Φ 和 f 满足以下条件:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=0,$$

$$\Phi=\int_V f\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0.$$

在物理学的很多情形中, 最后一个条件对电荷密度 e 成立. 确定物质体中的守恒量是物理学的基本问题之一.

多组元混合物的连续性方程 设我们有由 N 种组元组成的混合物, 例如: 氢、氧和水蒸气的混合物 ($N=3$), 锡铜合金, 盐的水溶液, 等离子体——自由电子和离子的混合物, 等等. 所有这样的多组元混合物都可以认为是由充满混合物所占的同一区域的 N 种连续体组成的. 对于这些连续体中的每一种, 都可以引入自己的密度和自己的速度, 我们把这些量表示为 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_N$ 和 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N$. 在混合物所占区域每一点有 N 个密度 ρ_i 和 N 个速度 $\boldsymbol{v}_i$, 其中每个量分别属于自己的连续体.

于是, 混合物力学在这个提法中就是充满同一区域的一组连续体的力学.

我们首先考虑混合物中不发生化学反应或电离作用的情况. 这时, 混合物 N 种组元中的每一种都应当满足质量守恒定律, 我们就有 N 个方程:

$$\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}=0,$$

或

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\mathrm{div}\,\rho_i\boldsymbol{v}_i=0. \tag{1.5}$$

如果在混合物中有化学反应或电离作用发生 (这种情况从应用的角度讲更有意义), 则组元的质量 m_i 可能发生变化. 我们引入 $\varkappa_i$ 来表示单位体积中混合物第 i 种组元的质量 m_i 因化学反应或电离作用而在单位时间内发生的变化. 量 $\varkappa_i$ 是在化学中确定的. 于是, 混合物组元的连续性方程可以写为

$$\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}=\int_V \varkappa_i\,\mathrm{d}\tau,$$

或

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\mathrm{div}\,\rho_i\boldsymbol{v}_i=\varkappa_i. \tag{1.6}$$

化学反应的一个基本定律是混合物的总质量守恒, 所以

$$\sum_{i=1}^{N}\varkappa_i=0. \tag{1.7}$$

除了混合物组元的 N 个密度和 N 个速度, 还可以引入混合物整体的密度 ρ 和速度 $\boldsymbol{v}$. 给定区域内混合物的质量按照定义等于该区域内各组元的质量之和,

$$m=\sum_{i=1}^{N}m_i,$$

而混合物的密度 ρ 定义为

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

混合物组元的密度

$$\rho_i=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m_i}{\Delta V},$$

所以

$$\rho=\sum_{i=1}^{N}\rho_i.$$

对 (1.6) 求和, 所得关系式利用 (1.7) 可以写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\sum_{i=1}^{N}\rho_i\boldsymbol{v}_i=0.$$

这个方程将具有连续性方程的通常形式, 如果混合物整体的运动速度 $\boldsymbol{v}$ 定义如下:

$$\rho\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{N}\rho_i\boldsymbol{v}_i,\quad m\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{v}_i,$$

即

$$\boldsymbol{v}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{v}_i=\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{N}\rho_i\boldsymbol{v}_i. \tag{1.8}$$

我们指出, 这样定义的速度 $\boldsymbol{v}$ 是混合物的 N 种组元所对应的 N 个物质体的总质心的速度.

扩散过程的连续性方程

有可能发生的一种情况是混合物的所有组元都以同样的速度运动, 该速度等于此时混合物整体的运动速度,

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2=\cdots=\boldsymbol{v}_N=\boldsymbol{v}.$$

这类过程称为无扩散过程. 若组元的速度 $\boldsymbol{v}_i$ 不同, 则发生扩散, 这时混合物的一些组元相对于另外一些组元运动. 电流就是这种过程的一个例子. 在有电场的时候, 在静止导体中 $\boldsymbol{v}=0$, 而 $\boldsymbol{v}_i\neq 0$, 电子和离子在导体中的运动形成电流.

对于扩散过程, 可以在每一组元的连续性方程中引入混合物整体的运动速度 $\boldsymbol{v}$, 这就改变了连续性方程 (1.5) 或 (1.6) 的形式.

在存在化学作用和扩散的一般情况下, 方程 (1.6) 可以写为

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\operatorname{div}\rho_i\boldsymbol{v}=\varkappa_i-\operatorname{div}\boldsymbol{I}_i, \tag{1.9}$$

式中

$$\boldsymbol{I}_i = \rho_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}).$$

差 $\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}$ 显然是第 i 种组元相对于介质整体的运动速度. 若 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v}_i$, 则方程 (1.9) 中 $\operatorname{div} \boldsymbol{I}_i$ 这一项表征在以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的几何体中第 i 种组元的质量因该几何体不是第 i 种组元的物质体而发生变化, 组成第 i 种组元的粒子不断进出该几何体. 矢量 $\boldsymbol{I}_i$ 称为扩散流矢量.

计算扩散流矢量 $\boldsymbol{I}_i$ 必须以物理定律为基础. 在不同情况下, 扩散定律亦各不相同, 但由 (1.8) 可知, 在任何情况下都成立条件

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{I}_i = 0.$$

混合物组元的 N 个连续性方程 (1.9) 可以替换为混合物组元的 $N-1$ 个独立的连续性方程 (1.9) 和混合物整体运动的一个连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} = 0.$$

因此, 在研究多组元混合物运动的时候, 可以不再显式地引入 N 个充满同一区域并以不同速度 $\boldsymbol{v}_i$ 运动的连续体, 只要引入扩散流矢量 $\boldsymbol{I}_i$ 来代替 $\boldsymbol{v}_i$, 并把方程 (1.9) 看作混合物组元密度 ρ_i 的方程即可.

显然, 在研究发生化学反应的多组元混合物的运动时, 必须把力学定律与量 $\varkappa_i$ 和 $\boldsymbol{I}_i$ 满足的物理和化学定律联合起来.

不可压缩介质的连续性方程和流管的性质

连续性方程 (1.3) 是对任意的连续介质得出的.

一种介质称为不可压缩的, 如果它的任何物质体的大小在整个运动过程中保持不变. 所以, 不可压缩介质微元的密度也是守恒的. 连续性方程的形式为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{1.10}$$

一种介质称为均匀的, 如果它的所有微元的密度 ρ 都相同, 即 ρ 与空间坐标 x, y, z 无关. 一种介质称为非均匀的, 如果它的不同微元的密度 ρ 不同, $\rho = \rho(x,\ y,\ z)$. 显然, 连续性方程 (1.10) 对均匀的和非均匀的不可压缩介质都成立.

不可压缩流体的速度场永远是无源场, 其矢量管 (即流管) 的性质已经在第二章 §8 中有所阐述. 例如, 流管强度

$$\int_{\Sigma} v_n \, \mathrm{d}\sigma = Q$$

(Σ 是流管的横截面, $\boldsymbol{n}$ 表示其法线) 沿流管保持不变, 这个量称为流管的流量. 在运动连续时, 流管不可能在不可压缩介质的内部产生和消失.

拉格朗日变量下的连续性方程 我们来推导另一种形式的连续性方程，即拉格朗日变量下的连续性方程．为此，在给定时刻 t，在连续介质的任意一点 M 沿随体坐标系 ξ^1, ξ^2, ξ^3 的坐标轴方向取小矢量 $\hat{e}_1\,d\xi^1$, $\hat{e}_2\,d\xi^2$, $\hat{e}_3\,d\xi^3$，并组成一个平行六面体微元，其体积等于

$$V = |\hat{e}_1\cdot(\hat{e}_2\times\hat{e}_3)\,d\xi^1\,d\xi^2\,d\xi^3|.$$

在任意另一个时刻 t_0，与该平行六面体对应的是从同一物质点 M 引出的矢量 $\mathring{e}_1\,d\xi^1$, $\mathring{e}_2\,d\xi^2$, $\mathring{e}_3\,d\xi^3$ 所组成的平行六面体微元，其体积等于

$$V_0 = |\mathring{e}_1\cdot(\mathring{e}_2\times\mathring{e}_3)\,d\xi^1\,d\xi^2\,d\xi^3|.$$

我们把介质在时刻 t 和 t_0 的密度分别表示为 ρ 和 ρ_0．根据质量守恒定律，有

$$\rho_0 V_0 = \rho V,$$

或

$$\rho = \rho_0\frac{V_0}{V} = \rho_0\left|\frac{\mathring{e}_1\cdot(\mathring{e}_2\times\mathring{e}_3)}{\hat{e}_1\cdot(\hat{e}_2\times\hat{e}_3)}\right|. \tag{1.11}$$

为了计算基矢量的混合积，再引入基矢量为 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k}$ 的笛卡儿直角坐标参考系 $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$ 来研究介质的运动．我们把介质的点在时刻 t 和 t_0 相对于该坐标系的坐标分别表示为 x^1, x^2, x^3 和 x_0^1, x_0^2, x_0^3．显然，

$$x_0^i = x^i(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t_0), \quad x^i = x^i(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t),$$

即 x_0^i 和 x^i 是在独立变量 t 取不同值时表示运动规律的函数的值．因为点 M 相对于参考系的径矢为

$$\boldsymbol{r} = x^k\boldsymbol{e}_k,$$

而

$$\hat{e}_i = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi^i},$$

所以

$$\hat{e}_i = \frac{\partial x^k}{\partial\xi^i}\boldsymbol{e}_k.$$

混合积 $\hat{e}_1\cdot(\hat{e}_2\times\hat{e}_3)$ 可以表示为行列式的形式：

$$\hat{e}_1\cdot(\hat{e}_2\times\hat{e}_3) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial\xi^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial\xi^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial\xi^1} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial\xi^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial\xi^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial\xi^2} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial\xi^3} & \dfrac{\partial x^2}{\partial\xi^3} & \dfrac{\partial x^3}{\partial\xi^3} \end{vmatrix} = \hat{\Delta},$$

其中 $\hat{\Delta}$ 是从 ξ^1, ξ^2, ξ^3 到 x^1, x^2, x^3 的变换的雅可比行列式. 类似地,

$$\mathring{e}_1 \cdot (\mathring{e}_2 \times \mathring{e}_3) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_0^1}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x_0^2}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x_0^3}{\partial \xi^1} \\ \dfrac{\partial x_0^1}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x_0^2}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x_0^3}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial x_0^1}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial x_0^2}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial x_0^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} = \mathring{\Delta},$$

其中 $\mathring{\Delta}$ 是从 ξ^1, ξ^2, ξ^3 到 x_0^1, x_0^2, x_0^3 的变换的雅可比行列式. 利用雅可比行列式的性质, 方程 (1.11) 现在可以表示为

$$\rho = \rho_0 \frac{\mathring{\Delta}}{\hat{\Delta}} = \rho_0 \det\left(\frac{\partial x_0^i}{\partial x^k}\right). \tag{1.12}$$

我们对所得方程 (1.12) 继续进行变换. 为明显起见, 我们把矢量 $\hat{e}_j$ 在坐标系 x, y, z 中的分量 $\partial x^i/\partial \xi^j$ 表示为 $\hat{e}_{jx}, \hat{e}_{jy}, \hat{e}_{jz}$, 则显然

$$[\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3)]^2 = \hat{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_{1x} & \hat{e}_{1y} & \hat{e}_{1z} \\ \hat{e}_{2x} & \hat{e}_{2y} & \hat{e}_{2z} \\ \hat{e}_{3x} & \hat{e}_{3y} & \hat{e}_{3z} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_{1x} & \hat{e}_{1y} & \hat{e}_{1z} \\ \hat{e}_{2x} & \hat{e}_{2y} & \hat{e}_{2z} \\ \hat{e}_{3x} & \hat{e}_{3y} & \hat{e}_{3z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{e}_{1x} & \hat{e}_{2x} & \hat{e}_{3x} \\ \hat{e}_{1y} & \hat{e}_{2y} & \hat{e}_{3y} \\ \hat{e}_{1z} & \hat{e}_{2z} & \hat{e}_{3z} \end{vmatrix} = \det(\hat{g}_{ik}) = \hat{g},$$

因为 $\hat{g}_{ik} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_k$. 类似地,

$$[\mathring{e}_1 \cdot (\mathring{e}_2 \times \mathring{e}_3)]^2 = \det(\mathring{g}_{ik}) = \mathring{g}.$$

因此, (1.11) 可以表示为

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{\mathring{g}}{\hat{g}}}. \tag{1.13}$$

方程 (1.11), (1.12) 和 (1.13) 是连续性方程在拉格朗日变量下的不同形式.

我们指出, 对于在连续介质物质体中守恒的任何量 Φ 的密度 f, 在一般情况下成立方程

$$f = f_0 \sqrt{\frac{\mathring{g}}{\hat{g}}} = f_0 \Delta,$$

其中 Δ 是从 x^i 到 x_0^i 的变换矩阵的行列式.

连续性方程的特点在于其广泛的通用性, 它对任何物质介质的运动都成立, 其形式与介质的性质无关. 对于包括水、空气、金属等在内的所有介质, 连续性方程都是相同的. 连续性方程 (1.3) 在可压缩介质的情况下含有 4 个未知函数: 密度 ρ 和速度的 3 个分量, 而在不可压缩介质的情况下, 连续性方程 (1.10) 只含有 3 个未知函数——速度的分量. 显然, 为了解决连续介质力学问题, 一个连续性方程是不够的. 我们将推导对任何连续物质介质的运动都成立的其他一些方程.

§2. 连续介质的运动方程

我们来研究物质的连续介质由某些原因引发的运动. 力就是为此而引入的, 它是矢量. 我们将对连续介质力学中遇到的力进行一个基本的分类. 与质点和不变形的刚体系统的力学相比, 在连续介质力学中, 力的概念更为复杂.

点力和分布力 我们在理论力学中主要遇到点力, 即作用于一点的有限的力, 而在连续介质力学中则主要遇到分布力, 即作用于连续介质物质体 V 或物质面 Σ 的每一部分的力, 并且当物质体的体积或物质面的面积趋于零时, 相应的力的主矢量也趋于零.

在连续介质力学中, 仅在一些特殊情况下才会遇到点力. 根据牛顿第二定律,

$$\mathcal{F} = \Delta m\, \boldsymbol{a},$$

式中 Δm 为连续介质微元的质量, $\boldsymbol{a}$ 为其加速度. 由此可见, 只有在 $\boldsymbol{a}$ (或 ρ) 无穷大的点才可能有点力.

体积力或质量力 按体积分布的力称为体积力或质量力. 若用 $\mathcal{F}$ 表示作用于质量为 Δm、体积为 ΔV 的微元的质量力主矢量, 则质量力在给定点的密度 $\boldsymbol{F}$ 为

$$\boldsymbol{F} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\mathcal{F}}{\Delta m}.$$

对于微元,

$$\mathcal{F} \approx \boldsymbol{F} \Delta m.$$

有时要考虑作用于单位体积而非单位质量的介质的力 $\boldsymbol{\Phi}$. 显然,

$$\boldsymbol{\Phi} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\mathcal{F}}{\Delta V}, \quad \text{即} \quad \boldsymbol{\Phi} = \rho \boldsymbol{F}.$$

$\boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{d}V$ 和 $\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}m$ 具有力的量纲, $\boldsymbol{F}$ 具有加速度的量纲, $\boldsymbol{\Phi}$ 的量纲是加速度的量纲乘以密度的量纲.

质量力的类型不多, 它们是: 重力 (重量) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{\Phi} = \rho \boldsymbol{g}$, 以及一般而言满足牛顿万有引力定律的引力; 电磁力; 惯性力. 在研究非惯性坐标系下的运动时必须引入惯性力, 并且从运动物体本身来看, 惯性力就是通常的实际存在的外质量力. 在研究连续介质的具体运动时, 有时要用人工方法引入质量力. 例如, 在讨论翼型在流体中的运动时可以认为翼型所占区域也充满了流体, 但是为了使人工引入的流体同翼型一样继续运动, 必须对这一部分流体施加质量力.

在刚体力学中, 任何力系的作用等价于其主矢量和主力矩的作用, 而在可变形介质力学中, 重要的则是力沿物体分布的特性.

面力 在连续介质力学中起主要作用的不是质量力而是面力, 即在连续介质的物质面上分布的力. 例如, 对于倒入容器中的水, 在水与容器壁的接触面 S 上显然有力的相互作用. 取曲面 S 的微元 $\mathrm{d}\sigma$, 可以引入面力微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中

$\boldsymbol{p}=\lim\limits_{\Delta\sigma\to 0}\Delta\boldsymbol{P}/\Delta\sigma$ 是作用于面微元 $\mathrm{d}\sigma$ 的面力的密度. 在曲面 S 的每一点都可以引入面力密度 $\boldsymbol{p}$, 它在不同的点一般是不同的.

内力和外力　力可以分为内力和外力. 在研究一个系统的运动时, 如果力是由属于该系统的对象引起的, 这样的力就称为内力; 如果力是由系统以外的对象引起的, 这样的力就称为外力.

外力和内力的概念是相对的. 例如, 如果我们同时考虑地球大气层内空气的运动和地球的运动, 则空气的重力是内力; 如果只研究空气的运动, 重力就是外力. 如果考虑物体和电磁场的运动, 则电磁力是内力; 如果只考虑物体的运动, 则电磁场对于物体来说是外在因素, 电磁力是外力.

内应力　设想在连续介质中取任意某一物质体 V, 以截面 S 将其分为 V_1 和 V_2 两部分 (图 23). 如果我们研究 V 的一部分的运动, 比如 V_1 的运动, 则这时第二部分即 V_2 对它的作用必须改为分布于 V_1 的质量力和分布于 S 的面力. 这样引入的相互作用力对 V_1 而言是外力. 如果我们研究物质体 V 整体的运动, 这些力就是内力. 可以用不同方法取截面 S, 显然, 分布于不同截面 S 的面力是不同的.

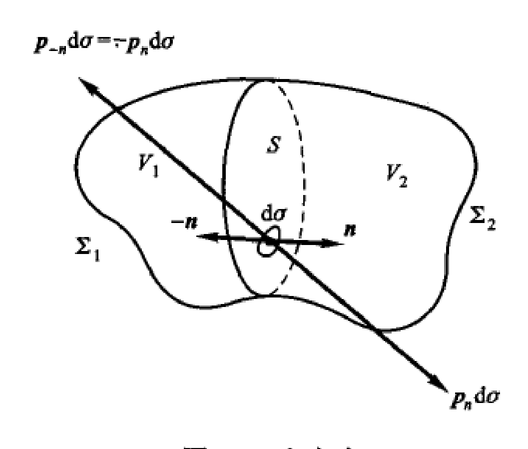


图 23.　内应力

取物体内部某点 M 并考虑该点的不同面微元 $\mathrm{d}\sigma$, 其方向由法线 $\boldsymbol{n}$ 决定. 我们用 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ 来表示物质体 V_2 内的介质对物质体 V_1 内的介质在法线为 $\boldsymbol{n}$ 的面微元 $\mathrm{d}\sigma$ 上的合作用力, 并进一步认为 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $\boldsymbol{p}_n$ 是有限矢量. 矢量 $\boldsymbol{p}_n$ 可以视为被面微元 $\mathrm{d}\sigma$ 分开的两部分介质之间相互作用力的面密度. 在一般情况下, $\boldsymbol{p}_n$ 可能与面微元 $\mathrm{d}\sigma$ 的方向和它的其他一些几何性质有关. 我们将总是这样选取法线方向 $\boldsymbol{n}$, 使得它对引入的力 $\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma$ 所作用的这部分介质来讲是外法线. 例如, 我们将把物质体 V_2 对 V_1 的影响用分布力 $\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma$ 代替, 而把物质体 V_1 对 V_2 的影响用分布力 $\boldsymbol{p}_{-n}\,\mathrm{d}\sigma$ 代替 (图 23). 在连续介质的任何一点都可以引入这种面力, 它们称为内应力.

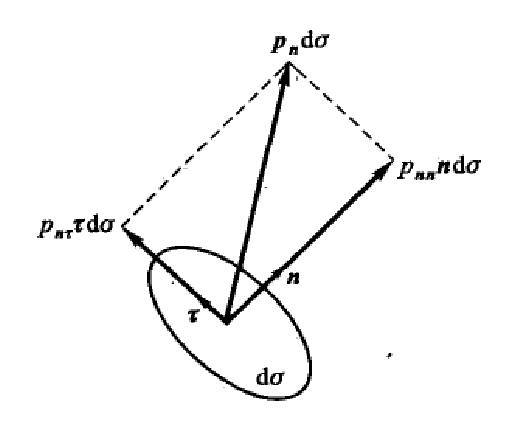


图 24.　内应力的法向分量和切向分量

在连续介质的每一点, 内应力 $\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma$ 都可以分解为沿面微元 $\mathrm{d}\sigma$ 的法向 $\boldsymbol{n}$ 和切向 $\boldsymbol{\tau}$ 的 2 个分量 (图 24):

$$\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma=p_{nn}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma+p_{n\tau}\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}\sigma,$$

式中 $p_{nn}\,\mathrm{d}\sigma$ 为内应力的法向分量, $p_{n\tau}\,\mathrm{d}\sigma$ 为切向分量, 亦称切向力, 而在流体的情况下还称为内摩擦力.

面力 $\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma$ 显然也可以是外力, 即作用于包围连续介质的外表面的力.

在连续介质的每一点 M 都存在无穷多个矢量 $\boldsymbol{p}_n$, 它们对应于经过该点的无穷多个面微元 $\mathrm{d}\sigma$. 然而, 我们将在后面得出, 在它们之间有一个与运动介质的个别性质无关的普适关系.

质点运动的基本动力学方程是牛顿第二定律:

$$\mathcal{F} = m\boldsymbol{a}.$$

我们现在要给出一个更加复杂的关系式来描述连续物质介质的运动, 但它是牛顿第二定律的直接推广.

质点和质点系的动量方程

考虑质量为 m 的质点相对于惯性坐标系 x, y, z 的运动. 因为质点的质量 m 不变, 所以有

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,m\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}. \tag{2.1}$$

质量与速度的乘积 $m\boldsymbol{v}$ 称为质点的动量. 对于一个质点, 我们有动量方程——质点的动量对时间的导数等于所有作用于该质点的力之和.

利用基本动量方程 (2.1) 可以解决两种典型题目: 根据已知的力求质点的运动规律, 或者根据已知的质点运动规律求作用于质点的力.

如果我们有 n 个质点所组成的质点系, 其中每个质点的质量为 m_i, 它在合力 $\mathcal{F}_i$ 的作用下以速度 $\boldsymbol{v}_i$ 运动, 那么对每个质点都可以写出动量方程 (2.1)

$$\frac{\mathrm{d}\,m_i\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}_i,$$

并且 $\mathcal{F}_i$ 包括了所有作用于序号为 i 的质点的力. 相对于 n 个质点所组成的整个系统来说, 这些力中即有外力, 也有内力. 把所有 n 个质点的动量方程 (2.1) 相加, 得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\,m_i\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i^{(\mathrm{e})}.$$

等式右侧是相对于质点系的所有外力之和, 因为根据牛顿第三定律, 相互作用的内力是成对存在的, 它们在求和时互相抵消了.

和

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i = m\boldsymbol{v}^*$$

称为系统的动量, 式中

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i, \quad \boldsymbol{v}^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i$$

分别是整个 n 质点系统的质量和质心速度. 这样, 我们得到 n 质点系统的动量方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i^{(\mathrm{e})}, \quad \text{或} \quad m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}^*}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i^{(\mathrm{e})}.$$

质点系的动量对时间的导数等于所有作用于系统的外力之和, 换言之, 系统的质量乘以系统质心的加速度等于所有作用于系统的外力之和.

因此, 任何质点系的运动可以对应于一个质点 (即系统的质心) 的运动. 当系统的尺寸较小而观察者的位置又很远时, 在很多问题中可以把质点系的运动归结为一个质点的运动, 即系统质心的运动.

质点的运动方程具有普适意义, 它可以应用于各种可能的力学系统: 星系、恒星、行星, 任何飞行器、人、鸟、昆虫, 等等.

连续介质有限物质体的动量方程

现在把动量方程推广到连续介质有限物质体的情况. 设想在介质中取表面为 Σ 的有限物质体 V, 因为[1]

$$\int_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}\tau) = \int_M \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}\tau,$$

所以把动量方程写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t} = \int_V \boldsymbol{F}\rho\,\mathrm{d}\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma, \quad \boldsymbol{Q} = \int_V \boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}\tau.$$

按照定义, 这里的 $\boldsymbol{Q}$ 是连续介质物质体 V 的动量, $\int_V \boldsymbol{F}\rho\,\mathrm{d}\tau$ 和 $\int_\Sigma \boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma$ 分别是作用于物质体 V 的外质量力之和与外面力之和.

因此, 对于连续介质的任何物质体 V 都可以写出相对于惯性参考系的动量方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}\tau = \int_V \boldsymbol{F}\rho\,\mathrm{d}\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma, \tag{2.2}$$

即连续介质物质体 V 的动量对时间的导数等于所有作用于该物质体的外质量力和外面力之和. 所取几何体 V 是运动的、可变形的任意物质体, 按照定义, 它是由同样一些介质微元组成的.

对于物质体 V 内的介质, 如果除了上述外分布力, 还有集中作用于物质体 V 内部某些点、线或面的外力, 则应当把这些外力之和补充到方程 (2.2) 的右侧.

关系式 (2.2) 是在连续介质力学中假设成立的基本动力学方程. 牛顿第二定律是质点力学的原始方程, 与此类似, 动量方程 (2.2) 则是连续介质力学的基础. 所有上述讨论应当视为引导和启发我们把连续介质的方程 (2.2) 与质点的牛顿方程联系起来的一些观点.

还可以提出以下观点来论证方程 (2.2). 可以按照公式

$$m\boldsymbol{v}^* = \int_V \boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}\tau$$

[1] 这里应用了质量守恒定律, 式中 $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\tau$ 和 M 分别表示连续介质的体微元 $\mathrm{d}\tau$ 的质量和有限物质体 V 的质量. ——译注

引入连续介质物质体 V 的质心速度 $\boldsymbol{v}^*$, 并把动量方程 (2.2) 表示为连续介质物质体 V 的质心的运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}^*}{\mathrm{d}t}=\int\limits_V \boldsymbol{F}\rho\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_\Sigma \boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma.$$

我们指出, 关系式 (2.2) 经常称作冲量方程, 因为它还可以写为如下形式:

$$\mathrm{d}\int\limits_V \boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}\tau=\int\limits_V \boldsymbol{F}\rho\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t+\int\limits_\Sigma \boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t.$$

关系式 (2.2) 可以视为用来确定力的方程. 实际上, 所有已知的关于力的定律都是从这个方程 (即推广的牛顿第二定律) 得出的[1]. 在实验观察的基础上, 利用各种假设, 或者利用那些推广实际结果的“思想实验”, 即可得到这些规律. 在最初的研究中利用 (2.2) 确定出力的定律后, 或者在其他一些情况下已经知道力, 就可以从 (2.2) 求出与这些力相对应的运动.

动量方程 (2.2) 是连续介质的任何运动的基本方程, 这些运动也包括不连续的运动和冲击过程. 对于连续介质的不连续运动, 其运动和状态特征量在物质体 V 内并非处处是坐标的连续函数; 对于冲击过程, 这些量是时间的间断函数.

特别地, 积分形式的动量定理 (2.2) 在连续运动区域中等价于将在下面建立的微分形式的连续介质运动方程. 从方程 (2.2) 还可以推出, 对于任何连续介质的任何运动, 应力 $\boldsymbol{p}_n$ 应当满足某些普适关系. 我们现在就来推导这些普适关系.

内应力的基本性质 这样, 应力 $\boldsymbol{p}_n$ 与给定点的相应面微元的方向有某种关系, 而动量方程 (2.2) 则限制了这种关系的可能的形式. 我们将在连续介质运动连续的情况下推导这些限制.

设想取物质体 V, 并用任意截面 S 把它分为 V_1 和 V_2 两部分 (图 23). 分别对 V_1 和 V_2 以及整个物质体 V 应用动量方程 (2.2), 注意到被分开的两部分之间的相互作用可以通过质量分布力和分布于与介质物质点一起运动的截面 S 的面力来实现, 我们可以写出

$$\int\limits_{V_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\rho\,\mathrm{d}\tau=\int\limits_{V_1}\boldsymbol{F}'\rho\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_{\Sigma_1}\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma+\int\limits_S \boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$\int\limits_{V_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\rho\,\mathrm{d}\tau=\int\limits_{V_2}\boldsymbol{F}''\rho\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_{\Sigma_2}\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma+\int\limits_S \boldsymbol{p}_{-n}\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$\int\limits_{V}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\rho\,\mathrm{d}\tau=\int\limits_{V}\boldsymbol{F}\rho\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_{\Sigma}\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma,$$

[1] 关于这个问题, 详见以下专著: Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 7-е изд. Москва: Наука, 1972 (第八版中译本: Л. И. 谢多夫. 力学中的相似方法与量纲理论. 沈青, 倪锄非, 李维新译. 北京: 科学出版社, 1982). 第一章 §5.

式中 $\boldsymbol{F}'$ 和 $\boldsymbol{F}''$ 分别表示作用于物质体 V_1 和 V_2 的质量分布力密度. 把前两个等式相加, 再减去第三个等式, 在内质量力总是满足作用与反作用定律的条件下[1)], 即当

$$\int_{V_1} \boldsymbol{F}'\rho\,\mathrm{d}\tau + \int_{V_2} \boldsymbol{F}''\rho\,\mathrm{d}\tau = \int_{V} \boldsymbol{F}\rho\,\mathrm{d}\tau$$

时, 我们有

$$\int_S (\boldsymbol{p}_n + \boldsymbol{p}_{-n})\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

因为物质体 V, V_1, V_2 和截面 S 是任意的, 由此即得

$$\boldsymbol{p}_n = -\boldsymbol{p}_{-n}. \tag{2.3}$$

我们指出, 关于运动连续的假设非常重要. 例如, 以后将证明 (参见第七章), 如果 S 是速度 $\boldsymbol{v}$ 的间断面且物质介质微元可以通过 S, 式 (2.3) 就不成立. 这时 V_1 和 V_2 不是物质体, 所以 (2.3) 应当替换为其他关系式.

动量方程 (2.2) 适用于任何物质体 V, 包括任意小的物质体. 正是因为形如 (2.2) 的动量方程对连续介质任何任意小的物质体都适用, 所以这个方程中的被积函数会受到一些限制, 我们来阐明这些限制. 为此, 假设运动特征量是连续的和有限的, 组成表达式

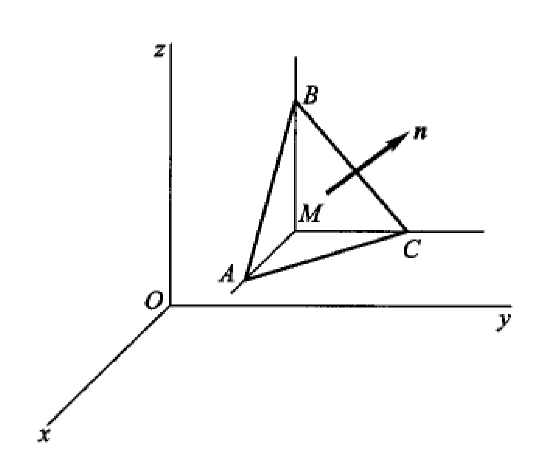


图 25. 用于证明内应力的性质

$$\boldsymbol{\Omega} = \int_V \boldsymbol{F}\rho\,\mathrm{d}\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma - \int_V \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\rho\,\mathrm{d}\tau,$$

它对于任何物质体 V 都应当精确地等于零.

显然, 当物质体 V 收缩为一点时, 无论表达式 $\boldsymbol{\Omega}$ 中被积函数的形式如何, 只要它们是有限的, 极限式 $\lim\limits_{V\to 0} \boldsymbol{\Omega} = 0$ 都成立.

现在, 在给定时刻取连续介质的任意一点 M, 沿平行于笛卡儿坐标系坐标轴的方向从该点引任意的无穷小线段 $\mathrm{d}x = MA$, $\mathrm{d}y = MC$, $\mathrm{d}z = MB$ (图 25), 并把这样作出的无穷小四面体 $MABC$ 看作物质体 V. 它的面 MBC, MAB, MAC 垂直于相应坐标轴, 而面 ABC 的方向是任意的, 决定于单位法向矢量

$$\boldsymbol{n} = \cos(\boldsymbol{n}, x)\,\boldsymbol{i} + \cos(\boldsymbol{n}, y)\,\boldsymbol{j} + \cos(\boldsymbol{n}, z)\,\boldsymbol{k} = n_i\boldsymbol{e}^i.$$

我们分别用 $\boldsymbol{p}^1$, $\boldsymbol{p}^2$, $\boldsymbol{p}^3$ 和 $\boldsymbol{p}_n$ 表示法线为 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n}$ 的面微元上的应力, 用 S 表示面 ABC 的面积. 这时, 面 MBC, MAB, MAC 的面积显然分别等于 $S\cos(\boldsymbol{n}, x)$, $S\cos(\boldsymbol{n}, y)$, $S\cos(\boldsymbol{n}, z)$, 而四面体的体积 $V = hS/3$, 式中 h 是从顶点 M 到面 ABC 的高. 如果四面体在保持相似的条件下收缩于一点, 则 h 是一阶无穷小量, 而 S 是二阶无穷小量. 对于在给定时刻位于此四面体内的连续介质, 我们来计算 $\boldsymbol{\Omega}$ 的值.

[1)] 不作这个假设也可以得到式 (2.3), 只要对无穷小体积 V_1, V_2 和 V 应用动量方程即可. 此后, 质量力的作用与反作用定律是作为动量方程的推论而得到的.

利用内应力的性质 (2.3), 显然得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}=&-\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\rho\right)_M\frac{1}{3}Sh+(\boldsymbol{F}\rho)_M\frac{1}{3}Sh+\boldsymbol{p}_nS\\&-\boldsymbol{p}^1S\cos(\boldsymbol{n},x)-\boldsymbol{p}^2S\cos(\boldsymbol{n},y)-\boldsymbol{p}^3S\cos(\boldsymbol{n},z)+\boldsymbol{O}(h^{2+\lambda}),\end{aligned}$$

其中 $\lambda>0$. 现在令四面体在保持相似的条件下收缩至一点, 那么, 因为由 (2.2) 有 $\boldsymbol{\Omega}=0$, 应当成立的极限关系式包括:

$$\lim_{V\to0}\frac{\boldsymbol{\Omega}}{h}=0,\quad \lim_{V\to0}\frac{\boldsymbol{\Omega}}{h^2}=0,\quad \lim_{V\to0}\frac{\boldsymbol{\Omega}}{h^3}=0.$$

第一个极限在运动特征量连续且有限的情况下显然永远等于零, 由此并未得出任何对 $\boldsymbol{\Omega}$ 中被积函数的限制. 从条件

$$\lim_{V\to0}\frac{\boldsymbol{\Omega}}{S}=0$$

可知, 以下等式应当永远成立:

$$\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{p}^1\cos(\boldsymbol{n},x)+\boldsymbol{p}^2\cos(\boldsymbol{n},y)+\boldsymbol{p}^3\cos(\boldsymbol{n},z). \tag{2.4}$$

该等式表明, 取自连续介质的点 M 的任何面微元 $\mathrm{d}\sigma$ 上的应力 $\boldsymbol{p}_n$, 总是按照公式 (2.4) 通过取自同一点 M 的平行于笛卡儿直角坐标系坐标平面的固定面微元上的应力 $\boldsymbol{p}^1,\boldsymbol{p}^2,\boldsymbol{p}^3$ 线性地表示出来.

关系式 (2.4) 还表明, 作用于表面为 Σ 的连续介质物质体 V 的外面力之和 $\int_\Sigma\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma$ 可以按照奥一高公式变换为体积分,

$$\int_\Sigma\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma=\int_V\left(\frac{\partial\boldsymbol{p}^1}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{p}^2}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{p}^3}{\partial z}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{2.5}$$

笛卡儿坐标系下的连续介质运动方程

最后, 考虑条件

$$\lim_{V\to0}\frac{\boldsymbol{\Omega}}{V}=0.$$

利用 (2.5) 把 $\boldsymbol{\Omega}$ 表示为

$$\boldsymbol{\Omega}=\int_V\boldsymbol{F}\rho\,\mathrm{d}\tau+\int_V\left(\frac{\partial\boldsymbol{p}^1}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{p}^2}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{p}^3}{\partial z}\right)\mathrm{d}\tau-\int_V\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\rho\,\mathrm{d}\tau.$$

从条件 $\lim\limits_{V\to0}\boldsymbol{\Omega}/V=0$ 得

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{F}+\frac{\partial\boldsymbol{p}^1}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{p}^2}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{p}^3}{\partial z}. \tag{2.6}$$

这个矢量方程是连续介质运动的基本微分方程, 它对于任何介质的任何连续运动都成立. 在连续运动的情况下, 它完全等价于动量方程 (2.2), 因为从它可知, 对于任何物质体 V 都成立 $\boldsymbol{\Omega}=0$. 我们强调, 式 (2.5) 和 (2.6) 是在假设矢量 $\boldsymbol{p}^i$ 连续、可

微[1]的情况下得到的, 而方程 (2.2) 则成立于更一般的情况.

我们把矢量 $\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{p}^3$ 按照笛卡儿坐标系的基矢量 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}, \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k}$ 分解:

$$\boldsymbol{p}^1=p^{k1}\boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{p}^2=p^{k2}\boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{p}^3=p^{k3}\boldsymbol{e}_k;\quad \text{或}\quad \boldsymbol{p}^i=p^{ki}\boldsymbol{e}_k,$$

并引入由 9 个数组成的矩阵

$$\begin{pmatrix} p^{11} & p^{12} & p^{13} \\ p^{21} & p^{22} & p^{23} \\ p^{31} & p^{32} & p^{33} \end{pmatrix} = (p^{ik}) = \boldsymbol{P}.$$

根据应力的性质 (2.4), 取自连续介质给定点的任意方向的面微元上的应力

$$\boldsymbol{p}_n = p_n^1\boldsymbol{e}_1 + p_n^2\boldsymbol{e}_2 + p_n^3\boldsymbol{e}_3 = p_n^i\boldsymbol{e}_i,$$

其分量 p_n^i 可以用以下公式来表示:

$$\begin{aligned} p_n^1 &= p^{11}\cos(\boldsymbol{n},x)+p^{12}\cos(\boldsymbol{n},y)+p^{13}\cos(\boldsymbol{n},z)=p^{1i}n_i, \\ p_n^2 &= p^{21}\cos(\boldsymbol{n},x)+p^{22}\cos(\boldsymbol{n},y)+p^{23}\cos(\boldsymbol{n},z)=p^{2i}n_i, \\ p_n^3 &= p^{31}\cos(\boldsymbol{n},x)+p^{32}\cos(\boldsymbol{n},y)+p^{33}\cos(\boldsymbol{n},z)=p^{3i}n_i. \end{aligned} \tag{2.7}$$

因此, 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 确定了从矢量 $\boldsymbol{n}=n_i\boldsymbol{e}^i$ 的分量 n_i 到矢量 $\boldsymbol{p}_n$ 的分量 p_n^i 的变换.

矢量形式的连续介质运动方程 (2.6) 中包含有 9 个函数 p^{ik}, 该方程在笛卡儿坐标系坐标轴上的投影可以写为如下形式:

$$\begin{aligned} \rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \rho F_x + \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{12}}{\partial y} + \frac{\partial p^{13}}{\partial z}, \\ \rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \rho F_y + \frac{\partial p^{21}}{\partial x} + \frac{\partial p^{22}}{\partial y} + \frac{\partial p^{23}}{\partial z}, \\ \rho\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= \rho F_z + \frac{\partial p^{31}}{\partial x} + \frac{\partial p^{32}}{\partial y} + \frac{\partial p^{33}}{\partial z}, \end{aligned}$$

其中 F_x, F_y, F_z 表示质量力密度 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴上的投影.

如果把这些运动方程与连续性方程 (1.3) 合在一起, 我们就得到由 4 个方程组成的方程组, 它在外质量力给定时一般而言含有 13 个未知函数: 密度 ρ, 速度的分量 u, v, w 和内应力的 9 个分量 p^{ik}.

应力张量 任意方向的面微元上的应力矢量 $\boldsymbol{p}_n$ 与坐标面微元上的应力矢量 $\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{p}^3$ 之间的关系 (2.4) 可以利用 (2.7) 写为

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}^i n_i = p^{ki}\boldsymbol{e}_k n_i = \boldsymbol{p}^i(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{n}) = p^{ki}\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{n}). \tag{2.8}$$

此式给出了从矢量 $\boldsymbol{n}$ 的分量到矢量 $\boldsymbol{p}_n$ 的分量的线性变换 (系数为 p^{ki}). 它是利用笛卡儿直角坐标系得到的, 因此在任意笛卡儿直角坐标系中都可定义 p^{ki}. 式 (2.8)

[1] 还要求速度 $\boldsymbol{v}$ 连续、可微. ——译注

是矢量 $\boldsymbol{p}_n$ 和 $\boldsymbol{n}$ 之间的关系式, 因而可以在任意曲线坐标系中写出. 由此可见, 在直角坐标系和任意曲线坐标系中, 都可以利用式 (2.8) 引入量 p^{ki}, 它们应当视为张量

$$\boldsymbol{P} = p^{ki}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_i$$

的逆变分量. 这个张量称为应力张量, 并且在任何坐标系中都成立等式[1]

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}^i n_i,$$

式中 $\boldsymbol{p}_n$ 是法线为 $\boldsymbol{n}$ 的任意面微元上的应力, n_i 是 $\boldsymbol{n}$ 的协变分量.

应力张量的物理分量 我们指出, 一般而言只有在笛卡儿直角坐标系的情况下才在相应的坐标面上成立等式 $\boldsymbol{p}^i = \boldsymbol{p}_n$. 容易证明, 在任意的曲线坐标系中, 在相应的坐标面上 $\boldsymbol{p}^i \neq \boldsymbol{p}_n$.

实际上, 对于给定的曲线坐标系, 考虑由基矢量 $\boldsymbol{e}_{i+1}$ 和 $\boldsymbol{e}_{i+2}$ (指标按照 3 的模来定义) 所确定的面微元, 其法线的正方向定义为逆变基矢量[2]

$$\boldsymbol{e}^i = \frac{\boldsymbol{e}_{i+1}\times\boldsymbol{e}_{i+2}}{\sqrt{g}}$$

的方向. 此方向的单位矢量显然由以下公式确定:

$$\boldsymbol{n}^i = \frac{\boldsymbol{e}^i}{\sqrt{g^{ii}}},$$

其中 $g^{ii} > 0$, 平方根在这里和下文中均取正号. 我们用 $\boldsymbol{p}_i^*$ 来表示该面微元上的应力矢量 $\boldsymbol{p}_n$, 则根据 (2.8), 此应力可以写为

$$\boldsymbol{p}_i^* = \frac{p^{\alpha k}\boldsymbol{e}_\alpha(\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}^i)}{\sqrt{g^{ii}}} = \frac{p^{\alpha i}\boldsymbol{e}_\alpha}{\sqrt{g^{ii}}}.$$

因此, 它一般不等于矢量 $\boldsymbol{p}^i = p^{\alpha i}\boldsymbol{e}_\alpha$.

应力矢量 $\boldsymbol{p}_i^*$ 可以按照所考虑的点的单位基矢量 $\boldsymbol{e}_\alpha/\sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ 分解:

$$\boldsymbol{p}_i^* = X^{\alpha i}\frac{\boldsymbol{e}_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}.$$

量 $X^{\alpha i}$ 称为应力矢量 $\boldsymbol{p}_i^*$ 的物理分量[3]. 由最后两式可以写出

$$p^{\alpha i} = X^{\alpha i}\sqrt{\frac{g^{ii}}{g_{\alpha\alpha}}}$$

(式中不对 α 求和). 由此可见, 物理分量 $X^{\alpha i}$ 不是某张量的分量.

在笛卡儿直角坐标系中 $p^{\alpha i} = X^{\alpha i}$.

[1] 式中张量 $\boldsymbol{P}$ 与矢量 $\boldsymbol{n}$ 的内积 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ 是一个矢量, 该运算的定义为: $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = p^{ki}n_i\boldsymbol{e}_k$. ——译注

[2] 式中 $g = \det(g_{ij}) = [\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)]^2$, 见第二章公式 (4.26). ——译注

[3] 关于矢量和张量的物理分量的一般讨论, 参见第四章 §3. ——译注

任意坐标系中的连续介质运动方程 从矢量形式的动量方程 (2.2)

$$\int_V \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}\tau = \int_V \boldsymbol{F} \rho \,\mathrm{d}\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n \,\mathrm{d}\sigma$$

和奥—高定理

$$\int_\Sigma \boldsymbol{p}_n \,\mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma \boldsymbol{p}^i n_i \,\mathrm{d}\sigma = \int_V \nabla_i \boldsymbol{p}^i \,\mathrm{d}\tau$$

可知, 在连续运动的情况下, 在任何曲线标系中都成立如下运动方程:

$$\rho \boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{F} + \nabla_i \boldsymbol{p}^i, \quad 或 \quad \rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ki}. \tag{2.9}$$

在运动方程 (2.9) 中,

$$a^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i \nabla_i v^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i \left(\frac{\partial v^k}{\partial \eta^i} + v^s \Gamma^k_{si} \right),$$

$$\nabla_i \boldsymbol{p}^i = \frac{\partial \boldsymbol{p}^i}{\partial \eta^i} + \boldsymbol{p}^s \Gamma^i_{si} = \nabla_i p^{ki} \boldsymbol{e}_k.$$

矢量方程 (2.9) 既成立于运动的坐标系, 也成立于静止的坐标系, 例如, 它在参考系和随体坐标系中都成立. 但是应当注意, 矢量 $\boldsymbol{a}$ 是介质的物质点相对于某个惯性坐标系的加速度, 而 $\boldsymbol{F}$ 是给定的质量力密度. 如果相对于非惯性坐标系来研究运动和加速度, 那么在 $\boldsymbol{F}$ 的表达式中应当包括惯性力.

在连续介质中取质量为 $\rho\,\mathrm{d}\tau$ 的微元, 它受到下面这些力的作用: 质量力 $\rho \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\tau$; 力 $-\rho \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\tau$, 它在随体坐标系中是惯性力; 力 $\nabla_i \boldsymbol{p}^i\,\mathrm{d}\tau = \nabla_i p^{ki} \boldsymbol{e}_k\,\mathrm{d}\tau$, 它可以看作是因为微元边界上的面力作用而出现的质量力. 方程 (2.9) 可以视为相对于随体坐标系平衡的条件, 因为根据 (2.9), 所有作用于微元的力之和等于零.

我们指出, 如果张量 $\boldsymbol{P} = p^{ki} \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_i$ 在介质的所有点均保持不变, 则 $\nabla_i \boldsymbol{p}^i = 0$. 在笛卡儿坐标系中, 只有当应力张量的分量 p^{ki} 与坐标 x, y, z 有关时, 这些分量才会出现在运动方程中. 尽管如此, 等式 $\nabla_i \boldsymbol{p}^i = 0$ (或 $\nabla_i p^{ki} = 0$) 并不等价于等式 $\boldsymbol{P} = p^{ki} \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_i = \mathrm{const}$, 而后者等价于 $\nabla_j p^{ki} = 0$, i, j, $k = 1, 2, 3$. 例如, 如果不受质量力作用的介质是静止的, 则

$$\nabla_i p^{ki} = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

这些方程是研究各种物体在只受外面力作用时的平衡问题的基本方程.

§3. 动量矩方程

正如前面所指出的, 已经得到的描述连续介质运动的普适方程组尚不封闭, 还可以得到其他一些与运动介质的个别性质无关的普适方程. 为了这个目的, 我们考虑另外一个一般力学方程——动量矩方程.

质点和质点系的动量矩方程 考虑质量为 m 的质点相对于某惯性坐标系的运动. 取质点相对于坐标系原点 O 的径矢 $\boldsymbol{r}$ 与方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\mathcal{F}}$$

的矢积, 得质点的动量矩方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\mathcal{M}}, \tag{3.1}$$

式中

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{\mathcal{M}}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\mathcal{F}}$$

分别为质点对点 O 的动量矩和作用于该质点的合力 $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ 的力矩. 因此, 一个质点的动量矩方程是牛顿第二定律的一个平凡的推论.

如果我们有由 n 个质点组成的系统, 每个质点的质量为 m_i, 运动速度为 $\boldsymbol{v}_i$, 则对其中每个质点都可写出动量矩方程 (3.1):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{\mathcal{F}}_i,$$

式中 $\boldsymbol{\mathcal{F}}_i$ 是所有作用于质量为 m_i 的质点的力的主矢量, 其中也包括了对整个系统而言的内力. 把系统中所有 n 个质点的这些方程相加, 并定义系统的动量矩为

$$\boldsymbol{K}=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i),$$

显然可得质点系的动量矩方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{\mathcal{F}}_i^{(\mathrm{e})}).$$

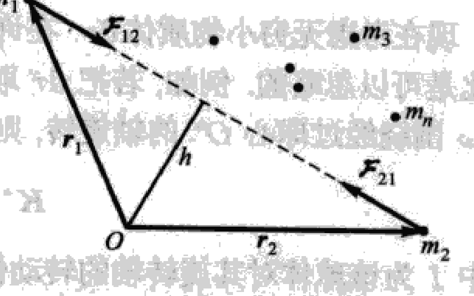


图 26. 所有内力对点 O 的力矩之和等于零

根据牛顿第三定律 (见图 26), 这个方程的右侧只含有整个系统所受外力的力矩之和. 质点系对某点 O 的动量矩对时间的导数等于所有作用于该系统的外力对该点 O 的力矩之和.

我们指出, 质点的动量矩可以写为

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{r}^*\times m\boldsymbol{v}^*+\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_{i\,\mathrm{rel}}\times m_i\boldsymbol{v}_{i\,\mathrm{rel}}),$$

式中, $m=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i$, $\boldsymbol{r}^*$ 为系统质心的径矢, $\boldsymbol{v}^*$ 为质心的速度, $\boldsymbol{r}_{i\,\mathrm{rel}}$ 为第 i 个质点对质心的径矢, $\boldsymbol{v}_{i\,\mathrm{rel}}$ 为第 i 个质点相对于与质心一起平动的坐标系的速度.

连续介质物质体的动量矩与固有动量矩 矢量

$$\boldsymbol{K}=\int_V\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}\tau$$

通常称为连续介质有限物质体 V 的动量矩, 式中 $\boldsymbol{r}$ 是连续介质诸点对某不动点 O 的径矢, $\boldsymbol{v}$ 是这些点的速度. 尽管如此, 我们再更仔细地研究一下这个问题.

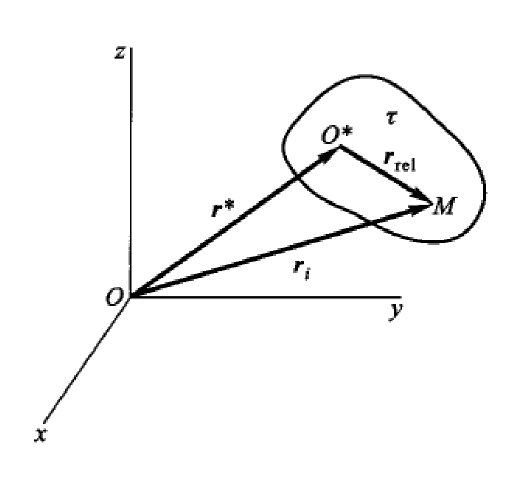


图 27. 用于推导连续介质物质体的动量矩方程

设我们有某一连续介质物质体 τ, 其质量为 m. 显然, 该物质体中任意一点 M 的速度 $\boldsymbol{v}$ 可以表示为和的形式 (图 27):

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}},$$

式中 $\boldsymbol{v}^*$ 为物质体 τ 的质心 O^* 的速度, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$ 为所考虑的点相对于质心的速度. 那么, 物质体 τ 对某一点 O 的动量矩显然等于质量为 m 且位于该物质体质心的质点对点 O 的动量矩与物质体 τ 的所有点对质心 O^* 的动量矩之和, 即

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{Q} + \int_\tau \boldsymbol{r}_{\mathrm{rel}} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\, \rho\, \mathrm{d}\tau,$$

式中 $\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}^*$ 是质量为 m 且位于质心的质点的动量矩, 亦即

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^*, \quad \boldsymbol{K}^* = \int_\tau \boldsymbol{r}_{\mathrm{rel}} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\, \rho\, \mathrm{d}\tau.$$

现在考虑无穷小物质体 $\mathrm{d}\tau$. 在许多情况下, 无穷小物质体的动量矩 $\boldsymbol{K}^*$ 与 $\boldsymbol{r}^*\times\boldsymbol{Q}$ 相比是可以忽略的. 例如, 若把 $\mathrm{d}\tau$ 取为半径为 R 的无穷小均匀球体, 并使它以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 围绕经过球心 O^* 的轴旋转, 则

$$\boldsymbol{K}^* = I\boldsymbol{\omega} = ml^2\boldsymbol{\omega},$$

式中 I 为该球体对其旋转轴的转动惯量, l 为惯量半径. 显然, ml^2 的量级是 R^5, 而 $\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{Q}$ 的量级是 R^3, 所以, 只要 $\boldsymbol{\omega}$ 是有限的, $\boldsymbol{K}^*$ 与 $\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{Q}$ 相比就是小量, 于是连续介质物质体的动量矩 $\boldsymbol{K}$ 在取极限后等于

$$\int_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\rho\, \mathrm{d}\tau.$$

然而, 如果角速度 ω 足够大, 使得 ωl^2 是有限的, 则 $\boldsymbol{K}^*$ 与 $\boldsymbol{r}^*\times\boldsymbol{Q}$ 具有同一量级 R^3, 连续介质物质体 V 的动量矩就应当等于

$$\boldsymbol{K} = \int_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\rho\, \mathrm{d}\tau + \int_V \boldsymbol{k}\rho\, \mathrm{d}\tau, \tag{3.2}$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 所表示的量称为内禀动量矩密度.

我们从物理微观观点来讨论一下这个问题.

考虑由一个原子核和围绕它旋转的一个电子组成的系统, 即一个原子. 电子以光速量级的速度沿轨道旋转, 所以, 尽管原子的尺寸很小, 原子核一电子系统却具有

颇大的内禀动量矩. 因电子沿轨道转动而产生的动量矩称为轨道动量矩.

此外, 电子以及原子核还具有一种内禀动量矩——自旋, 自旋的存在不能通过引入相应的机械运动来解释.

因此, 所有原子一般而言都具有内禀动量矩 $\boldsymbol{k}$, 但由于原子的运动在很多情况下是不规则的, 所以所有原子的这些动量矩 $\boldsymbol{k}$ 之和等于零. 不过, 基本粒子的运动有时——例如加上磁场时——可以变得有序, 于是所有原子的内禀动量矩之和不再等于零. 这时, 宏观的连续介质微元的动量矩表达式就应当包括内禀动量矩之和

$$\boldsymbol{K}' = \int\limits_V \boldsymbol{k}\rho\,\mathrm{d}\tau.$$

因此, 假如我们想在连续介质力学中描述实际介质在电磁场中的运动, 我们就应当引入内禀动量矩 $\boldsymbol{k}$, 并在考虑这些动量矩的情况下按照 (3.2) 来定义连续介质物质体 V 的动量矩.

最近, 连续介质力学问题的范围因现代技术的需求而大为扩展, 在连续介质力学中才刚刚开始研究内禀动量矩. 在连续介质力学的经典问题中并不考虑内禀动量矩 $\boldsymbol{k}$, 所以连续介质物质体 V 的动量矩定义为

$$\int\limits_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}\tau.$$

质量力偶和面力偶 引入内禀动量矩 $\boldsymbol{k}$ 后, 我们就应当假设存在质量力偶和面力偶. 质量力和面力作用于连续介质的每个微元, 但是外部物体对连续介质微元的作用有可能无法仅用这些力来代替, 还需要引入质量力偶和面力偶.

我们分别用 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{Q}_n$ 来表示单位质量介质所受的质量力偶矩和单位面积上的面力偶矩. 例如, 位于地球磁场中的指南针, 其指针的每一磁元所受力偶就可以当作质量力偶.

连续介质物质体的动量矩方程 作为单个质点和质点系的动量矩方程的推广, 我们现在把表面为 Σ 的连续介质有限物质体 V 的动量矩方程表述为以下形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int\limits_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_V \boldsymbol{k}\rho\,\mathrm{d}\tau\right)=\int\limits_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\rho\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_\Sigma \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma+\int\limits_V \boldsymbol{h}\rho\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_\Sigma \boldsymbol{Q}_n\,\mathrm{d}\sigma. \quad (3.3)$$

连续介质任意物质体 V 的动量矩 (含内禀动量矩) 对时间的导数, 等于作用于该物质体的外质量力和外面力的力矩, 以及由外部物体引起的作用于该物质体的质量力偶矩和面力偶矩之和.

动量矩方程和动量方程都是对连续介质物质体 V 提出的方程, 这类似于对单个质点所提出的牛顿定律 $\mathcal{F}=m\boldsymbol{a}$. 我们强调, 连续介质物质体 V 的动量矩方程不是质点系力学中的动量矩方程的推论, 而是独立的方程. 在提出该方程之前的所有讨

论应当视为仅仅具有引导和启发的作用.

对于设想取出的任何有限的物质体, 方程 (3.3) 同动量方程一样都是连续介质力学的基本方程. 该方程适用于任何连续介质的任何运动, 其中既包括连续的运动, 也包括特征量对空间点的坐标和时间存在间断的运动.

我们指出, 当前必须引入其他一些高阶矩, 并类似于一阶动量矩方程 (3.3) 那样提出连续介质力学的其他一些新的基本关系式.

经典情况下的动量矩方程 在经典情况下既没有内禀动量矩, 也没有质量力偶和面力偶, 这时动量矩方程具有以下形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}\tau=\int\limits_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\rho\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_\Sigma \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma.$$

连续介质物质体 V 对 (与惯性坐标系相连的) 某一点 O 的动量矩对时间的导数等于作用于该物质体的外质量力和外面力对同一点 O 的力矩之和.

若物体不受外力作用, 则显然动量矩 $\boldsymbol{K}$ 守恒:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}=0.$$

旋磁效应和动量矩方程 为了说明一般而言应当考虑内禀动量矩和质量力偶, 我们来观察一个实验. 如果在磁场中放置一根铁棒, 它就会被磁化, 并且可以证明铁棒中的内禀动量矩 $\boldsymbol{k}$ 之和不为零.

事实上, 设该铁棒自由悬挂于真空中的磁场内并处于静止状态. 若去掉磁场, 则由于无规则的热运动, 铁棒中内禀动量矩 $\boldsymbol{k}$ 的分布经过某一时间后成为无规则的, 所以内禀动量矩之和等于零. 此时, 因为铁棒不受任何外部物体的作用, 总动量矩应当守恒, 所以铁棒应当作为一个整体开始旋转, 从而产生动量矩.

实验表明, 这样的铁棒在去掉磁场后果然开始旋转. 这就是通常所称的旋磁效应. 如果不考虑内禀动量矩和质量力偶, 就不能解释这个效应.

微分形式的动量矩方程 对于连续介质的连续运动, 可以利用等式 (2.4) 和奥－高定理把外面力的力矩之和表示为对物质体 V 积分的形式,

$$\int\limits_\Sigma \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma=\int\limits_\Sigma(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}^i)n_i\,\mathrm{d}\sigma=\int\limits_V\nabla_i(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}^i)\,\mathrm{d}\tau$$

可以证明, 面力偶矩 $\boldsymbol{Q}_n$ 可以像内应力 $\boldsymbol{p}_n$ 那样表示为以下形式:

$$\boldsymbol{Q}_n=\boldsymbol{Q}^i n_i.$$

于是, 利用奥－高定理得

$$\int\limits_\Sigma \boldsymbol{Q}_n\,\mathrm{d}\sigma=\int\limits_\Sigma \boldsymbol{Q}^i n_i\,\mathrm{d}\sigma=\int\limits_V\nabla_i\boldsymbol{Q}^i\,\mathrm{d}\tau.$$

我们还要用到变换

$$\int\limits_V \nabla_i(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}^i)\,\mathrm{d}\tau=\int\limits_V \boldsymbol{r}\times\nabla_i\boldsymbol{p}^i\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_V \nabla_i\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}^i\,\mathrm{d}\tau=\int\limits_V \boldsymbol{r}\times\nabla_i\boldsymbol{p}^i\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_V(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_k)p^{ki}\,\mathrm{d}\tau,$$

因为 $\nabla_i\boldsymbol{r}=\partial\boldsymbol{r}/\partial x^i=\boldsymbol{e}_i$.

在质量 $\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}\tau$ 守恒的条件下, 动量矩定理 (3.3) 现在可以写为

$$\int\limits_V \boldsymbol{r}\times\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\nabla_i\boldsymbol{p}^i\right)\rho\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_V\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}\rho\,\mathrm{d}\tau=\int\limits_V\boldsymbol{h}\rho\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_V\nabla_i\boldsymbol{Q}^i\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_V(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_k)p^{ki}\mathrm{d}\tau,$$

或者利用动量方程 (2.9) 写为

$$\int\limits_V\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}\rho\,\mathrm{d}\tau=\int\limits_V\boldsymbol{h}\rho\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_V\nabla_i\boldsymbol{Q}^i\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_V(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_k)p^{ki}\,\mathrm{d}\tau.$$

因为连续介质物质体 V 是任意的, 由此可得连续介质在运动连续时的微分形式的动量矩方程

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{h}+\nabla_i\boldsymbol{Q}^i+(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_k)p^{ki}. \tag{3.4}$$

在经典情况下既没有内禀动量矩, 也没有质量力偶和面力偶, 动量矩方程 (3.4) 的形式为

$$(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_k)p^{ki}=0. \tag{3.5}$$

应力张量在经典情况下的对称性 动量矩方程 (3.5) 显然还可以写为如下形式:

$$(\boldsymbol{e}_i\underset{k<i}{\times}\boldsymbol{e}_k)p^{ki}+(\boldsymbol{e}_i\underset{k>i}{\times}\boldsymbol{e}_k)p^{ki}=0.$$

把后一个求和表达式中表示求和的指标 k 与 i 互换, 得

$$(\boldsymbol{e}_i\underset{k<i}{\times}\boldsymbol{e}_k)p^{ki}+(\boldsymbol{e}_k\underset{k<i}{\times}\boldsymbol{e}_i)p^{ik}=0,$$

或者根据矢积的性质, 有

$$(\boldsymbol{e}_i\underset{k<i}{\times}\boldsymbol{e}_k)(p^{ki}-p^{ik})=0.$$

由此可知当 $k\neq i$ 时 $p^{ki}=p^{ik}$, 即

$$p^{13}=p^{31},\quad p^{12}=p^{21},\quad p^{23}=p^{32}.$$

因此, 动量矩方程在经典情况下的推论是应力张量对称. 显然, 如果应力张量对称, 则动量矩方程 (3.5) 恒成立. 我们强调, 一般而言, 只有在没有内禀动量矩、外质量力偶和外面力偶的时候才能从动量矩方程推出应力张量的对称性.

我们还记得, 前面已经得到了描述连续介质运动的 4 个普适方程, 现在又增加了 3 个动量矩方程. 在经典情况下, 这 3 个附加的方程不包含新的未知量, 它们只是使应力张量独立分量的数目减少到 6 个.

然而，所得运动方程组仍不封闭. 以后我们将看到, 在许多情况下可以对应力张量的分量 p^{ik} 写出另外一些与连续介质具体模型的物理特征有关的公式, 这是得到封闭方程组的一个重要步骤.

关于动量 $\boldsymbol{Q}$ 和动量矩 $\boldsymbol{K}$ 这两个矢量的概念, 我们再给出下面的一般说明. 在牛顿力学中, 矢量 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 可以视为不变的对象, 因为在从一个坐标系变换到相对于原坐标系静止的任何其他笛卡儿坐标系或曲线坐标系时, 这些量和相应方程是不变的. 然而, 这些"不变的"对象与观察者所用参考系的选择有密切的关系. 在从一个参考系变换到相对于原参考系运动的其他参考系时, 即使是从一个惯性参考系变换到另一个惯性参考系, 这些矢量也会变化.

在一般情况下, 当变换到任意的运动 (非惯性) 坐标系时, 相应方程 (动量方程和动量矩方程) 发生变化, 在方程右侧出现附加的外惯性力.

我们强调, 尽管矢量 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 在上述意义下不变, 但是相对于相互之间运动的一类参考系, 这些矢量是不能独立于参考系而确定的[1]. 如果在随体坐标系中研究介质的所有过程, 则前面引入的动量在这个坐标系中永远等于零.

§ 4. 对称应力张量的主轴和主分量

应力张量的张量面 我们来画出应力张量的张量面. 取介质的任意一点 O, 考虑经过该点的由不同法线 $\boldsymbol{n}$ 表征的面微元 $\mathrm{d}\sigma$. 在每个这样的面微元上都作用着密度为 $\boldsymbol{p}_n$ 的面力, 面力密度有时称为应力. 把应力 $\boldsymbol{p}_n$ 投影至相应法线 $\boldsymbol{n}$, 得

$$p_{nn} = \boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{p}^i \cdot \boldsymbol{n}) n_i = p^{ki} n_k n_i.$$

为简单起见, 我们将使用笛卡儿坐标系. 众所周知, 这时指标的位置无关紧要. 引入从点 O 出发、沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的矢量 $\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{e}^i$, 显然 $n_i = \cos(\boldsymbol{n}, x_i) = x_i / r$. 我们将这样选取矢量 $\boldsymbol{r}$ 的长度, 使 $p_{nn} r^2 = p^{ki} x_k x_i = 2\Phi(x,\ y,\ z) = \mathrm{const}$, 其中 $2\Phi(x,\ y,\ z)$ 是对称应力张量 $\boldsymbol{P}$ 所对应的二次型. 满足

$$p^{ki} x_k x_i = 2\Phi(x,\ y,\ z) = \mathrm{const}$$

的点的轨迹组成一个二阶曲面, 它就是应力张量的张量面. 内应力的基本性质 (2.4) 可以写为

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}^i n_i = \boldsymbol{p}^i \frac{x_i}{r},$$

[1] 在广义相对论中, 在一般情况下给出矢量 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 及其作用点的定义遇到了困难, 它们难以单值地定义为在黎曼空间的有限区域中的物质和场的特征量. 尽管如此, 可以在无穷小区域的每一点局部地给出这样的定义, 从而把这些量通过矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{K}$ 的局部分量表示为数值函数关系的形式. 按照体积积分后, 就可以用这种方法得到与所选取的坐标系有关的数值积分关系式. 在有限体积的情况下, 这些关系式是局部的动量方程和动量矩方程的推论.

或者在笛卡儿坐标系的坐标轴 x_k 上投影后, 将其写为

$$rp_n^k = p^{ki}x_i.$$

直接检验即可证明

$$p^{ki}x_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k},$$

所以

$$rp_n^k = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \quad \text{即} \quad r\boldsymbol{p}_n = \operatorname{grad}\Phi.$$

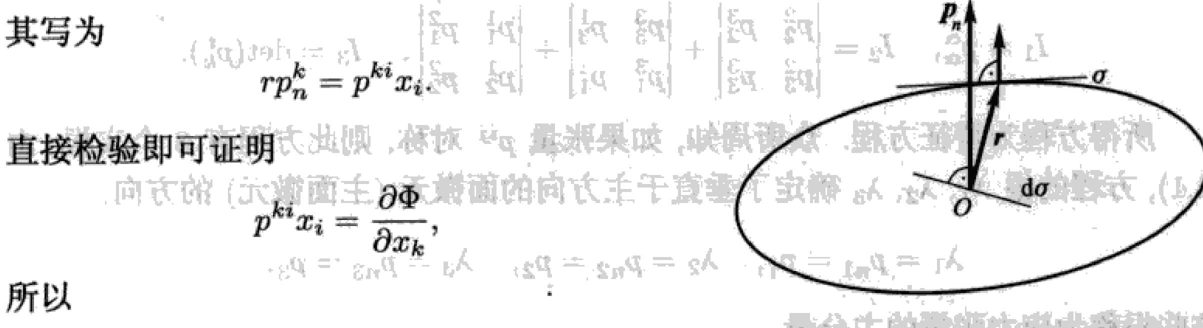


图 28. 应力张量的张量面

因此, 只要知道张量面 $\Phi = \text{const}$, 就可以用以下几何方法求出法线为 $\boldsymbol{r}$ 的面微元 $d\sigma$ 上的应力 $\boldsymbol{p}_n$ 的方向. 从点 O 引垂直于所给面微元的矢量 $\boldsymbol{r}$ (图 28), 在 $\boldsymbol{r}$ 与张量面 $\Phi = \text{const}$ 的交点作切平面 σ. 显然, 矢量 $\boldsymbol{p}_n$ 垂直于切平面 σ.

对称应力张量的主轴 众所周知, 一个二阶曲面至少有 3 个与切平面 σ 垂直的方向 $\boldsymbol{r}$, 这样的方向称为主方向. 对主方向而言, 矢量 $\boldsymbol{p}_n$ 显然垂直于 $d\sigma$. 这样的方向在一般情况下只有 3 个, 称为应力张量的主轴, 它们组成正交三面体. 如果张量面 $\Phi = \text{const}$ 是旋转曲面, 例如球面, 则这样的方向有无穷多个. 对于垂直于主方向的面微元, 矢量 $\boldsymbol{p}_n$ 平行于矢量 $\boldsymbol{n}$, 因此应当成立等式

$$\boldsymbol{p}_n = p^{ki}n_i\boldsymbol{e}_k = \lambda\boldsymbol{n} = \lambda n_i\boldsymbol{e}^i, \tag{4.1}$$

或者

$$p_k^i n_i \boldsymbol{e}^k = \lambda\delta_k^i n_i \boldsymbol{e}^k,$$

由此得

$$(p_k^i - \lambda\delta_k^i)n_i\boldsymbol{e}^k = 0,$$

或者

$$(p_k^i - \lambda\delta_k^i)n_i = 0. \tag{4.2}$$

我们得到了 3 个代数方程, 它们组成一个齐次方程组, 用来确定 3 个主方向的方向余弦 n_i. 此方程组仅在以下条件下才有非平凡解:

$$\Delta = \det(p_k^i - \lambda\delta_k^i) = |p_k^i - \lambda\delta_k^i| = 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} p_1^1 - \lambda & p_1^2 & p_1^3 \\ p_2^1 & p_2^2 - \lambda & p_2^3 \\ p_3^1 & p_3^2 & p_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{4.3}$$

或者写为展开的形式:

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0, \tag{4.4}$$

式中

$$I_1 = p_\alpha^\alpha, \quad I_2 = \begin{vmatrix} p_2^2 & p_2^3 \\ p_3^2 & p_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_3^3 & p_3^1 \\ p_1^3 & p_1^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{vmatrix}, \quad I_3 = \det(p_k^i).$$

所得方程为特征方程. 众所周知, 如果张量 p^{ij} 对称, 则此方程有 3 个实根. 由 (4.1), 方程的根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 确定了垂直于主方向的面微元 (主面微元) 的方向,

$$\lambda_1 = p_{n1} = p_1, \quad \lambda_2 = p_{n2} = p_2, \quad \lambda_3 = p_{n3} = p_3.$$

这些根称为应力张量的主分量.

知道 p_1, p_2, p_3 以后, 就可从方程组 (4.2) 求矢量 $\boldsymbol{n}$ 的分量 n_i (这时要应用条件 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1$), 主方向即由它们确定. 显然, 公式 (4.1) 和方程 (4.2), (4.3) 在任何曲线坐标系中均成立.

张量面方程 $2\Phi = \text{const}$ 在主轴 x, y, z 下化为如下正则形式:

$$2\Phi = p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^3 = \text{const}.$$

对于应力张量的分量, 在主轴下有

$$p^{ii} = p_i^i = p_{ii} = \lambda_i = p_i,$$
$$p^{ki} = p_k^i = p_{ki} = 0, \quad k \neq i.$$

在垂直于应力张量主轴的面微元上, 应力矢量只有法向分量不为零, 其切向分量等于零.

若 $p_1 = p_2 = p_3$, 则应力张量的张量面是球面.

我们引入了应变张量、应力张量和应变率张量的主轴, 在一般情况下, 所有这些主轴各不相同. 正如我们以后将见到的, 它们相同的条件关系到对所研究的介质所作的一些强的物理假设.

如果 $p_1 \neq 0$, $p_2 = p_3 = 0$, 则在连续介质的给定点, 当 $p_1 > 0$ 时我们有沿 x_1 轴的纯拉伸, 而当 $p_1 < 0$ 时为纯压缩. 因此, 在连续介质给定点的任何应力状态都可以视为沿应力张量主轴的 3 个纯拉伸或纯压缩之和.

特征方程 (4.4) 的系数是应力张量的不变量, 它们显然可按以下公式通过特征方程的根来表示:

$$\begin{aligned} I_1 &= p_1 + p_2 + p_3, \\ I_2 &= p_2 p_3 + p_1 p_2 + p_1 p_3, \\ I_3 &= p_1 p_2 p_3. \end{aligned}$$

任何其他二阶对称张量 $\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j = T^i_{\cdot k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^k$ 在每一点 O 也可以与张量面 $\Phi = T_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j = \text{const}$ 相关联. 为了确定张量 $\boldsymbol{T}$ 的主轴和主分量, 关于应力张量的所有上述内容都是可用的.

第四章 最简单的连续介质模型及其封闭的力学方程组·张量分析的一些结果

§1. 理想流体

连续性方程、动量方程和动量矩方程这些微分方程对于所有连续介质的任何连续运动都是成立的. 然而, 在相同的外部条件下, 如果实际介质不同, 其表现也不尽相同.

因此, 即使增加相应的边界条件, 仅有这些方程也不足以描述一种具体连续介质的运动. 出现这一现象的原因在于, 方程的数目小于其中未知量的数目, 方程组尚未封闭.

建立描述一种具体连续介质运动的封闭方程组, 这关系到寻找该连续介质的参量之间的另外一些关系式, 也就意味着建立该介质的理论 (数学) 模型.

建立连续介质的新模型是力学的一个重要分支, 这一分支称为流变学. 在建立新模型时, 不但要对材料的性质进行实验研究, 而且一直要使用力学和物理学的一些已知的一般原理, 例如热力学关系式. 使用变分方程也颇有益处.

在这一章中, 我们研究连续介质的一些最简单的经典模型, 并且仅限于这样一些情况, 此时对于介质的性质和所研究的一类过程无需确定介质的热力学性质即可描述其力学运动, 即力学方程组在不明确给出热力学方程时就已经是封闭的.

在一般情况下, 要想研究这些介质中的各种过程, 还必须应用热力学关系式.

我们首先研究理想流体模型.

理想流体的定义 一种介质, 若其中法线为 $\boldsymbol{n}$ 的面微元上的应力矢量 $\boldsymbol{p}_n$ 垂直于该面微元, 即 $\boldsymbol{p}_n$ 平行于 $\boldsymbol{n}$, 我们就称之为理想流体. 实验结果和一般的物理分析表明, 任何介质在极高的温度和压强下实际上都具有这样的性质.

理想流体中的应力张量是球张量 此时, 张量面显然是球面, 所以 $p_1 = p_2 = p_3$, 即应力张量的主分量相同. 我们用 $-p$ 来表示这些主分量, 并把 p 称为压强. 之所以这样选取符号, 是由于希望引入的压强是一个正数, 因为实验表明, 满足理想流体模型的介质在典型条件下处于被压缩 $(p > 0)$ 的状态[1].

对于这样的介质, 任何 3 个互相垂直的方向都是主方向, 所以应力张量在任何笛卡儿坐标系中的分量矩阵都具有以下形式:

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

例如, 混变分量 p_k^i 可以写为

$$p_k^i = -p\delta_k^i. \tag{1.1}$$

张量 $\delta_k^i \boldsymbol{e}^k \boldsymbol{e}_i$ 的分量 δ_k^i 在坐标变换时显然保持不变 $(\delta_k'^i = \delta_k^i)$, 所以在理想流体中, 应力张量的混变分量公式 (1.1) 不只在笛卡儿坐标系中成立, 它在任何曲线坐标系中都成立.

这个张量的逆变分量具有以下形式:

$$p^{ki} = g^{ks} p_s^i = -p g^{ks} \delta_s^i = -p g^{ki}, \tag{1.2}$$

协变分量则具有以下形式[2]:

$$p_{ki} = g_{ks} p_i^s = -p g_{ks} \delta_i^s = -p g_{ki}.$$

因此, 理想流体中的应力张量由 1 个数 p 给出, 而不是像一般情况那样由 9 个或 6 个数 p^{ki} 给出.

对于理想流体,

$$\boldsymbol{P} = -p\boldsymbol{g},$$

式中 $\boldsymbol{g}$ 为度规张量.

---

[1] 气体总是处于被压缩的状态, 其压强是正数. 液体中压强的符号与液体的化学组成、纯净度、外力作用时间等很多因素有关. 不过在通常情况下, 可以认为常见的液体 (如水) 中的压强不会低于某个很小的正数. 详见第八章 §4 中关于空化现象的讨论. ——译注

[2] 此结论相当于, 若一个二阶张量的协变分量在笛卡儿坐标系中具有 $p_{ki} = -p\delta_{ki}$ 的形式, 则在任意坐标系下 $p_{ki} = -p g_{ki}$ (或 $p^{ki} = -p g^{ki}$). ——译注

我们指出, 张量面是球面的任何张量 $\boldsymbol{T}$ 都称为球张量. 所有球张量都具有以下形式:

$$\boldsymbol{T} = k\boldsymbol{g}, \quad k \text{ 是标量}.$$

理想流体的运动方程 由 (1.2), 任意曲线坐标系中的连续介质运动方程 (第三章 (2.9))

$$\rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ki}$$

对于理想流体可写为以下形式:

$$\rho a^k = \rho F^k - g^{ki}\nabla_i p. \tag{1.3}$$

在写出 (1.3) 时已经考虑到, 张量分量 g^{ki} 在协变微分运算中相当于常量.

我们把这些方程写为矢量的形式. 量 $\nabla_i p$ 显然是 p 的梯度矢量的协变分量, $g^{ki}\nabla_i p$ 是其逆变分量, 所以方程 (1.3) 的矢量形式为

$$\rho \boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p. \tag{1.4}$$

这些方程在笛卡儿坐标轴上的投影可写为以下形式:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

它们称为欧拉方程.

葛罗麦卡－兰姆形式的理想流体运动方程 现在把这些方程写为另外一种形式. 容易看出, 加速度总可以写为如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}, \tag{1.5}$$

式中 $\boldsymbol{\omega}$ 为涡量.

实际上, 利用笛卡儿坐标系, 对于加速度在 x 轴的投影有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)v + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)w \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{v}^2}{\partial x} + 2(\omega_y w - \omega_z v) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{v}^2}{\partial x} + 2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})_x.\end{aligned}$$

对于加速度在 y 和 z 轴的投影可得类似公式. 因此, 加速度 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 可以写为矢量形式 (1.5), 理想流体的运动方程则可以写为以下矢量形式:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{grad}\boldsymbol{v}^2 + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p.$$

这些方程称为葛罗麦卡一兰姆形式的欧拉方程. 加速度的这种变换可以应用于任何连续介质, 特别是在研究许多流体力学问题时, 它是非常有用的.

对于理想流体, 除了 3 个运动方程, 还应增加 1 个连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\boldsymbol{v} = 0.$$

我们从而得到了包括 4 个方程的方程组, 它在质量力 F_x, F_y, F_z 已知时含有 5 个未知函数 u, v, w, p, ρ. 这样的方程组仍不封闭.

理想不可压缩 (一般非均匀) 流体的封闭的运动方程组

在某些情况下可以进一步认为所研究的理想流体是不可压缩的, 即每个流体微元的体积保持不变. 于是, 上述包括 4 个方程的方程组又增加了 1 个条件:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\rho = 0,$$

或者在笛卡儿坐标系中

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.$$

此条件使描述理想不可压缩流体运动的方程组成为封闭的, 其完整形式如下:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p, \\ &\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \\ &\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0.\end{aligned}$$

如果微元的质量不守恒, 最后一个方程就会发生变化.

我们指出, 对于均匀不可压缩流体, 若每个微元的质量都守恒, 则密度 ρ 在微元中保持不变, 且所有微元的密度都相同, 所以它不再是一个重要的待求函数. 此时, 封闭的力学方程组由欧拉方程和连续性方程组成:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j p, \\ &\nabla_\alpha v^\alpha = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

理想可压缩流体 (气体) 正压过程的封闭的运动方程组

在可压缩流体 (气体) 运动的许多情况下, 可以认为

$$p = f(\rho),$$

即压强只与密度有关. 满足 $p = f(\rho)$ 的过程称为正压过程[1]. 正压过程的一个例子是满足克拉珀龙方程

$$p = R\rho T$$

的气体的等温运动, 式中 R 是气体常量. (等温运动可以定义为温度 T 对所有微元都是常参量的运动.)

显然, 正压条件 (如果已知函数 $f(\rho)$) 可以使描述理想可压缩流体运动的方程组成为封闭的. 这时, 封闭方程组在笛卡儿直角坐标系下具有以下形式:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ &\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \\ &p = f(\rho). \end{aligned}$$

在流体运动的一般情况下, 正压条件当然并不成立, 必须引入另外一些具有热力学本质的方程来描述这些运动.

§2. 线性弹性体和线性黏性流体

我们来研究连续介质的其他一些特殊模型: 线性弹性体模型和线性黏性流体模型. 这些模型是平行地建立起来的, 因为我们将看到, 它们的引入方法在形式上是类似的. 这两种模型从本质上描述了真实介质的两种完全不同类型的力学行为.

[1] 否则称为斜压过程. ——译注

弹性体 一种介质, 若其每一微元中应力张量的分量 p^{ki} 都是应变张量的分量 ε_{ij}、度规张量的分量 g_{ij}、温度 T 以及具有物理化学本质的其他可能的参量 χ_i (例如各相的浓度) 的函数[1]:

$$p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta},\ g^{\alpha\beta},\ T,\ \chi_1,\ \cdots,\ \chi_n), \tag{2.1}$$

我们就称之为弹性体.

黏性流体 一种介质, 若其应力张量的分量 p^{ki} 可以表示为

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij} \tag{2.2}$$

的形式, 并且

$$\begin{aligned} &p = p(\rho,\ T,\ \chi_1,\ \cdots,\ \chi_n),\\ &\tau^{ij} = \varphi^{ij}(e_{\alpha\beta},\ g^{\alpha\beta},\ T,\ \chi_1,\ \cdots,\ \chi_n), \end{aligned} \tag{2.3}$$

式中 $e_{\alpha\beta}$ 为应变率张量的分量, 我们就称之为黏性流体.

在这一节中, 我们将研究 f^{ij} 与 $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ 的关系和 φ^{ij} 与 $e_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ 的关系, 所以下面将不再列出参量 T 和 χ_i.

胡克定律和纳维–斯托克斯定律 函数 $f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta},\ g^{\alpha\beta},\ T,\ \chi_1)$ 和 $\varphi^{ij}(e_{\alpha\beta},\ g^{\alpha\beta},\ T,\ \chi_i)$ 的具体形式对于弹性介质和黏性介质的不同具体模型是不同的. 实验表明, 在通常的条件下 (当温度和应力值不很大时), 在许多固体中, 例如在金属中, 应力与应变的关系由通常所称的胡克定律给出; 而在许多流体介质中, 例如在水和空气中, 黏性应力与应变率的关系由纳维–斯托克斯定律给出. 我们以胡克定律为例利用以下讨论来引入这些定律.

假设函数 f^{ij} 能够展开为 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 的泰勒级数, 并且当没有应力 ($p^{ij} = 0$) 时也没有应变 ($\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$), 反之亦然[2].

在这些假设下, 我们得到

$$p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta},\ g^{\alpha\beta}) = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \cdots,$$

式中, 系数 $A^{ij\alpha\beta}$ 可以与 T, χ_s 有关. 如果应变很小, 则在 p^{ij} 的这个级数展开式中可以只保留线性项, 从而简单地写出

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}. \tag{2.4}$$

对函数 φ^{ij} 的类似假设给出等式

$$\tau^{ij} = B^{ij\alpha\beta}e_{\alpha\beta}. \tag{2.5}$$

---

[1] 这样的关系式通常称为介质的本构方程或本构关系, 它表征一种介质所固有的应力与应变以及其他因素之间的关系. 式 (1.2) 就是理想流体的本构方程. ——译注

[2] 我们指出, 当 $p^{ij} = 0$ 时也能够出现应变 (例如热膨胀). 为简单起见, 我们现在研究当 $T = \mathrm{const}$ 和 $\chi_i = \mathrm{const}$ 时 p^{ij} 对 ε_{ij} 的函数关系.

式 (2.4) 称为胡克定律, 而式 (2.5) 称为纳维－斯托克斯定律 (或广义牛顿黏性定律).

我们在 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (胡克定律) 和 $e_{\alpha\beta}$ (纳维－斯托克斯定律) 很小的假设下得到了 (2.4) 和 (2.5). 然而我们指出, 例如, 纳维－斯托克斯定律对于水、空气和其他某些流体在应变率张量的分量并非小量时仍然适用. 从一般的热力学关系式可知, 胡克定律作为一个近似的定律仅仅对小应变才是在物理上允许的.

在连续介质力学中, 研究服从胡克定律或更一般的定律 (2.1) 的连续介质行为的分支称为弹性力学, 而研究服从纳维－斯托克斯定律或更一般的定律 (2.2), (2.3) 的连续介质运动的分支称为黏性流体力学.

由式 (2.4) 和 (2.5) 相对于坐标系选择的不变性直接可知, $A^{ij\alpha\beta}$ 和 $B^{ij\alpha\beta}$ 是四阶张量的分量. 它们是表征给定连续介质的物理量, 一般而言与温度 T 以及表征所研究介质状态的其他物理化学参量有关.

四阶张量具有 $3^4 = 81$ 个分量, 但由应力张量 (在经典情况下) 的对称性和应变张量、应变率张量的对称性, $A^{ij\alpha\beta}$ 和 $B^{ij\alpha\beta}$ 的独立分量数目仅为 36, 因为张量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 对角标 i 和 j 应当是对称的, 它们对角标 α 和 β 也可以认为是对称的. 如果介质的行为由胡克定律或纳维－斯托克斯定律来描述, 并且该介质还具有某种几何上的对称性, 那么 $A^{ij\alpha\beta}$ 和 $B^{ij\alpha\beta}$ 的独立分量数目还会减少. 例如, 如果相应介质是各向同性的, 则所有 $A^{ij\alpha\beta}$ 和 $B^{ij\alpha\beta}$ 仅仅决定于 2 个参数.

各向异性介质、各向同性介质和旋磁性介质

一种介质, 若其性质在所有方向上都相同, 我们就称之为各向同性介质; 若其性质在不同方向上不同, 我们就称之为各向异性介质. 各向异性介质可能具有不同类型的对称性.

我们来给出对称性 (包括各向同性) 的更加准确的数学定义. 一种介质的力学和物理性质通常可以利用某些张量和张量方程来描述 (例如, 若成立胡克定律, 则弹性性质由张量 $A^{ij\alpha\beta}$ 给出). 我们说一种介质具有对称性, 如果存在一个不仅仅包含恒等变换的坐标变换群, 使得给出介质性质的那些张量的分量在属于该变换群的变换下不发生变化.

例如, 若决定介质性质的那些张量的分量在任何正交变换下都不变, 该介质就称为各向同性介质. 我们指出, 正交变换可以定义为保持度规张量的分量不变 (即基矢量的标积不变) 的变换:

$$g'_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} = g_{ij}.$$

全部正交变换群包括旋转变换 (变换行列式等于 $+1$) 和带镜面反射的旋转变换 (变换行列式等于 -1).

一种介质, 若其性质只相对于旋转变换群不变, 相对于镜面反射则发生变化, 它就称为旋磁性介质.

我们来更加详细地考虑以下问题: 对于服从胡克定律的弹性体, 各向同性 (或者旋磁性) 这一性质究竟表示什么? 在给定时刻, 在这样的连续介质的某一点取两个

笛卡儿坐标系: 一个是 x^1, x^2, x^3, 另一个是 y^1, y^2, y^3, 且后者是前者旋转后得到的. 所研究的张量在坐标系 x^1, x^2, x^3 中的分量用不带 "$'$" 的字母表示, 而在坐标系 y^1, y^2, y^3 中的分量则用带 "$'$" 的相应字母表示.

显然,

$$A'^{ij\alpha\beta} = \frac{\partial y^i}{\partial x^p}\frac{\partial y^j}{\partial x^q}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\mu}A^{pq\lambda\mu}. \tag{2.6}$$

在坐标系 x^1, x^2, x^3 中写出胡克定律时, 我们应当使用系数 $A^{ij\alpha\beta}$, 而在坐标系 y^1, y^2, y^3 中则应当使用系数 $A'^{ij\alpha\beta}$. 考虑连续介质的这样两个变形状态, 它们在不同的坐标系 x^i 和 y^i (一个坐标系旋转后可得另一个) 中具有相同的形式, 即

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}.$$

显然, 此时各向同性介质的应力状态在坐标系 x^i 和 y^i 中也应当具有相同的形式. 如果 $A'^{ij\alpha\beta} = A^{ij\alpha\beta}$, 即胡克定律中的系数在两个坐标系中相同, 则 $p^{ij} = p'^{ij}$, 这时连续介质是各向同性介质或旋磁性介质. 如果 $A'^{ij\alpha\beta} \neq A^{ij\alpha\beta}$, 即胡克定律中的系数在坐标系 x^1, x^2, x^3 和 y^1, y^2, y^3 中不同, 则 $p^{ij} \neq p'^{ij}$, 介质是各向异性介质. 实验表明, 分子或原子规则排列的晶体介质, 以及纤维材料, 都是各向异性介质的实例, 其性质在不同方向上是不同的.

对于各向同性介质来说, 一个坐标系与通过旋转而得到的其他一些坐标系相比并不具有优点. 例如, 水和其他一些具有所谓非晶结构的介质是各向同性介质. 还有一些介质由细小的晶体组成, 只要这些晶体微元的排列无序而混乱, 介质就是各向同性的. 在技术领域通常使用的金属就是这样的各向同性介质.

旋磁性介质的胡克定律和纳维–斯托克斯定律

张量 $A^{ij\alpha\beta}$ 的分量总数为 81, 它们可以都不等于零. 现在我们证明, 对于各向同性物体和旋磁性物体, 这些分量中只有 2 个是独立的[1]. 取应变张量 ε_{ij} 的主轴为坐标轴. 显然, 这时胡克定律中只会出现形如 $A^{ij\alpha\alpha}$ 的系数. 我们来证明当 $i \neq j$ 时 $A^{ij\alpha\alpha} = 0$. 实际上, 把所取坐标系绕第 i 个坐标轴旋转 180° 后, 我们得到一个新的坐标系, 其中第 i 个坐标轴不变, 而其他 2 个坐标轴变为相反方向. 根据张量 $\boldsymbol{A}$ 的变换规则 (2.6), 我们在 $i \neq j$ 时对任何 α 可得

$$A'^{ij\alpha\alpha} = -A^{ij\alpha\alpha}.$$

但如果介质是各向同性介质或者旋磁性介质, 则应当成立 $A'^{ij\alpha\alpha} = A^{ij\alpha\alpha}$, 于是当 $i \neq j$ 时 $A^{ij\alpha\alpha} = 0$. 又因为在此坐标系中当 $i \neq j$ 时 $p^{ij} = 0$, 所以由此可见, 在服从胡克定律的旋磁性介质 (自然也包括各向同性介质) 中应变率张量的主轴与应力张量的主轴重合.

在胡克定律在主轴下的公式中, 全部 81 个系数 $A^{ij\alpha\beta}$ 中只有 9 个系数 $A^{ii\alpha\alpha}$ 是重要的.

---

[1] 对于四阶张量, 各向同性和旋磁性的概念是相同的.

根据介质的旋磁性, 坐标轴编号的顺序是不重要的[1], 所以我们有

$$A^{1111} = A^{2222} = A^{3333} = 2\mu + \lambda,$$
$$A^{1122} = A^{1133} = A^{2233} = \lambda,$$
$$A^{ii\alpha\alpha} = A^{\alpha\alpha ii},$$

式中引入了新的记号 $2\mu + \lambda$ 和 λ 来表示上面列出的张量 $\boldsymbol{A}$ 的 2 个不同分量. 一般而言, 这 2 个分量不等于零. (注意分量 A^{ijij} $(i \neq j)$ 也不等于零, 我们将在后面证明这些分量等于 μ, 见公式 (2.10).)

所有上述讨论都可以用于服从纳维–斯托克斯定律的旋磁性介质 (更何况各向同性介质), 于是对于服从纳维–斯托克斯定律的旋磁性介质可知, 应变率张量的主轴与应力张量的主轴重合, 所有系数 $B^{ij\alpha\beta}$ 都可以通过 2 个系数 λ_1 和 μ_1 表示出来.

现在, 各向同性介质的胡克定律

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$$

在应变张量和应力张量的主轴下具有以下形式:

$$\begin{aligned} p_1 &= \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_1, \\ p_2 &= \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_2, \\ p_3 &= \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_3. \end{aligned} \tag{2.7}$$

λ 和 μ 称为拉梅系数.

类似地, 各向同性介质的纳维–斯托克斯定律在应变率张量和应力张量的主轴下可以写为

$$\tau_1 = \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_1,$$
$$\tau_2 = \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_2,$$
$$\tau_3 = \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_3.$$

公式 (2.7) 显然可以写为以下不变的张量形式:

$$p_{ij} = \lambda I_1(\mathscr{E})g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{2.8}$$

或

$$p^{ij} = \lambda I_1(\mathscr{E})g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha}g^{j\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}. \tag{2.9}$$

这些写法在任意坐标系下都成立, 所以公式 (2.8) 或 (2.9) 就是各向同性介质的胡克定律在任意曲线坐标系下的写法.

由 (2.9) 易得系数 $A^{ij\alpha\beta}$ 在任意曲线坐标系下的表达式:

$$A^{ij\alpha\beta} = \lambda g^{ij}g^{\alpha\beta} + \mu(g^{i\alpha}g^{j\beta} + g^{i\beta}g^{j\alpha}). \tag{2.10}$$

[1] 例如, 显然可以把坐标系绕 x^3 轴旋转 90°, 使 x^2 轴位于 x^1 轴的位置.

把类似的讨论应用于纳维－斯托克斯定律, 可知各向同性介质的纳维－斯托克斯定律在任意曲线坐标系下具有以下形式[1]:

$$\tau_{ij} = \lambda_1 I_1(\boldsymbol{E}) g_{ij} + 2\mu_1 e_{ij}, \quad \text{或} \quad \tau^{ij} = \lambda_1 I_1(\boldsymbol{E}) g^{ij} + 2\mu_1 g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}.$$

根据 (2.2), 我们得出各向同性黏性流体的应力张量和应变率张量在任意曲线坐标系下的分量之间的以下关系式:

$$p^{ij} = -p g^{ij} + \lambda_1 g^{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu_1 g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}. \tag{2.11}$$

在 (非主轴的) 笛卡儿坐标系下, 各向同性介质的胡克定律具有以下形式:

$$p_{ii} = \lambda I_1(\mathscr{E}) + 2\mu \varepsilon_{ii},$$

而当 $i \neq j$ 时

$$p_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}.$$

纳维－斯托克斯定律则具有以下形式:

$$p_{ii} = -p + \lambda_1 \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu_1 \frac{\partial v_i}{\partial x^i},$$

而当 $i \neq j$ 时

$$p_{ij} = 2\mu_1 e_{ij} = \mu_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right).$$

杨氏模量, 泊松比和黏度 在弹性力学中, 规定引入材料的以下特征量来代替拉梅系数 λ 和 μ, 它们是杨氏模量 E 和泊松比 σ:

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

在黏性流体运动理论中规定引入动力学黏度[2] $\mu = \mu_1$, 运动学黏度 $\nu = \mu/\rho$, 以及第二黏度

$$\zeta = \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu.$$

在黏性流体运动的情况下, 以后我们将简单地用 λ 来表示拉梅系数 λ_1. 下一页的表格中列出了某些介质的 E, σ, μ, ν 的数值.

当 $T = \text{const}$, $\chi_i = \text{const}$ 时, 胡克定律和纳维－斯托克斯定律使各向同性弹性介质和黏性不可压缩流体的运动方程组成为封闭的.

纳维－斯托克斯方程 为了针对黏性不可压缩流体写出封闭的连续介质运动方程组, 我们先来推导满足纳维－斯托克斯定律 (2.11) 或

$$p^{ij} = -p g^{ij} + \lambda g^{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu e^{ij} \tag{2.12}$$

---

[1] $\boldsymbol{E}$ 表示应变率张量. ——译注

[2] 动力学黏度简称黏度. ——译注

材料 (常温)	$E\cdot 10^{-10}$ / $\mathrm{kgf\cdot m^{-2}}$	σ
钢	2.0—2.2	0.24—0.28
铁	1.6—2.0	0.28
铜	1.1	0.31—0.34
铝	0.69	0.32—0.36
青铜	1.1	0.35
玻璃	0.56	0.25
橡胶	0.00008	0.47

温度 / °C	碳素钢, $E\cdot 10^{-10}$ / $\mathrm{kgf\cdot m^{-2}}$
20	2.135
100	2.10
300	1.98
500	1.79

介质	温度 / °C	$\mu\cdot 10^3$ / $\mathrm{kg\cdot s^{-1}\cdot m^{-1}}$	$\nu\cdot 10^6$ / $\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$	$\rho\cdot 10^{-3}$ / $\mathrm{kg\cdot m^3}$
水	5	1.514	1.514	1.00
	10	1.304	1.304	1.00
	15	1.137	1.138	0.999
	20	1.002	1.004	0.998
	50	0.548	0.554	0.998
苯	15	0.7	0.8	0.88
酒精	15	1.34	1.7	0.8
汞	15	1.58	0.116	13.6
甘油	15	23	18	1.26
润滑油 (平均黏度)	20	275—350	300—380	0.9—0.95
空气 (压强为 1 atm)	0	0.0171	13.2	0.001293
	10	0.0176	14.1	0.001247
	15	0.0178	14.5	0.001225
	20	0.0181	15.0	0.001205
	60	0.02	18.8	0.001060

的一般可压缩的黏性流体的运动方程, 此方程称为纳维－斯托克斯方程. 把纳维－斯托克斯定律 (2.12) 带入动量方程后就可以得到这个方程.

我们首先指出, 在欧几里得空间中成立等式

$$\nabla_i \nabla_j v^\alpha = \nabla_j \nabla_i v^\alpha.$$

事实上, $T_{ij}^\alpha = \nabla_i \nabla_j v^\alpha - \nabla_j \nabla_i v^\alpha$ 是一个三阶张量的分量, 而在笛卡儿坐标系中有 $T_{ij}^\alpha = \partial^2 v^\alpha / \partial x^i \partial x^j - \partial^2 v^\alpha / \partial x^j \partial x^i = 0$, 所以在任何曲线坐标系中都有 $T_{ij}^\alpha = 0$. 因此, 如果在空间中可以引入适用于全空间的笛卡儿坐标系, 即如果空间是欧几里得空间 [1], 则多次协变微分的结果与微分的次序无关.

现在计算 $\nabla_j p^{ij}$, 其中 p^{ij} 由 (2.12) 确定, 而 λ 和 μ 是常量:

$$\begin{aligned}
\nabla_j p^{ij} &= -g^{ij}\nabla_j p + \lambda g^{ij}\nabla_j \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu \nabla_j e^{ij} \\
&= -g^{ij}\nabla_j p + \lambda g^{ij}\nabla_j \nabla_\alpha v^\alpha + \mu \nabla_j g^{i\alpha} g^{j\beta}(\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha) \\
&= -g^{ij}\nabla_j p + \lambda g^{ij}\nabla_j \nabla_\alpha v^\alpha + \mu g^{i\alpha}\nabla_j \nabla_\alpha v^j + \mu g^{j\beta}\nabla_j \nabla_\beta v^i \\
&= -g^{ij}\nabla_j p + (\lambda+\mu) g^{ij}\nabla_j \nabla_\alpha v^\alpha + \mu \nabla^\beta \nabla_\beta v^i \\
&= -\nabla^i p + (\lambda+\mu)\nabla^i \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu \Delta v^i,
\end{aligned}$$

这里 $\nabla^i = g^{ij}\nabla_j$, 而 $\Delta = \nabla^\beta \nabla_\beta$ 是拉普拉斯算子. 在笛卡儿坐标系中

$$\Delta v^i = \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2}.$$

在矢量形式下我们有

$$\nabla_j \boldsymbol{p}^j = -\operatorname{grad} p + (\lambda+\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu \Delta \boldsymbol{v}. \tag{2.13}$$

因此, 根据 (2.13) 和第三章的 (2.9), 纳维－斯托克斯方程在任意曲线坐标系下具有以下形式:

$$a^i = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \frac{\partial p}{\partial x^j} + \frac{\lambda+\mu}{\rho} g^{ij} \frac{\partial \operatorname{div} \boldsymbol{v}}{\partial x^j} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v^i.$$

纳维－斯托克斯方程在矢量形式下可以写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\lambda+\mu}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \nu \Delta \boldsymbol{v}.$$

不可压缩黏性流体的封闭的运动方程组

对于不可压缩黏性流体, 纳维－斯托克斯方程简化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \boldsymbol{v}.$$

此方程与连续性方程

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

[1] 在黎曼空间中, 空间的曲率使张量 T_{ij}^α 不等于零, 因为在弯曲空间中无法在给定点同时使所有的 Γ_{ij}^k 和 $\partial \Gamma_{ij}^k / \partial x^s$ 都等于零 (见第二章 §5).

一起组成服从纳维－斯托克斯定律且黏度 μ 为常量的黏性不可压缩均匀流体的封闭的运动方程组.

一般非均匀的黏性不可压缩流体, 其封闭的运动方程组在笛卡儿直角坐标系中具有以下形式:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}$$

用位移表示的弹性体运动方程 · 封闭方程组的几种情况

满足胡克定律的弹性体, 其运动方程在小变形时用位移表示出来, 所得方程称为拉梅方程. 这时胡克定律为

$$p^{ij}=\lambda I_1(\mathscr{E})g^{ij}+2\mu\varepsilon^{ij},\quad \varepsilon^{ij}=\frac{1}{2}(\nabla^j w^i+\nabla^i w^j),\qquad (2.14)$$

式中 w^i 为位移矢量的分量, $I_1(\mathscr{E})$ 为应变张量的第一不变量 ($I_1(\mathscr{E})=\nabla_i w^i$). 接下来我们认为, 拉梅系数 λ 和 μ 可以当作给定的常数. 为了推导拉梅方程, 应当把无穷小变形的胡克定律 (2.14) 代入第三章的动量方程 (2.9), 这完全类似于上述纳维－斯托克斯方程的推导. 拉梅方程具有以下形式:

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{w}+\mu\Delta\boldsymbol{w}+\rho\boldsymbol{F}=\rho\boldsymbol{a},\qquad (2.15)$$

在笛卡儿坐标系中其形式为

$$\begin{aligned}
\rho a_x&=(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho F_x,\\
\rho a_y&=(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho F_y,\\
\rho a_z&=(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho F_z,
\end{aligned}$$

式中 u, v, w 表示位移矢量 $\boldsymbol{w}$ 的分量.

拉梅方程是在小变形假设下推导出来的, 此假设也包括密度的变化为小量的情况 ($\rho=\rho_0+\rho'$, $\rho'\ll\rho_0$). 所以, 精确到一阶小量可以用 ρ_0 来代替这些方程中的 ρ.

动力学问题的拉梅方程组再加上加速度的定义

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\right)_{x^i}+v^\alpha\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x^\alpha},\quad \boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}$$

即成为封闭的方程组.

在小变形弹性力学中可以不考虑连续性方程, 它是用来确定 ρ' 的, 而基本的拉梅方程中没有这个量.

方程 (2.15) 是对小变形确立的, 此时位移、速度和加速度可以是有限的.

但是我们经常研究的一种情况是, 不仅变形是小量, 位移、速度和加速度也都是小量. 在这种情况下, 忽略掉非线性项, 得

$$a = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

而简化的拉梅方程具有以下形式:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_{x^i} = F + \frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} w + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta w. \tag{2.16}$$

在弹性力学问题中通常需要求解介质的物质微元的位移, 例如"固体"外边界形状的变化, 所以在弹性力学中通常使用拉格朗日观点和拉格朗日坐标系.

前面曾经阐述过, 可以使用两个拉格朗日坐标系——初始的和当前的拉格朗日坐标系 (见第二章). 所有方程都是对介质在当前确定时刻的状态提出的, 所以显然, 不论是连续介质的动量方程, 还是在其基础上得出的拉梅方程, 它们在当前拉格朗日坐标系中的分量形式与它们在参考系中的分量形式是相同的.

在从当前的拉格朗日坐标系变换为初始的拉格朗日坐标系时, 方程的分量形式则会变化, 这关系到, 此时矢量和张量分量的变换公式不同于在同一个空间中从一个坐标系变换到另一个坐标系时张量分量的通常的变换公式. 在初始状态空间和当前状态空间中, 点的坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3 是相同的, 但由于变形, 必须把它们看作具有不同度规的 $\mathrm{d}s^2 \neq \mathrm{d}s_0^2$ 的不同空间[1].

不过, 如果变形和位移很小, 则初始的和当前的拉格朗日坐标系相差很少, 所以精确到一阶小量可以认为, 方程在当前的和初始的拉格朗日坐标系中的分量形式是相同的. 使用初始的拉格朗日坐标系可能比当前的拉格朗日坐标系更加方便, 因为在使用当前的拉格朗日坐标系时还应当确定该坐标系相对于参考系的位置才能完全解决问题.

建立其他模型的必要性

尽管流体力学和弹性力学在上述简单模型的框架下发展出了庞大的分支, 然而, 利用这些最简单的模型还远远不能总是足够精确地描述实际介质的运动.

例如, 研究电离气体的运动和气体在斜压条件下的运动就需要更加复杂的模型.

在许多情况下, 胡克定律对一些"固体"并不适用, 例如当"固体" (沥青、腻子, 以及大载荷下的金属) 在卸去载荷后仍有应变残留时, 此定律就不成立, 所以必须建立考虑塑性、蠕变以及许多其他性质的模型. 对于一些复杂的连续介质模型, 前面引

[1] 关于这个问题的详细研究及其在连续介质一般运动方程中的应用, 参见专著: Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. Москва: Физматгиз, 1962. 150 页.

入的那些与介质微元的运动和状态有关的概念和特征量是不够的.

还必须考虑其他一些特征量, 例如温度 T, 内能 U, 熵 S, 残余应变, 电磁场特征量, 以及其他许多特征量. 此时, 力学方程组应当进行补充, 从而还要应用另外一些物理学关系式, 例如热力学关系式.

§3. 曲线坐标系中的方程实例和张量分析的一些补充结果

为了应用起来方便, 最好在各种具体的曲线坐标系下都有现成的连续性方程和运动方程.

正交坐标系中的克里斯托费尔符号

我们来写出任意正交坐标系中的克里斯托费尔符号 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 通过度规张量的分量 g_{ij} 的表达式. 在欧几里得空间与黎曼空间中, 克里斯托费尔符号由以下公式定义:

$$\Gamma^{j}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{js} \left(\frac{\partial g_{\alpha s}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta s}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{s}} \right), \tag{3.1}$$

因而在正交坐标系 (当 $i \neq j$ 时 $g_{ij} = 0$) 中易得 (对 α 不求和)

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \tag{3.2}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}}, \quad \alpha \neq \beta, \tag{3.3}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\alpha}}, \tag{3.4}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0, \quad \alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \alpha \neq \gamma. \tag{3.5}$$

对于和 $\sum\limits_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}$, 在正交坐标系中利用公式 (3.2) 可得以下公式:

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\beta}}, \tag{3.6}$$

式中 g 为矩阵 (g_{ij}) 的行列式.

现在证明公式 (3.6) 在任意坐标系中都成立. 我们有

$$g = \det(g_{ij}) = \det(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j), \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\omega}_{k\beta} \boldsymbol{e}_{\omega}.$$

在计算导数 $\partial g / \partial x^{\beta}$ 时, 需要对行列式 g 每个元素中 2 个矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{e}_j$ 的标积求导.

在对相乘的第一个 $\boldsymbol{e}_i$ 求导时, 我们得到 3 个行列式, 其中每个行列式中第 i 行的项都替换为形如 $\Gamma^{\omega}_{i\beta} g_{\omega j}$ 的项. 容易看出, 这些行列式中的每一个都等于 $\Gamma^{i}_{i\beta} g$, 式中的角标 i 是固定的, 它等于相应的行号. (对于固定的 $\omega \neq i$, 行列式等于零.) 3 个行列式之和等于 $\sum\limits_{i=1}^{3} \Gamma^{i}_{i\beta} g$. 从 g_{ij} 的对称性显然可知, 在对相乘的第二个 $\boldsymbol{e}_j$ 求导时可得完全相同的和.

由此可知,

$$\frac{\partial g}{\partial x^\beta} = 2g\Gamma^i_{i\beta},$$

并且式中对角标 i 求和.

任意坐标系中的连续性方程 任何矢量的散度在任意坐标系中的表达式现在可以写为以下形式:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \nabla_\alpha v^\alpha &= \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} + v^\beta\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\\ &= \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{v^\beta}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial v^\alpha\sqrt{g}}{\partial x^\alpha},\end{aligned} \tag{3.7}$$

因此, 连续性方程在任意曲线坐标系下具有以下形式:

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v^1\sqrt{g}}{\partial x^1} + \frac{\partial\rho v^2\sqrt{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial\rho v^3\sqrt{g}}{\partial x^3} = 0. \tag{3.8}$$

矢量和张量的物理分量 我们还记得, v^α 是矢量 $\boldsymbol{v}$ 按照协变基矢量 $\boldsymbol{e}_\alpha$ 分解时的分量, 而这些基矢量一般而言不是单位矢量. 对于速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 可以写出公式

$$\boldsymbol{v} = v^i\boldsymbol{e}_i = u^1\frac{\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{g_{11}}} + u^2\frac{\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{g_{22}}} + u^3\frac{\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{g_{33}}} = u^i\boldsymbol{g}_i, \tag{3.9}$$

式中 $\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{e}_i/\sqrt{g_{ii}}$ 为单位矢量. 如果坐标系是正交的, 则分量

$$u^i = v^i\sqrt{g_{ii}}$$

(对 i 不求和) 等于速度 $\boldsymbol{v}$ 在坐标线的切线上的投影, 称为速度矢量的物理分量. 显然, 对于正交坐标系, 量 $u_i = v_i\sqrt{g^{ii}}$ (对 i 不求和) 等于引入的物理分量 u^i. 类似地可以引入任何矢量——例如加速度 $\boldsymbol{a}$ 或 $\operatorname{grad} p$——的物理分量, 以及一般的任意阶张量的物理分量[1]. 在任意正交坐标系下, 连续性方程 (3.8) 在使用物理分量时具有以下形式:

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u^1\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\partial x^1} + \frac{\partial\rho u^2\sqrt{g_{11}g_{33}}}{\partial x^2} + \frac{\partial\rho u^3\sqrt{g_{11}g_{22}}}{\partial x^3} = 0. \tag{3.10}$$

圆柱坐标系与球坐标系下的连续性方程 对圆柱坐标系, $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$, $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$, $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = r$, $|\boldsymbol{e}_3| = 1$, 即 $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = 1$, 当 $i \neq j$ 时 $g_{ij} = 0$, 故 $\Gamma^1_{22} = -r$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/r$, 其他 Γ^i_{jk} 等于零. 圆柱坐标系下的连续性方程可写为

$$r\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_r r}{\partial r} + \frac{\partial\rho u_\varphi}{\partial\varphi} + r\frac{\partial\rho u_z}{\partial z} = 0.$$

对球坐标系, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ (极角), $x^3 = \lambda$ (经度), $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\lambda^2$,

---

[1] 例如, 张量 $T = T^i_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j$ 的物理分量可由 $T = T^i_j\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g^{jj}}\dfrac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}}\dfrac{\boldsymbol{e}^j}{\sqrt{g^{jj}}} = (T^i_j)_{\text{phys}}\,\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j$ 定义.

$g_{11}=1$, $g_{22}=r^2$, $g_{33}=r^2\sin^2\theta$, $\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\Gamma_{13}^3=\Gamma_{31}^3=1/r$, $\Gamma_{23}^3=\Gamma_{32}^3=\operatorname{ctan}\theta$, $\Gamma_{22}^1=-r$, $\Gamma_{33}^1=-r\sin^2\theta$, $\Gamma_{33}^2=-\sin\theta\cos\theta$, 其他 Γ_{jk}^i 等于零. 连续性方程具有以下形式[1]:

$$r^2\sin\theta\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sin\theta\frac{\partial\rho u_r r^2}{\partial r}+r\frac{\partial\rho u_\theta\sin\theta}{\partial\theta}+r\frac{\partial\rho u_\lambda}{\partial\lambda}=0.$$

加速度在正交坐标系中的物理分量

为了在惯性正交曲线坐标系中写出欧拉运动方程, 我们先得出用 g_{ij} 与 v^i 表示加速度分量 a^j 的公式. 对于加速度 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 的分量, 有

$$a^j=\frac{\partial v^j}{\partial t}+v^i\nabla_i v^j=\frac{\partial v^j}{\partial t}+v^i\frac{\partial v^j}{\partial x^i}+v^i v^\beta\Gamma_{i\beta}^j.$$

利用 (3.5) 处理此式最后一项,

$$v^i v^\beta\Gamma_{i\beta}^j=\underset{\substack{\beta\neq j\\ (\text{对 } j \text{ 不求和})}}{2v^j v^\beta\Gamma_{\beta j}^j}+(v^\beta)^2\Gamma_{\beta\beta}^j=\underset{\substack{\beta\neq j\\ (\text{对 } j \text{ 不求和})}}{2v^j v^\beta\Gamma_{\beta j}^j}+(v^j)^2\Gamma_{jj}^j+\underset{\beta\neq j}{(v^\beta)^2\Gamma_{\beta\beta}^j}.$$

在正交坐标系中 $g^{ii}=1/g_{ii}$, 所以, 利用公式 (3.2)—(3.4) 把克里斯托费尔符号 $\Gamma_{\alpha\beta}^j$ 通过 g_{ii} 表示出来, 得

$$a^j=\frac{\partial v^j}{\partial t}+v^i\frac{\partial v^j}{\partial x^i}+\underset{\beta\neq j}{\frac{v^j v^\beta}{g_{jj}}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^\beta}}+\frac{(v^j)^2}{2g_{jj}}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^j}-\underset{\beta\neq j}{\frac{(v^\beta)^2}{2g_{jj}}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^j}}.\quad (\text{对 } j \text{ 不求和})$$

因此, 如果按照 (3.9) 引入速度的物理分量 u^i 来代替 v^i, 则加速度的物理分量在圆柱坐标系下具有以下形式:

$$\begin{aligned}
a_r&=\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\varphi^2}{r},\\
a_\varphi&=\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+u_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{u_r u_\varphi}{r},\\
a_z&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z},
\end{aligned}\tag{3.11}$$

而在球坐标系下具有以下形式:

$$\begin{aligned}
a_r&=\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\lambda}-\frac{u_\theta^2+u_\lambda^2}{r},\\
a_\theta&=\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\lambda}+\frac{u_r u_\theta-u_\lambda^2\operatorname{ctan}\theta}{r},\\
a_\lambda&=\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\lambda}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\theta}+\frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda}+\frac{u_r u_\lambda+u_\theta u_\lambda\operatorname{ctan}\theta}{r}.
\end{aligned}\tag{3.12}$$

[1] 由正交坐标系下的连续性方程 (3.10) 及其在圆柱坐标系和球坐标系下的形式易得矢量的散度在这些坐标系下的表达式. ——译注

标量函数的梯度矢量在正交坐标系中的物理分量 现在确定矢量 $\operatorname{grad} p$ 在正交坐标系坐标轴上的投影. 我们有

$$\operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x^i}\boldsymbol{e}^i = (\nabla_i p)\boldsymbol{e}^i = A_i \frac{\boldsymbol{e}^i}{\sqrt{g^{ii}}},$$

所以矢量 $\operatorname{grad} p$ 在正交坐标系中的物理分量 A_i 等于

$$A_i = \frac{\partial p}{\partial x^i}\sqrt{g^{ii}} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial p}{\partial x^i}.$$

(对 i 不求和)

矢量 $\operatorname{grad} p$ 在圆柱坐标系中的物理分量为:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} p\,|_r &= \frac{\partial p}{\partial r},\\
\operatorname{grad} p\,|_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi},\\
\operatorname{grad} p\,|_z &= \frac{\partial p}{\partial z},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

而在球坐标系中的物理分量为:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} p\,|_r &= \frac{\partial p}{\partial r},\\
\operatorname{grad} p\,|_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta},\\
\operatorname{grad} p\,|_\lambda &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \lambda}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

圆柱坐标系与球坐标系下的欧拉方程 利用 (3.11), (3.13) 与 (3.12), (3.14) 容易写出圆柱坐标系与球坐标系下的欧拉方程.

欧拉方程在圆柱坐标系下具有以下形式:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\
&\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} = F_\varphi - \frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi},\\
&\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},
\end{aligned}$$

而在球坐标系下具有以下形式:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \lambda} - \frac{u_\theta^2 + u_\lambda^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\
&\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{\operatorname{ctan}\theta}{r}u_\lambda^2 = F_\theta - \frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta},\\
&\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\lambda}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} + \frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_r u_\lambda}{r} + \frac{\operatorname{ctan}\theta}{r}u_\theta u_\lambda = F_\lambda - \frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \lambda}.
\end{aligned}$$

正交坐标系中标量函数的拉普拉斯算子 令 $v = \operatorname{grad}\Phi$. 由公式 (3.7) 容易得出, 作用于标量函数 Φ 的拉普拉斯算子在任意正交坐标系中具有以下形式:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi &= \nabla^2\Phi = \Delta\Phi\\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{11}}{g_{33}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right)\right].\end{aligned}$$

由此可知, 在圆柱坐标系中

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \tag{3.15}$$

而在球坐标系中

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda^2}\right]. \tag{3.16}$$

上述实例说明了一般公式在一些重要的特殊情形的应用.

圆柱坐标系与球坐标系中的应变率张量物理分量和纳维—斯托克斯方程 为完整起见, 我们再给出应变率张量的物理分量在圆柱坐标系中的表达式:

$$e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad 2e_{r\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right),\quad e_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r},$$
$$2e_{\varphi z}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi},\quad e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad 2e_{rz}=\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}$$

和它们在球坐标系中的表达式:

$$e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad e_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad e_{\lambda\lambda}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta\operatorname{ctan}\theta}{r},$$
$$2e_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r},\quad 2e_{\lambda r}=\frac{\partial u_\lambda}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\lambda}{r},$$
$$2e_{\lambda\theta}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\lambda}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\theta}-\frac{u_\lambda\operatorname{ctan}\theta}{r},$$

以及 $\mu=\mathrm{const}$ 的不可压缩流体的纳维—斯托克斯方程在圆柱坐标系中的形式:

$$a_r = F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\Delta u_r-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right),$$
$$a_\varphi = F_\varphi-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\nu\left(\Delta u_\varphi-\frac{u_\varphi}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right),$$
$$a_z = F_z-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta u_z,$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

和在球坐标系中的形式:

$$a_r = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2u_\theta}{r^2}\operatorname{ctan}\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right),$$

$$a_\theta = F_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right),$$

$$a_\lambda = F_\lambda - \frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + \nu\left(\Delta u_\lambda - \frac{u_\lambda}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\lambda} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\lambda}\right),$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\operatorname{ctan}\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2},$$

式中, 加速度的物理分量分别由公式 (3.11) 与 (3.12) 确定.

我们指出, 在最后两组纳维–斯托克斯方程中, 系数 ν 后边的表达式是对速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 应用拉普拉斯算子后所得矢量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的物理分量. 把这些表达式分别与 (3.15) 和 (3.16) 进行对比, 我们看到, 对矢量的分量与标量函数应用拉普拉斯算子一般给出不同的公式.

三维空间中的二阶反对称张量与轴矢量的等价性

在三维空间中, 任何一个二阶反对称张量 $A_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$ 都对应一个轴矢量 $\boldsymbol{B} = B^i\boldsymbol{e}_i$, 其逆变分量由公式

$$B^\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}}A_{\alpha\beta} \tag{3.17}$$

确定, 式中的 3 个角标 α, β, γ 得自 1, 2, 3 的循环排列, 而 $g = \det(g_{\alpha\beta})$. 为了证明这一结论, 考虑量 B^γ 在坐标系 x^i 变换为 y^i 时的变换公式. 此时我们将用到张量 $g_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$ 的分量与张量 $A_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$ 的分量的变换公式, 以及 A_{ij} 的对称性.

对于行列式 g, 有[1)]

$$g = |g_{ij}| = |g'_{kl}|\left|\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right|\left|\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\right| = g'\Delta^2,$$

式中 Δ 是矩阵 $(\partial y^k/\partial x^i)$ 的行列式. 所以

$$\frac{1}{\sqrt{g}}A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g'}}\frac{1}{|\Delta|}A'_{pq}\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial y^q}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{g'}}A'_{\alpha\beta}\frac{\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\dfrac{\partial y^\beta}{\partial x^j} - \dfrac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}}{|\Delta|}. \tag{3.18}$$

(只对满足 $\alpha>\beta$ 的 $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ 求和)

容易看出, 量

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} - \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}$$

是元素 $\partial y^\gamma/\partial x^k$ 的代数余子式, 只要角标 α, β, γ 与 i, j, k 是 1, 2, 3 的循环排列. 因此, 对于矩阵 $(\partial y^i/\partial x^j)$ 的逆矩阵, 有

$$\frac{1}{|\Delta|}\left[\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} - \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}\right] = \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}\frac{\Delta}{|\Delta|}.$$

1) 今后重要的仅仅是量 g 的变换公式, 而 g 与度规的关系是根本无关紧要的.

所以, 式 (3.18) 可以重新写为

$$B^k = B'^{\gamma} \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma} \frac{\Delta}{|\Delta|}. \tag{3.19}$$

此公式仅在 $\Delta > 0$ 的条件下才与通常的矢量逆变分量的变换公式相同.

所以, 由公式 (3.17) 定义的矢量 $\boldsymbol{B} = B^i \boldsymbol{e}_i$ 称为轴矢量或伪矢量, 以区别于通常的极矢量.

对于反演变换, 例如变换

$$y^i = -x^i,$$

极矢量 $\boldsymbol{b}$ 的分量改变符号:

$$b'^k = b^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = -b^k,$$

但由公式 (3.19) 可见, 轴矢量 $\boldsymbol{B}$ 的分量不改变符号:

$$B'^k = -B^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = B^k.$$

矢量的旋度在曲线坐标系中的定义

按照定义, 矢量 $\boldsymbol{c} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ 由以下公式引入:

$$\boldsymbol{c} = c^\gamma \boldsymbol{e}_\gamma, \quad c^\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}} (\nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \right)$$

(α, β, γ 组成 1, 2, 3 的循环排列).

显然, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是极矢量, 则 $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ 是轴矢量.

在笛卡儿坐标系中, 矢量 $\boldsymbol{c} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ 的分量按以下公式计算:

$$c^\gamma = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$$

(α, β, γ 组成 1, 2, 3 的循环排列).

列维-奇维塔张量 $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta \boldsymbol{e}_\gamma$

显然, 矢量 $\boldsymbol{A} = A_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha$ 的旋度可以视为张量 $\nabla_\alpha A_\beta \boldsymbol{e}^\alpha \boldsymbol{e}^\beta$ 与三阶伪张量 $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta \boldsymbol{e}_\gamma$ 缩并的结果, 后者对所有角标都是反对称的, 其分量由以下公式确定:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1/\sqrt{g}, & \text{若 } \alpha, \beta, \gamma \text{ 组成 1, 2, 3 的偶排列}, \\ -1/\sqrt{g}, & \text{若 } \alpha, \beta, \gamma \text{ 组成 1, 2, 3 的奇排列}, \\ 0, & \text{若 } \alpha, \beta, \gamma \text{ 中有 2 个相等}. \end{cases} \tag{3.20}$$

不难直接检验, 公式 (3.20) 确实定义了一个伪张量的分量, 即当变换到另外一个坐标系 y^i 时 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ 的变换公式可以写为以下形式:

$$\varepsilon'^{ijk} = \frac{\Delta}{|\Delta|} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial y^k}{\partial x^\gamma},$$

并且 ε'^{ijk} 按照类似于 (3.20) 的公式通过 $g' = \det(g'_{ij})$ 表示. 列维-奇维塔张量

是伪张量[1]，这一名称关系到变换公式中的符号决定于因子 $\Delta/|\Delta|$. 对于正常变换 $(\Delta > 0)$，伪张量与普通的张量没有区别.

于是，矢量 rot $\boldsymbol{A}$ 的分量可以写为以下形式:

$$c^{\gamma} = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\nabla_{\alpha}A_{\beta}.$$

矢积在曲线坐标系中的分量

我们再来考虑曲线坐标系中两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的矢量乘法运算. 按照定义，我们认为矢积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的分量 c^{γ} 由以下公式表示:

$$c^{\gamma} = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta}A_{\alpha}B_{\beta},$$

即

$$c^{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}}(A_iB_j - A_jB_i)$$

$(i,\ j,\ \gamma$ 组成 1, 2, 3 的循环排列). 由此可见，例如，两个极矢量的矢积是轴矢量 (伪矢量).

轴矢量的例子

涡量 $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}/2$，磁场强度 $\boldsymbol{H}$，磁通量密度 $\boldsymbol{B}$ 等矢量都是轴矢量的物理实例，它们在本质上都是二阶反对称张量.

对两个角标反对称的张量与相应轴矢量的等价性仅在三维空间中才成立. 在 n 维空间中，当 $n > 3$ 时没有类似的等价性.

在物理学中，除了空间坐标为 $x^1,\ x^2,\ x^3$ 的三维空间，空间点的坐标为 $x^1,\ x^2,\ x^3$ 和时间 $t = x^4$ 的四维空间也具有直接的物理意义.

在表述基本物理方程时，需要研究坐标为 $x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4$ 的四维空间中的矢量和张量，同时认为四维时空中的点的坐标是互相关联的，并且在某种意义上是等价的.

四维空间中的二阶反对称张量对应一个轴矢量与一个极矢量

在这样的四维空间中，二阶反对称张量同样会在物理方程中出现，并且具有最基本的意义.

设 F_{ik} 是四维空间中的反对称张量. 由定义，$F_{ik} = -F_{ki}$，故 $F_{ii} = 0$. 经过坐标变换

$$x^i = f^i(y^1,\ y^2,\ y^3,\ y^4),\quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{3.21}$$

张量的分量 F_{ik} 按照通常的公式进行变换:

$$F_{ik}^{(y)} = F_{pq}^{(x)}\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^k}. \tag{3.22}$$

变换公式 (3.22) 和下述结论与四维空间的度规的引入方法无关. 不过更加方便的是，

[1] 列维－奇维塔张量亦称置换张量. 显然 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \boldsymbol{e}^{\alpha}\cdot(\boldsymbol{e}^{\beta}\times\boldsymbol{e}^{\gamma})$. 因为矢量的旋度与矢积都可以通过列维－奇维塔张量表示，所以等式 (通常称为 ε-δ 恒等式)

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{\alpha\beta k} = \delta^i_{\alpha}\delta^j_{\beta} - \delta^i_{\beta}\delta^j_{\alpha},\quad \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{\alpha jk} = 2\delta^i_{\alpha},\quad \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

在张量运算中有广泛的应用. ——译注

与四维空间一起还考察通常的三维子空间 x^1, x^2, x^3, 其度规以通常的方法由以下形式的公式确定:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3).$$

对于张量 F_{ik} 的四阶矩阵, 可以写出

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{g}\, H^3 & -\sqrt{g}\, H^2 & E_1 \\ -\sqrt{g}\, H^3 & 0 & \sqrt{g}\, H^1 & E_2 \\ \sqrt{g}\, H^2 & -\sqrt{g}\, H^1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

式中

$$g = \det(g_{\alpha\beta}).$$

字母 H^α 与 E_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ 表示矩阵的相应元素 F_{ik}. 分量 F_{ik} 的变换公式 (3.22) 还可以视为量 H^α 和 E_α 的变换公式.

如果与一般的坐标变换 (3.21) 一起还考虑一些特别的坐标变换

$$\begin{aligned} &x^\alpha = f^\alpha(y^1,\ y^2,\ y^3), \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3, \\ &x^4 = y^4, \end{aligned} \tag{3.24}$$

其中只有空间坐标发生变换, 而时间坐标保持不变, 则一般变换公式 (3.22) 将给出 (3.23) 的第二个矩阵中表示为 H^α 与 E_α 的量的特别的变换公式. 从这些公式可知, 对于特别的变换 (3.24), 量 H^α 与 E_α 可以分别视为三维轴矢量

$$\boldsymbol{H} = H^\gamma \boldsymbol{e}_\gamma \quad (\gamma = 1,\ 2,\ 3),$$

$$H^\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}} F_{\alpha\beta}$$

$(\alpha, \beta, \gamma$ 组成 1, 2, 3 的循环排列) 的逆变分量与极矢量

$$\boldsymbol{E} = E_\gamma \boldsymbol{e}^\gamma \quad (\gamma = 1,\ 2,\ 3),$$

$$E_\gamma = F_{\gamma 4}$$

的协变分量. 显然, H^γ 与 E_γ 的变换公式在四维变换 (3.21) 的一般情况下不是矢量的变换公式. 从四维空间的观点来看, 三维的矢量 $\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 不是不变的对象.

以后我们将看到, 电场强度与磁场强度矢量就可以视为相应四维张量

$$\boldsymbol{F} = F_{ik} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^k$$

所对应的矢量 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$.

我们强调, F_{ik}, E_γ 与 H^γ 的上述关系与四维空间的度规无关. 在 (3.23) 中可以使用三维空间中的任何其他二阶张量来代替三维度规张量 $g_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}^\alpha\boldsymbol{e}^\beta$, 只要用该张量的分量组成的行列式不等于零.

第五章　热力学的基本概念和方程

§1. 动能定理和内面力的功

连续介质的动力学运动方程的最重要的一个一般推论是动能定理.

设 V 是与介质微元一起运动的任意的有限物质体, Σ 是其表面. 假设应力张量 $\boldsymbol{P} = p^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 与速度矢量 $\boldsymbol{v} = v^i\boldsymbol{e}_i = v_i\boldsymbol{e}^i$ 的分量在物质体 V 内部是空间坐标和时间的连续可微函数.

取矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$, 即连续介质无穷小物质体 $\mathrm{d}\tau$ 在时间 $\mathrm{d}t$ 内的位移矢量. 用 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 对动量方程作标量乘, 并对物质体 V 积分, 得

$$\int\limits_V \rho\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_V \rho\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_V (\nabla_j p^{ij})v_i\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.1}$$

我们将对此式中的积分进行变换.

连续介质物质体 V 的动能

可以利用任何坐标系来计算标量 (不变量) $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}$, 例如在笛卡儿坐标系中易得

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}^2.$$

因为质量 $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\tau$ 守恒, 所以显然

$$\int\limits_V \rho\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \int\limits_M \mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}m = \mathrm{d}\int\limits_M \frac{v^2}{2}\mathrm{d}m = \mathrm{d}E,$$

式中定义

$$E = \int\limits_V \frac{\rho v^2}{2}\mathrm{d}\tau, \tag{1.2}$$

这是连续介质物质体 V 的动能[1].

内质量力和外质量力的功 我们把质量力 $\boldsymbol{F}$ 分为两组: 相对于整个物质体 V 的内质量力 $\boldsymbol{F}^{(\mathrm{i})}$ 和外质量力 $\boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}$. 那么,

$$\int_V \rho\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\tau = \int_V \rho\boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\tau + \int_V \rho\boldsymbol{F}^{(\mathrm{i})}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}A_m^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}A_m^{(\mathrm{i})},$$

式中 $\mathrm{d}A_m^{(\mathrm{e})}$ 和 $\mathrm{d}A_m^{(\mathrm{i})}$ 分别是作用于物质体 V 的外质量力和内质量力在无穷小位移过程中的元功.

我们指出, 作用于整个物质体 V 的所有内质量力之和恒等于零, 但这些力的功可能不等于零.

我们把式 (1.1) 中的最后一个积分写为以下两个积分的形式:

$$\int_V (\nabla_j p^{ij})v_i\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau = \int_V \nabla_j(p^{ij}v_i)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau - \int_V p^{ij}\nabla_j v_i\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.3}$$

利用奥－高定理变换 (1.3) 右侧第一个积分, 再利用明显的恒等式

$$\nabla_j v_i = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) + \frac{1}{2}(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j) = e_{ij} + \omega_{ij}$$

变换其右侧第二个积分, 结果得

$$\int_V (\nabla_j p^{ij})v_i\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau = \int_\Sigma p^{ij}v_i n_j\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t - \int_V p^{ij}e_{ij}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau - \int_V p^{ij}\omega_{ij}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau, \tag{1.4}$$

式中 n_i 为表面 Σ 相对于物质体 V 的单位外法向矢量的协变分量.

我们指出, 根据张量 $\omega_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$ 的反对称性, 成立等式

$$p^{ij}\omega_{ij} = \underset{i<j}{p^{ij}\omega_{ij} + p^{ji}\omega_{ji}} = \underset{i<j}{(p^{ij} - p^{ji})\omega_{ji}}, \tag{1.5}$$

所以在应力张量对称 ($p^{ij} = p^{ji}$) 的经典情况下, (1.4) 中最后一个积分等于零.

外面力的功 因为 $p^{ij}n_j\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{p}_n$, 所以可以写出

$$\int_\Sigma p^{ij}v_i n_j\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t = \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}A_\Sigma^{(\mathrm{e})},$$

式中 $\mathrm{d}A_\Sigma^{(\mathrm{e})}$ 表示所取物质体 V 的表面 Σ 上的外面力在表面 Σ 的点发生无穷小位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$ 时的元功.

---

[1] N 组元混合物的动能可以定义为各组元动能之和. 显然,

$$E = \int_V \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\rho_k v_k^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau = \int_V \frac{\rho v^2}{2}\mathrm{d}\tau + \int_V \left[\sum_{k=1}^{N}\frac{\rho_k(\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v})^2}{2}\right]\mathrm{d}\tau,$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为混合物微元的质心速度 (见第三章公式 (1.8)). 由此可见, 混合物的动能等于其整体动能 (公式右侧第一个积分) 与扩散动能 (公式右侧第二个积分) 之和. ——译注

内面力的功的定义 (1.3) 的最后一个积分是不变量, 它按照定义称为物质体 V 中的内面力 (内应力)[1] 的元功:

$$-\int_V p^{ij}\nabla_j v_i \, dt\, d\tau = dA_\Sigma^{(i)}.$$

连续介质有限物质体的动能定理 因此, 式 (1.1) 可以写为

$$dE = dA_m^{(e)} + dA_m^{(i)} + dA_\Sigma^{(e)} + dA_\Sigma^{(i)}, \tag{1.6}$$

即, 对于实际的运动, 连续介质有限物质体动能的微分等于作用于该物质体的外质量力、内质量力、外面力和内面力的元功之和. 这个结论称为适用于连续变形介质有限物质体的动能定理.

需要指出的是, 在动能定理的表述 (1.6) 中, dE 是函数 E (连续介质物质体的动能) 的全微分, 而其他项 $dA_m^{(e)}$, $dA_m^{(i)}$, $dA_\Sigma^{(e)}$, $dA_\Sigma^{(i)}$ 在一般情况下仅仅是无穷小量[2], 即相应的力在连续介质每一点所对应的连续的无穷小位移 $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\, dt$ 上的元功.

应力张量对称时内面力的功的表达式 从 (1.3), (1.4), (1.5) 可见, 内面力的功的表达式可以写为

$$dA_\Sigma^{(i)} = -\int_V p^{ij} e_{ij}\, dt\, d\tau - \int_V p^{ij}\omega_{ij}\, dt\, d\tau,$$

或者, 当应力张量对称时,

$$dA_\Sigma^{(i)} = -\int_V p^{ij} e_{ij}\, dt\, d\tau.$$

众所周知, 三维空间中的反对称张量 ω_{ij} 总可以对应一个轴矢量 $\boldsymbol{\omega}$, 即速度所对应的涡量 (参见第四章 §3). 从以上讨论可知, 当应力张量对称时 (例如当没有内禀动量矩、外质量力偶和外面力偶时), 在运动的连续介质中存在涡量并不会直接影响内面力元功的值, 因此也不会直接影响动能的变化.

连续介质无穷小物质体的动能定理 现在写出连续介质无穷小物质体的动能定理. 为此, 选取物质体微元 ΔV, 使我们所关心的连续介质的某个点位于其中. 当物质体 ΔV 向该点收缩时, 对该物质体写出等式 (1.1) 并以 ΔV 中物质微元的质量 Δm 除之, 再利用 (1.2) 和 (1.3), 由此给出

$$\frac{dv^2}{2} = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \frac{1}{\rho}\nabla_j(p^{ij}v_i)\, dt - \frac{1}{\rho}p^{ij}\nabla_j v_i\, dt.$$

量 $v^2/2$ 可以称为动能密度, 量 $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, $\frac{1}{\rho}\nabla_j(p^{ij}v_i)\, dt$, $-\frac{1}{\rho}p^{ij}\nabla_j v_i\, dt$ 则分别称为质量力、外面力和内面力的元功密度.

---

[1] 我们强调, 尽管作用与反作用定律对内应力成立, 但是由于存在变形, 相互作用的内力的功即便在连续运动中一般也不等于零.

[2] 因此, 文献中也经常把这些项记为 δA, $d'A$ 或 $đA$ 的形式, 以强调它们不是全微分. 后文中热量记号 dQ, dq 的含义是类似的. ——译注

在连续介质无穷小物质体的动能定理中没有内质量力的元功, 因为它在 V 向点收缩时和 $M \to 0$ 时趋于零. 这直接得自质量力密度存在的假设, 即假设作用于一个物质体的外质量力与该物质体的质量之比的极限存在.

例如, 设物质体 V 的质量为 M, 其中的内质量力是诸微元之间的牛顿万有引力, 则内质量力的功显然可以写为以下形式:

$$f \int_M \int_M \frac{\mathrm{d}m_1 \mathrm{d}m_2}{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2} \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2.$$

此式除以 M, 当 V 收缩于一点时, 其极限等于零.

因此, 对每个介质微元都成立的动能定理可叙述为: 在连续介质的每个点, 动能密度的微分等于作用于该微元的外质量力、外面力和内面力的元功密度之和.

我们看到, 动能定理是动量方程的直接推论, 是机械能平衡方程. 动能定理具有能量的本质, 但这个关系式在一般情况下不是能量守恒方程. 只有当所研究的系统的机械能不转变为热或其他形式的能量时, 才能 (在问题的力学提法的范围内) 把它解释为能量守恒定律. 我们指出, 一般的能量守恒定律此时分为机械能守恒定律和非机械能守恒定律两部分.

我们来获得内面力的元功密度 $\frac{1}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}A_\Sigma^{(\mathrm{i})}$ 在某些特殊情况下的表达式. 我们有

$$\frac{1}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}A_\Sigma^{(\mathrm{i})} = -\frac{1}{\rho}p^{ij}e_{ij}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\rho}p^{ij}\omega_{ij}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\rho}p^{ij}e_{ij}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\rho}(p^{ij} \underset{i<j}{-} p^{ji})\omega_{ij}\,\mathrm{d}t.$$

如果介质像刚体一样运动, 则所有 $e_{ij} = 0$, 于是

$$\frac{1}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}A_\Sigma^{(\mathrm{i})} = -\frac{1}{\rho}(p^{ij} \underset{i<j}{-} p^{ji})\omega_{ij}\,\mathrm{d}t.$$

如果应力张量不对称 ($p^{ij} \neq p^{ji}$), 则当介质像刚体一样运动时, 内面力的功可能不等于零, 因为 (在旋转时) 角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 可能不等于零, 即 ω_{ij} 可能不等于零.

如果应力张量对称, 则成立等式

$$\frac{1}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}A_\Sigma^{(\mathrm{i})} = -\frac{1}{\rho}p^{ij}e_{ij}\,\mathrm{d}t,$$

即此时内面力的功一般而言决定于变形. 如果应力张量对称的介质像刚体一样运动, 则介质中内面力的功恒等于零.

理想流体中内力的功的密度

对于理想流体, $p^{ij} = -pg^{ij}$, 所以

$$\frac{1}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}A_\Sigma^{(\mathrm{i})} = \frac{p}{\rho}g^{ij}e_{ij}\,\mathrm{d}t = \frac{p}{\rho}e^{i}_{\cdot i}\,\mathrm{d}t = \frac{p}{\rho}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t.$$

利用连续性方程对 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$ 进行代换, 得

$$\frac{1}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}A_\Sigma^{(\mathrm{i})} = -\frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} = p\,\mathrm{d}V, \tag{1.7}$$

式中 V 为质量体积.

对于理想介质微元, 在介质连续运动区域中的动能定理具有以下形式:

$$\mathrm{d}\frac{v^2}{2} = \frac{1}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}A_m^{(\mathrm{e})} + \frac{1}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}A_\Sigma^{(\mathrm{e})} + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} = \boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\rho}\nabla_k(pv^k)\,\mathrm{d}t + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho}. \tag{1.8}$$

不无裨益指出, 当连续介质相对于我们选定的运动的或静止的坐标系运动时, 内力的功的密度值一般不等于所有外面力和外质量力的功的密度值的相反数.

§2. 热力学第一定律 (能量守恒定律) 和热流方程

状态参量 首先阐述作为热力学乃至整个连续介质力学的基础的两个概念, 即系统的“状态”和“状态参量”的概念. 我们说, 我们的系统 (例如连续介质的某个物质体) 的状态是给定的, 如果给定了某些主定参量[1] $\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^n, \cdots$ 的值, 这些参量完全决定了所有我们所关心的系统 (介质) 特征量. 此时, 主定参量 μ^i 一般能够在某些范围内取任意值, 它们称为状态参量.

状态参量组及参量的数目对于连续介质的不同模型是不同的.

系统的状态已知, 这表示什么? 该问题可回答如下. 所有物体均由原子和分子组成, 如果组成物体的所有基本粒子的位置和运动在每一时刻都是已知的, 整个物体的状态就是已知的. 然而, 这个回答并不能使我们满意. 其实, 例如, 假如我们想给出 1 cm^3 静止空气[2] 的状态, 我们就必须给出其中所包含的分子 (认为是质点) 的坐标对时间的 $3\times 2.7\times 10^{19}$ 个函数, 因为即便是静止的气体, 其分子也在运动. 同时我们知道, 从宏观观点上讲, 在许多情况下只给出 2 个参量——压强 p 和密度 ρ——即可确定静止的空气 (和其他一些气体) 的状态.

宏观观点是这样一种观点, 其中所考虑的过程、效应和性质只对我们在自然和技术中观察或应用的有限物体才是重要的[3].

视为离散系的介质, 其状态由巨大数目的参量决定, 然而介质的宏观状态仅由类似于气体的 ρ 和 p 的较少数目的参量决定. 从大量参量过渡到少量参量绝非平凡问题, 这是液体、气体和固体物理学最重要的目标. 这个问题的解决总是关系到一些额外的假设, 这些假设是具有概率本质及其他本质的定律, 应当可以在实验和观察中检验并获得.

宏观参量可以构造为在某些假设下计算的统计平均值, 这些假设关系到一般任意运动和分布的大量分子的集合. 例如在气体中, 宏观速度 $\boldsymbol{v}$ 可以引入为物理上的微小区域内所有分子的重心的速度, 温度 T 可以引入为原子和分子相对于宏观运动

[1] 在量纲理论中亦有主定参量 (определяющий параметр) 的概念, 其含义有所不同. 参见 140 页和第七章 §8. ——译注

[2] 指温度为 0 °C, 压强为 1 atm 的空气. ——译注

[3] 重要性的概念与问题的提法有关, 与所采用的测量和定义的恰当合理的精度有关.

而进行的无规运动在一个自由度上的平均能量, 某面微元上的应力 p_n 可以引入为分子在无规运动时通过该面微元输运的动量的平均特征量, 等等.

在一般情况下, 可以在实验数据和理论研究的基础上利用一些假设对所研究的确定的若干类问题引入主定参量. 在许多复杂情况下, 引入主定参量的问题还未解决, 这是许多问题的研究对象, 例如固体的黏塑性模型, 物理、化学或生物系统中的复杂的非平衡现象, 各种伴随辐射的现象, 以及许许多多其他问题.

连续介质状态参量的数目 物质的连续介质, 其微元的内部状态一般而言可以用有限数目的主定参量来表征, 这个数目远小于离散的基本粒子系统的主定参量的数目. 例如在经典弹性力学中, 表征可变形固体微元内部状态的参量仅仅是 7 个变量——应变张量的 6 个分量 ε_{ij} 和温度 T, 以及所给具体介质的物理常量——杨氏模量 E, 泊松比 σ 和热容 c. 与此同时也不排除这样的可能性, 这时在某个连续介质模型中, 甚至对于无穷小的介质微元, 其状态的主定参量都有无穷多个.

这种模型的一个例子是遗传性物体模型. 在引入这样的模型时认为, 应力 p^{ij} 不仅与所给时刻的变形和温度有关, 而且与物体变形的整个历史有关, 即依赖于函数 $\varepsilon_{ij}(t)$ 和 $T(t)$. 这等价于以下说法: p^{ij} 依赖于 ε_{ij}, T 以及它们对时间的所有导数, 即这种介质的状态参量有无穷多个. 另外一个更加复杂的例子可以是从统计物理学发展出来的动理论中所遇到的一些连续介质, 比如由玻尔兹曼方程描述的气体. 不过, 这类模型很复杂, 而且理论和实践的经验表明, 在大多数实际重要的情形中, 有限的、一般不多的若干个参量就可以给出一个微元的状态. 在复杂的动理论中, 求解时也经常采用一些近似方法, 这些方法从物理观点上讲等价于过渡到无穷小的微元的有限数目自由度模型.

我们指出, 为了确定连续介质有限物质体的状态, 一般而言总需要给出一些函数 (而不是有限个数)——应变、温度等量的分布.

给出一个函数等价于给出无穷多个参量 (例如此函数的傅里叶系数), 所以在一般情况下, 有限物质体的主定参量的数目对任何连续介质模型来说总是无限大的. 然而, 对微小物质体而言, 给出物体状态的所有函数都可以近似地认为或者是线性的, 或者是二次的, 或者是次数不很高的多项式. 由这些多项式的系数组成的有限个参量就给出了连续介质微元的状态.

在构建连续介质力学时, 我们把连续介质微元看作这样的热力学系统, 其中定义了一些力学概念来表示系统的位置和运动特征量, 还定义了一些物理概念来表示其内部状态.

以后我们将认为, 对于连续介质微元存在有限的一组特征量——在所用坐标系和单位制下以数的形式给出的一组主定参量. 在这些参量中, 某些可能是几何或力学参量, 例如空间坐标、速度、密度、变形特征量, 等等, 另外一些可能是物理或化学参量, 例如温度、不同组元的浓度、结构参量、物质的相位特征量、热导率、黏度、

弹性模量, 等等.

我们规定, μ^i 表示在所用参考系中可能是变量的参量, k^i 表示物理常量, 并且 μ^i, k^i 中的某些参量可能是各种矢量和张量的分量.

完全的主定参量组

对于固定的微元, 量 $\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^n, k^1, k^2, \cdots, k^m$ 按照定义组成基 (完全的主定参量组), 如果它们在已知区域中可以被独立地任意给出, 并且具有以下性质: 在这一类问题中所研究的所有其他的状态和运动特征量, 都可以通过这组参量以普适的、与个别具体问题无关的形式表示出来.

例如, 我们将在以后看到, 气体微元的密度和温度在已知的范围内能够任意给出, 而诸如熵和压强的其他一些热力学函数则通过它们来确定.

应当把所给具体问题的主定参量组和确定介质状态的主定参量组区别开来. 前者是表征问题条件的参量组, 它们以方程组和附加的边界条件及其他条件为基础, 对有限的物体划分出一些独特的整体现象 (该参量组与具体问题的提法有关); 后者是在组成方程时必须用到的状态特征量, 这些方程对各种各样的具体问题和过程都是成立的.

一个连续介质模型是为了在某几类确定的外部条件下描述某实际介质的运动. 主定参量组决定着介质微元的物理状态, 所以在确定某个连续介质模型时, 把主定参量组固定下来是重要的一步, 也是逻辑意义上的第一步.

从数学观点上讲, 状态参量 $\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^n, k^1, k^2, \cdots, k^m$ 是描述介质特性的封闭方程组中的函数的自变量[1]. 显然, 这些函数可能依赖于不同的独立变量组, 所以把所给连续介质模型固定下来的主定参量组可能由不同的量组成. 例如在气体的情况下, 这可能是 p 和 ρ, 或 p 和 T, 或 ρ 和 T, 等等.

从物理观点上讲, 这些不同的主定参量组对于所给连续介质模型可能并不等价. 正如我们以后将看到的, 用 ρ 和熵 s 的函数或者 p 和 ρ 的函数给出内能包含有不同的信息量. 在引入主定参量组时, 必须理解并留意那些被定量. 显然, 对于不同的被定量, 主定参量组按照其参量的数目和组成一般可能不尽相同.

完整热力学系统与非完整热力学系统

理论力学中的自由度数目和连续介质力学中的主定参量数目这两个概念可以进行类比.

事实上, 自由度数目通常定义为决定一个力学系统的位置的独立参量的数目, 例如刚体具有 6 个自由度. 我们指出, 如果把刚体视为物理系统, 则为了定义刚体还必须给出 10 个常参量——质量、质心在刚体中的位置和对质心的惯量张量的分量.

在理论力学中有对非完整系统的研究. 在连续介质力学中也可能出现这样的状况, 这时可以在确定的范围内任意改变主定参量 $\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^n$, 但其增量 $\delta\mu^i$ 在所研究的一类问题的条件下是相互关联的, 例如由以下形式的 m 个独立的不可积关系

[1] 主定参量这一概念本身的含义就意味着, 实际的函数关系是通过相应的定律、假设和直接的定义建立起来的.

式相关联:

$$A_i\,\delta\mu^i = 0,$$

式中 A_i 为主定参量的某些函数. 于是, 独立增量 $\delta\mu^i$ 的数目 $n-m$ 小于主定参量中的独立变量 μ^i 的数目, 热力学系统称为非完整的.

对于非完整系统, 自由度的数目定义为独立增量 $\delta\mu^i$ 的数目.

我们来讨论一个例子, 其中的非完整关系式仅仅来自参量 μ^i 的定义. 例如, 令 $\mu^1(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t)$ 是某标量参量 (如微元的密度 ρ), t 是时间, ξ^1, ξ^2, ξ^3 是所选微元中心的拉格朗日坐标, μ^2 和 μ^3 是 μ^1 对 t 的一阶和二阶导数, 即它们由以下公式定义:

$$\mu^2 = \frac{\partial\mu^1}{\partial t},\quad \mu^3 = \frac{\partial\mu^2}{\partial t} = \frac{\partial^2\mu^1}{\partial t^2}. \tag{2.1}$$

我们依照自然的物理条件认为参量组 μ^i 非显式地包含时间 t.

显然, 在不同的外部条件下, μ^1, μ^2, μ^3 有可能在某些范围内取不同的任意的值, 它们对应着不同的状态, 然而当 ξ^1, ξ^2, ξ^3 固定时, 时间增量 $\mathrm{d}t$ 所导致的增量 $\mathrm{d}\mu^1$ 和 $\mathrm{d}\mu^2$ 总是由同一个非完整关系式联系在一起:

$$\mu^2\mathrm{d}\mu^2 - \mu^3\mathrm{d}\mu^1 = 0, \tag{2.2}$$

它在式 (2.1) 成立时恒成立. 由式 (2.1) 可知, 式 (2.2) 对任意的 $\mathrm{d}\mu^1$ 和 $\mathrm{d}\mu^2$ 并不成立. 若所使用的连续介质模型的主定参量中有对时间的连续若干阶导数, 就会出现这种非完整关系式. 式 (2.1), (2.2) 与观察或实验并无联系, 但是应当把以下事实视为实验结果: 在建立连续介质模型时, 把连续若干阶导数作为主定参量引入是可以的和适当的, 应当把它们当作某些函数的自变量, 而这些函数归根结底源自实验数据.

状态空间 我们来研究状态空间, 即坐标为状态参量 μ^i 的空间 (相空间). 热力学系统的不同状态显然将对应状态空间的不同点.

过程与循环 状态参量值的某个序列所对应的一系列介质状态称为过程. 具有特别意义的是那些物理上的真实过程, 即状态序列在所用模型下能够随着时间的流逝而实现的过程. 视外部和内部的相互作用不同, 可以研究各种不同的真实过程.

过程可以是连续的, 此时, 对于给定的微元, 状态 $\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^n$ 的序列在状态空间中组成一条连续曲线. 在理论中还会遇到状态参量 $\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^n$ 的值间断的一些过程, 例如由状态空间中的多段连续曲线组成的间断过程. 连续过程, 以及那些在状态空间中的一些连续曲线上有个别一些间断点的间断过程, 都可以在连续介质力学中进行研究.

在给定的两个固定状态之间一般而言可以有许多不同的过程, 既有连续过程, 也有间断过程. 真实过程可能是在各种各样的外部条件下形成的, 相应曲线一般而言具有很大的随意性, 不过在某些情况下, 例如对于非完整系统, 相应曲线的特点是某些易于发现的特别性质. 在前面讨论的例子中, 从式 (2.1) 可知, 当 $\mu^2 \neq 0$ 时不可能

有 $\mu^1 = \text{const}$ 的连续过程. 然而, 此时式 (2.1) 并不排除状态空间中坐标任意给定的任何两点 $\mu^{1'}$, $\mu^{2'}$, $\mu^{3'}$ 与 $\mu^{1''}$, $\mu^{2''}$, $\mu^{3''}$ 之间的真实的连续过程.

可变参量的数目与特性对不同类型的过程可以不同. 例如, 过程可以是纯力学的, 这时不具力学本质的所有参量都保持常值.

若一个系统经过一个过程后返回了它在状态空间中的初始位置, 这个过程就称为循环. 在连续过程的情况下, 循环在状态空间中对应封闭曲线.

我们在本章中研究连续过程, 而具有间断点的过程则将在后面第七章进行研究.

可以先固定某个状态 A, 再研究经过状态 A 和某个状态 B 的所有可能的连续循环. 不同的过程和循环对应着不同的外部条件, 因为确定状态 $\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^n$ 的方程所包含的某些函数可能是不同的, 可以用不同方式处理它们, 从而影响到所研究的过程. 连续介质模型的一些已知实例表明, 当状态 A 固定时, 状态 B 一般而言可以是物理上允许的主定参量值所确定的相空间中的所有可能状态.

系统与外部对象的相互作用

在一般情况下, 一个系统在完成某个过程时会与外部的物体和场[1] 发生相互作用. 在建立连续介质模型的时候, 基本的任务就是确立所取连续介质微元与外部的物体和场相互作用的定律和机理. 所取微元的外部物体也包括同一介质的相邻微元.

为了应用, 在连续介质力学中同样需要少数几个主定参量之间的一些宏观关系式, 这些关系式经常取决于微观上关于物体中的分子、原子和其他粒子, 以及它们的位置、运动和相互作用力的知识. 但是, 这些知识的所有细节永远也不会彻底研究清楚. 此外还要重点强调, 不可能——更主要地——也不需要考虑所有已知的细节. 所以, 在建立连续介质模型时总要以这样或那样的形式提出并使用一些唯象假设, 在检验出它们有助于描述实验中观察到的现象之后, 这些假设就被称为自然定律.

在物理学中, 例如在连续介质力学中, 考虑给定微元 (热力学系统) 与相邻微元、外部物体和外部场之间的能量交换具有重大意义. 能量的概念与对能量的各种形式的认识有密切的联系. 这可以是诸微元的动能, 与微元的相对位置有关的势能, 热能[2], 电磁能, 化学键的能量, 以及能量的某些其他形式. 在更加细致的微观层次的研究中, 能量的各种形式的概念 (与数目) 是变化的. 然而实践表明, 在宏观层次上可以通过某些唯象特征来区别能量的上述形式和其他形式, 可以讨论能量从一种形

[1] 一个热力学系统外部的物体和场称为该系统的环境. 根据系统与环境的相互作用特点, 可以把热力学系统分为孤立系统、封闭系统和开放系统. 孤立系统与环境之间完全隔绝, 既没有物质交换, 也没有能量交换. 封闭系统与环境仅有能量交换但没有物质交换, 而开放系统是最一般的情况, 与环境既有能量交换, 也有物质交换. 在本书中经常把物质体取作热力学系统, 所以在下文中主要研究封闭系统, 但要注意在第五章最后研究混合物的时候, 混合物整体的物质体是开放系统, 因为扩散和化学反应都能够导致系统与环境发生物质交换. ——译注

[2] 热, 或热量, 是能量传递的一种形式, 是由于系统的温度与环境的温度有差异而通过系统的边界面所传递的能量, 它与系统的变化过程有关. 因此, 热不是系统本身的属性, 不能说一个系统含有多少热. 热能 (тепловая энергия) 一词是一种通俗的说法, 我们应把它理解为以热的形式传递或转化的能量. ——译注

式向另一种形式的转换.

我们的出发点包括两方面内容. 首先, 一个系统的能量, 以及因系统与外部物体和场的相互作用而进入系统的能量流, 其形式是不同的, 所以, 作为一个基本的物理观点, 应当存在一些特征, 使我们有可能在宏观上区别能量的不同形式. 其次, 必须考虑能量从一种形式向另一种形式的转换.

考虑一个由有限个主定参量表征的系统, 例如一个连续介质微元, 或者所有微元都完成相同过程的有限物质体 V (此时状态参量在该物质体中处处相同).

我们将认为, 只要给出一个微元的内部状态特征量 $\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^n$ 及其无穷小增量 $\mathrm{d}\mu^1, \mathrm{d}\mu^2, \cdots, \mathrm{d}\mu^n$, 据此即可判断从外部进入微元的各种宏观能量流的总量. 这些能量流取决于增量 $\mathrm{d}\mu^1, \mathrm{d}\mu^2, \cdots, \mathrm{d}\mu^n$ 所对应的微过程, 相关结果关系到从外部进入微元的各种能量流的性质, 这些结果可以——一般而言也必须——视为对模型性质的描述, 这是在结构上建立一个模型最为重要的一环. 为了确定一个模型, 自然也可选取关于能量交换的其他一些结果 (事实上也正是如此), 这些结果可以得自某些普适的或者该模型所特有的关系式.

在力学中, 对于进入微元的能量流而言, 具有主要意义的通常是力学本质的能量流和热流, 前者是宏观上的外质量力 (体积力) 和外面力对微元所做的功, 后者是微元因热传导、辐射和其他一些机理而得到的能量. (这些能量流被微元释放或得到, 相应能量能够在微元内部或外部互相转换.)

在许多情况下, 还需要考虑电磁相互作用, 还需要研究微元与外部介质因为一些更复杂的相互作用机理而进行的能量交换, 例如分布面力偶的功, 因为化学变化、结构变化和相变而导致的能量交换, 等等.

我们指出, 当前正在研究选定的介质微元与周围介质之间进行能量交换的新的宏观机理. 在微观层次上, 乃至在宏观层次的许多情况下 (金属的性质, 低温下物体内部的相互作用, 激光束与普通物体的相互作用, 等等), 只有在量子力学的范畴内才能理解相互作用机理的本质, 虽然这些相互作用所必须的唯象提法可以在牛顿力学范畴内的一些复杂的连续介质模型中给出.

对于微过程 $\mathrm{d}\mu^1, \mathrm{d}\mu^2, \cdots, \mathrm{d}\mu^n$, 从外部进入微元的全部能量流可以表示为

$$\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}Q^{**},$$

式中 $\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})}$ 为宏观的外质量力和外面力的功, $\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}$ 为热流, 而 $\mathrm{d}Q^{**}$ 是从外部进入微元的因为不同于宏观力做功和热交换的各种相互作用机理而出现的能量流. 例如, 当考虑介质的磁化和极化所消耗的能量时, 与电磁场的相互作用会导致最后一种能量流, 此外其他一些原因也会导致这种能量流.

依照主定参量组的基本意义和定义连续介质模型的一系列假设, 对于参量的变化 $\mathrm{d}\mu^1, \mathrm{d}\mu^2, \cdots, \mathrm{d}\mu^n$ 所对应的无穷小的微过程, 可以对外力的元功写出以下公式:

$$\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})} = P_i(\mu^1,\ \mu^2,\ \cdots,\ \mu^n,\ k^1,\ k^2,\ \cdots,\ k^m)\,\mathrm{d}\mu^i, \tag{2.3}$$

式中, 外力的功是通过所研究的微元的内部参量及其增量表示的. 就本质而言, 函数 P_i 的形式与定义模型所必须的那些基本假设的提法有关.

对于连续介质微元, 可以把公式 (2.3) 看作以下公式的推广, 如质量为 m 的质点以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的公式

$$\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})} = mv\,\mathrm{d}v, \tag{2.4}$$

或者任意有限尺寸的刚体的公式

$$\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})} = mv^*\mathrm{d}v^* + Ap\,\mathrm{d}p + Bq\,\mathrm{d}q + Cr\,\mathrm{d}r, \tag{2.5}$$

式中 m 是刚体的质量, $\boldsymbol{v}^*$ 是刚体的质心速度, A, B, C 是中心主转动惯量, p, q, r 是瞬时角速度在中心惯量主轴上的投影.

对于理想流体, 若压强以状态参量的函数的形式给出, 则根据动能定理 (1.8) 可以写出

$$\frac{1}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})} = v\,\mathrm{d}v - p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho}. \tag{2.6}$$

(2.3)—(2.6) 中的每一个关系式都可以视为 $\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})}$ 的定义, 它是通过介质的内部参量表示出来的.

介质微元与外部物体之间的能量交换依赖于外部条件. 对于 $\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})}$, 如果从进一步研究中知道了给出这种依赖关系的定律, 上述每一个关系式就都可以变为用来确定一个具体过程中的参量值的方程. 例如, 对于质点, 可以使用 $\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})}$ 的一个不同于 (2.4) 的表达式, 即

$$\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})} = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 是力. 如果力 $\boldsymbol{F}$ 是已知的 (已知质点与外部对象的相互作用机理), (2.4) 就化为确定质点运动的方程. 我们强调, 表征所给模型的那些相互作用定律可以在实验观察的基础上建立起来, 实验中要测量 (2.3) 的右侧, 然后对观察结果进行相应的处理和推广.

根据一些物理特征, 一般而言根据所研究介质模型的定义中包含的那些专门的物理假设, 类似于 (2.3) 还可以写出

$$\mathrm{d}Q^* = \mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}Q^{**} = Q_i(\mu^1,\ \mu^2,\ \cdots,\ \mu^n,\ k^1,\ k^2,\ \cdots,\ k^m)\,\mathrm{d}\mu^i. \tag{2.7}$$

例如, 对于刚体或理想不可压缩流体, 可认为

$$\mathrm{d}Q^* = \mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} = C(T)\,\mathrm{d}T, \tag{2.8}$$

式中 $C(T)$ 是热容, T 是温度. 式 (2.8) 可以用于在实验中确定 $\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}$ 的值. 如果对 $\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}$ 确定了传热定律, 则当 $\mathrm{d}Q^{**}=0$ 时式 (2.7) 就化为一个传热方程.

公式 (2.3) 和 (2.7) 在更一般的情况下是很复杂的. 例如, 对于黏性流体, 在 (2.3) 的右侧有某一项取正值, 而同样的一项也出现在 (2.7) 中, 但是取负值. 这一项对应

黏性应力的耗散功, 内力的这种功转化为热 (详见本章 §7). 当微元中的能量从一种形式转化为另一种形式时, 这样的状况是很典型的. 从以后的内容可知, 和 $P_i + Q_i$ 所表示的量具有最重要的意义.

能量流 $\mathrm{d}Q^*$, $\mathrm{d}Q^{(e)}$ 和 $\mathrm{d}Q^{**}$ 同宏观外力的元功 $\mathrm{d}A^{(e)}$ 一样, 在一般情况下都不是某些函数的微分, 它们只是无穷小量而已.

能量守恒定律——热力学第一定律

假设有一个过程在状态空间中从状态参量值为 μ_0^i 的点 A 沿曲线 $\mathscr{L}_1$ 移动到状态参量值为 μ^i 的点 B (图 29). 我们引入系统在该过程中从外部得到的总能量流的概念, 它显然等于

$$A^{(e)} + Q^* = \int\limits_{AB(\mathscr{L}_1)} P_i\,\mathrm{d}\mu^i + \int\limits_{AB(\mathscr{L}_1)} Q_i\,\mathrm{d}\mu^i, \tag{2.9}$$

并且初步看来, 它应当与过程有关, 即依赖于状态空间中的积分路径 $\mathscr{L}_1$.

热力学第一定律或能量守恒定律可以表述为: 不可能实现第一类永动机. 第一类永动机是指一种循环运转的机器, 它能够提供有用能量而不使用该机器之外的任何能量源.

这个结论应当视为被所有已知的实验数据所证实的一个定律.

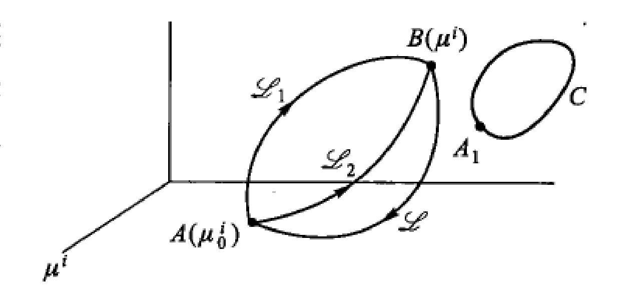


图 29. 用于表述能量守恒定律

现在, 设系统完成了一个循环, 例如 C. 那么, 热力学第一定律或能量守恒定律归结为如下结论: 一个系统在完成任何可实现的循环后, 从外部进入系统的总能量流等于零, 即

$$\oint\limits_C (P_i + Q_i)\,\mathrm{d}\mu^i = 0. \tag{2.10}$$

由此直接可知, 从外部进入系统的总能量流 (2.9) 与过程 $\mathscr{L}_1$ 无关, 它只与系统的初态和终态有关. 事实上, 除了所研究的任意过程 $\mathscr{L}_1$, 在状态 A 和 B 之间再引入另外一个过程 $\mathscr{L}_2$, 以及从状态 B 到状态 A 的过程 $\mathscr{L}$. 过程 $\mathscr{L}_1\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}_2\mathscr{L}$ 组成封闭的循环, 所以从能量守恒定律立刻可知

$$A^{(e)} + Q^* = \int\limits_{\mathscr{L}_1} (P_i + Q_i)\,\mathrm{d}\mu^i = \int\limits_{\mathscr{L}_2} (P_i + Q_i)\,\mathrm{d}\mu^i = -\int\limits_{\mathscr{L}} (P_i + Q_i)\,\mathrm{d}\mu^i.$$

系统的总能量

因此, 若系统的初态 A 是固定的, 则对于所有可实现的过程来说, 从外部进入系统的总能量流只与系统的终态有关, 即

$$A^{(e)} + Q^* = \mathscr{E}(\mu^1, \cdots, \mu^n) - \mathscr{E}(\mu_0^1, \cdots, \mu_0^n),$$

式中 $\mathscr{E}$ 为系统状态参量的单值函数, 称为系统的总能量. 所以由热力学第一定律可

知, 存在一个状态函数 $\mathscr{E}(\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^n)$, 其全微分对于可实现的过程来说等于宏观的外质量力和外面力的元功 $\mathrm{d}A^{(e)}$ 与从外部进入系统的其他形式的元能量流之和:

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = \mathrm{d}A^{(e)} + \mathrm{d}Q^* = (P_i + Q_i)\,\mathrm{d}\mu^i. \tag{2.11}$$

容易看到, 在确定系统的总能量 $\mathscr{E}(\mu^1, \cdots, \mu^n)$ 时会相差一个常量—— $\mathscr{E}$ 在系统初态的值.

若已知进入一个系统的外部能量流, 则热力学第一定律 (2.10) 可以作为确定系统总能量 $\mathscr{E}$ 的基础. 相反, 若通过某种途径知道了总能量, 则能量守恒定律可以用来说明所研究的微元与外部物体相互作用的机理, 即用来确定 $\mathrm{d}A^{(e)} + \mathrm{d}Q^*$.

为了确定系统的总能量 $\mathscr{E}(\mu^1, \cdots, \mu^n)$, 一般而言需要知道函数 P_i 和 Q_i. 根据式 (2.11), P_i 和 Q_i 不可能是状态参量的任意函数.

事实上, 把 (2.11) 改写为以下形式:

$$\left(P_i + Q_i - \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \mu^i}\right)\mathrm{d}\mu^i = 0. \tag{2.12}$$

若系统是完整的, 即所有 $\mathrm{d}\mu^1, \mathrm{d}\mu^2, \cdots, \mathrm{d}\mu^n$ 都是独立的 (例如参量 μ^i 中没有对时间的连续若干阶导数), 则从 (2.11) 可知 $P_i + Q_i = \partial\mathscr{E}/\partial\mu^i$, 因此 $P_i + Q_i$ 应满足可积条件

$$\frac{\partial(P_i + Q_i)}{\partial \mu^k} = \frac{\partial(P_k + Q_k)}{\partial \mu^i}. \tag{2.13}$$

对非完整系统可以写出

$$P_i + Q_i = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \mu^i} + R_i.$$

对于所有满足热力学第一定律的过程, 量 R_i 应当满足等式

$$R_i\,\mathrm{d}\mu^i = 0, \tag{2.14}$$

即对于所有可实现的过程, R_i 在能量平衡中并无贡献. 不过, R_i 本身可能不等于零. 对于某些重要的情况, 可以指出[1] 满足条件 (2.14) 的函数 R_i 的一般形式.

对于非完整系统中可实现的过程, 应当成立以下条件来取代条件 (2.13):

$$\frac{\partial(P_i + Q_i - R_i)}{\partial \mu^k} = \frac{\partial(P_k + Q_k - R_k)}{\partial \mu^i}, \quad R_i\,\mathrm{d}\mu^i = 0. \tag{2.15}$$

我们指出, 因为式 (2.13) 或 (2.15) 是对于可实现的过程而言存在满足式 (2.11) 的函数 $\mathscr{E}(\mu^1, \cdots, \mu^n)$ 的充分必要条件, 所以它们也可以视为能量守恒定律可能的表述之一.

条件 (2.13) 或者可以在确定 $P_i + Q_i$ 时用来检验实验结果, 或者可以用来减少实验测量的次数. 在后一情况中, $P_i + Q_i$ 中的某些量通过实验确定, 其他量则按照

[1] 见: Sedov L. I. Some problems of designing new models of continuous media. Proceedings of 11th Congress of Applied and Theoretical Mechanics, Munich, 1964. Berlin: Springer, 1966. 9—19 页.

(2.13) 计算出来.

系统的内能 前面引入了函数 $v^2/2$——介质的动能密度. 一般而言, $v^2\rho\,\mathrm{d}\tau/2$ 并不等于函数 $\mathscr{E}$——微元的总能量. 令[1)]

$$\mathscr{E}=\left(\frac{v^2}{2}+U\right)\rho\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.16}$$

式中 U 是状态参量的标量函数, 称为内能密度, 或质量内能, 或比内能, 即单位质量的内能[2)]. 就像系统的总能量 $\mathscr{E}$ 那样, 质量内能 U 只会确定到相差一个常量, 并且对于每个热力学系统都存在内能.

如果可以认为空间和时间是均匀的, 质量内能 U 就不显式地依赖于空间和时间坐标. 均匀性的含义是, 在空间的所有点和所有的时刻, 所给热力学系统中的过程在相同的外部条件下都以相同的方式进行.

总能量与内能既可以对整个物体引入, 也可以对其单独的各部分引入. 物体的有限的一部分或整个物体, 其内能一般而言不具有可加性, 即整个物体的内能不等于组成该物体的各部分的内能之和.

例如, 如果考虑与表面张力有关的能量, 则当其他条件相同 (温度等相同) 时, 两个小水滴的内能并不等于质量为两个小水滴质量之和的一个大水滴的内能[3)] [4)]. 物体各部分之间按照万有引力定律而相互吸引, 显然, 与此有关的内能也是不可加的.

但是, 在许多情况下可以认为内能是可加的, 例如, 不必考虑表面张力的水或者满足胡克定律的弹性体就是如此. 若内能是可加的, 则任意有限物质体 V 的总能量由以下公式定义:

$$\mathscr{E}=\int\limits_V \rho\left(\frac{v^2}{2}+U\right)\mathrm{d}\tau.$$

下面的讨论基本上是对介质微元进行的, 所以无论内能是否具有可加性, 这些讨论都成立.

我们指出, 内能的概念以及热力学的所有其他关系式和概念在研究连续介质运

---

1) 对于混合物, 应令

$$\mathscr{E}=\left[\frac{v^2}{2}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\rho_k(\boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{v})^2}{2\rho}+U\right]\rho\,\mathrm{d}\tau.$$

参见: Woods L. C. The Thermodynamics of Fluid Systems. Oxford: Clarendon Press, 1975 (第九章 §53). 不过, 在包括本书在内的许多文献中仍然采用 (2.16) 来定义内能, 这相当于认为扩散动能包含在内能之中或者可以忽略. ——译注

2) 国家标准按 ISO 国际标准将内能改为热力学能 (thermodynamic energy), 以强调它完全是从热力学角度宏观分析系统与外部环境之间的功与热的关系而提出的. ——译注

3) 这里预先对以下一些可能出现混淆的地方进行说明是有益的. 如果考虑原本分开的具有相同温度的两个液滴缓慢融合为一个液滴的自发过程, 则根据能量守恒定律, 一个静止的大液滴的内能自然将等于原先静止的两个小液滴的内能之和. 然而, 此时一个大液滴的温度将高于两个小液滴在融合前的温度.

4) 注意质量内能 U 无法描述与表面张力有关的内能 (表面能). ——译注

动的一般情况下是必须的, 但也存在连续介质的一些个别例子, 例如在第四章中所列举的, 这时并不需要内能的概念来封闭描述连续运动的方程组. 在研究理想不可压缩流体的机械运动时, 并不需要以显式的形式给出内能的概念. 在弹性体理论中, 如果不考虑热效应的话, 没有这个概念也是可以的.

能量守恒定律的方程 这样, 表达能量守恒定律的普适关系式可表示为:

$$\mathrm{d}E + \mathrm{d}U_m = \mathrm{d}A^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}Q^{**}, \qquad (2.17)$$

式中 $\mathrm{d}U_m$ 为所研究的物体的内能的变化, $\mathrm{d}E$ 为其动能的变化, $\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})}$ 为宏观外力的元功, $\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}$ 为从外部进入物体的元热流, $\mathrm{d}Q^{**}$ 为从外部进入物体的其他一些形式的元能量流, 它既不同于宏观机械力的功, 也不同于热.

热流方程 把上述关系式与表达连续介质动能定理的等式 (1.6) 相减, 得方程

$$\mathrm{d}U_m = -\mathrm{d}A^{(\mathrm{i})} + \mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}Q^{**}, \quad 或 \quad \mathrm{d}U_m = -\mathrm{d}A^{(\mathrm{i})} + \mathrm{d}Q^{*}, \qquad (2.18)$$

它称为热流方程. 这个方程可以代替能量守恒定律.

如果一个过程非常平稳, 以至于加速度可以忽略, 则 $\mathrm{d}E = 0$, 所以, 对于这样的过程, 可以认为外力的功与内力的功大小相等而符号相反:

$$\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})} = -\mathrm{d}A^{(\mathrm{i})}.$$

因此, 对于这样的过程, 例如准静态过程[1], 热流方程还可以写为以下形式:

$$\mathrm{d}U_m = \mathrm{d}A^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}Q^{*}.$$

热流微分方程 既然对于通过想象取出的任何连续介质物质体都可以写出热流方程 (2.18), 现在我们就对连续介质微元写出该方程. 对于质量内能 U, 有 (假设极限存在)

$$U = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{U_{\Delta m}}{\Delta m},$$

对微元则有 $\mathrm{d}U_{\Delta m} = \Delta m\,\mathrm{d}U$. 类似地引入进入单位质量介质的能量流[2]

$$\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{\Delta m}, \quad \mathrm{d}q^{**} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\mathrm{d}Q^{**}}{\Delta m}.$$

用 Δm 除 (2.18) 并让 Δm 趋于零, 再考虑到内面力的功的密度等于 $-\dfrac{1}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i \,\mathrm{d}t$, 我们把热流微分方程写为

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i \,\mathrm{d}t + \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}q^{**}. \qquad (2.19)$$

---

[1] 准静态过程 (квазистатический процесс) 与平衡过程 (равновесный процесс) 是同一个概念, 其定义见本章 §3. ——译注

[2] 原文在这里使用记号 $\mathrm{d}q$, 但后面有时使用 $\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}$, 所以译文统一使用记号 $\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}$ 来表示进入单位质量的介质的外部热流. 需要强调的是, 对介质微元而言, 外部热流也包括来自相邻介质微元的热流, 因为所有相邻的介质微元这时都属于外部对象. ——译注

由变形理论可知[1], 应变率张量的分量表示为

$$\hat{e}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{\nabla}_j \hat{v}_i + \hat{\nabla}_i \hat{v}_j) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\hat{g}_{ij}}{\mathrm{d}t},$$

并且如果初始状态的度规 $\mathring{g}_{ij}$ 与时间无关, 则 $\hat{e}_{ij}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\hat{\varepsilon}_{ij}$, 此时应变张量分量的微分是在随体坐标系中确定的. 所以, 热流方程在 $p^{ij} = p^{ji}$ 时可以具有形式

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{\rho}\hat{p}^{ij}\mathrm{d}\hat{\varepsilon}_{ij} + \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}q^{**}. \tag{2.20}$$

在随体坐标系中确定的应变张量分量的微分 $\mathrm{d}\hat{\varepsilon}_{ij}$ 也像应变张量的分量 $\hat{\varepsilon}_{ij}$ 本身那样可以在任何任意的坐标系中进行研究. 我们把张量 $\mathrm{d}\hat{\varepsilon}_{ij}$ 在任意坐标系中的分量记为 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = e_{ij}\,\mathrm{d}t$. 在任意坐标系 (非随体坐标系) 中, 这样引入的分量 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$ 将不是应变张量在此坐标系中的分量 ε_{ij} 的微分. 注意到这一点后, 方程 (2.20) 在任意坐标系中就可以写为

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{\rho}p^{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} + \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}q^{**}, \tag{2.21}$$

式中 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = e_{ij}\,\mathrm{d}t$. 对于连续介质各种运动的每一个状态, 量 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$ 以及 $\mathrm{d}U$, $\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}$ 和 $\mathrm{d}q^{**}$ 所依赖的那些主定参量的增量在已知的限度内能够任意取值. 这是因为, 方程 (2.21) 不含外质量力, 也不显式地依赖于边界条件和其他外部条件, 而这些条件可能是各种各样的, 它们对方程 (2.21) 中的主定参量的增量有巨大影响. 与此同时, 方程 (2.21) 是对所有可能的过程都成立的一个普适方程.

在所有可能的过程中, 相应主定参量的微分是线性无关的, 与此相关的这种任意性可以用来从 (2.21) 这一个方程得出若干个状态方程类型的方程.

§3. 热力学平衡 · 可逆过程和不可逆过程

热力学平衡 众所周知, 我们可以研究刚体的平衡. 我们说, 一个物体相对于所用参考系处于力学平衡态, 如果它在所有外部条件都保持不变时能够永远处于这个状态. 一个系统的热力学平衡态是指这样的状态, 这时系统内部状态的所有特征量 (包括力学特征量) 在外部条件不变且没有外部能量流和质量流时能够任意长久地保持不变的值. 在状态空间中, 热力学平衡态表示为一个点. 对于系统的一个微小部分来说, 热力学平衡态与存在温度这一特征量有重要的联系.

此外还应当附加说明的是, 还存在许多与非平衡态的描述有关的参量 (弛豫时间[2], 混合物中的激发态浓度, 混合物组元的各种"温度", 等等), 它们对平衡态来说不在重要参量之列. 如果主定参量中有对时间的随体导数, 则这些参量在平衡态下等于零. 定义平衡态的条件应当只包含表征该状态的那些参量.

---

[1] 参见第二章 §6.

[2] 处于热力学平衡态的系统受到外界瞬时无穷小扰动后, 经过一定时间必能回到原来的平衡态, 系统所经历的这一段时间称为弛豫时间. ——译注

有可能出现这样的情况：一个物体在整体上并不平衡，但它的一些部分却处于平衡态.

平衡过程和非平衡过程

热力学过程既可能进行得很快，也可能进行得很慢. 可以研究这样一种极限情况，这时过程进行得如此之慢，以至于其中所有参量的变化率都是无穷小量. 在状态空间中，这样的过程表示为每个点都是平衡点的曲线. 每一个中间状态都是平衡态的无限缓慢的过程称为平衡过程. 在描述平衡过程的关系式中，参量变化率的值是无关紧要的，但是主定参量的变化方向在一个平衡过程中可能非常重要.

以有限的速度进行的过程 (如果速度对物理关系有影响) 称为非平衡过程.

当我们说一个系统正在完成某个过程的时候，我们的意思是一个确定的物质对象的状态参量正在发生变化，即我们在使用拉格朗日观点. 显然，在介质运动时，平衡过程和定常过程的定义一般是不同的. 一个过程可能既是定常的，同时又是非平衡的，即系统的所有状态参量在几何空间的给定点不随时间而变化 ($\partial\mu^i/\partial t = 0$)，同时系统具有对介质微元中的过程产生影响的有限的参量变化率 ($\mathrm{d}\mu^k/\mathrm{d}t \neq 0$).

可逆过程和不可逆过程

从某个状态 A 向状态 B 进行的过程称为可逆的，如果对于每个中间状态，诸参量的无穷小增量的所有方程在这些增量改变符号后仍然成立. 因此，如果某一系列状态在状态空间中组成可逆过程，则系统沿正向和逆向都可以经历这一系列状态，并且每一小段路径所对应的外部能量流 $\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})}$, $\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}$ 和 $\mathrm{d}Q^{**}$ 在正向和逆向过程中只是符号不同而已. 如果一个过程不具有这样的性质，它就称为不可逆的.

我们指出，在不可逆过程的主定参量中，表征某些主定参量的变化方向的那些量非常重要，而热力学参量的变化方向对可逆过程则是不重要的. 通常会研究一些同时是平衡过程的可逆过程[1)]，但是也可以研究那些不是由热力学平衡态组成的可逆过程.

现象的可逆性与不可逆性的概念具有重大价值，在自然科学中得到广泛应用. 这些概念的特点突出而且重要，各种各样的微观和宏观现象中的流变学定律和其他一些物理学定律的本质都是由这些特点决定的.

容易看出，在质点系的分析力学中，系统的所有运动都是可逆的，这时只要把速度方向变为相反方向，所有作用力就都不发生变化. 例如，当所有作用力只依赖于系统物质点的坐标时，就会出现这种情况. 如果运动可逆，则系统的所有点都能够沿着

---

1) 平衡过程与可逆过程的概念在一般情况下是不同的. 然而，无限缓慢的平衡过程可以视为可逆的，如果在主定参量之间的有限关系式中，不但速度不重要，而且主定参量的变化方向也根本不重要 (它们不是重要因素).

另一方面，对于系统整体而言，不可逆过程的一个例子可以是在静止介质中由热传导引起的定常热交换，这时所有介质微元的状态可以视为平衡的. 尽管这时有温度梯度，而这正是非平衡态的特征，但是在物理上无穷小的微元中，温度沿空间的变化量相对于温度本身来说一般很小，所以可以忽略不计，就像在建立模型时一般忽略掉我们认为不重要的各种影响那样.

自己同样的轨迹以同样大小的速度正向和逆向运动.

例如, 天体运动在只考虑牛顿万有引力时就是可逆现象. 在微分方程组的柯西问题中, 如果保持所有天体的初始位置和初始速度的大小不变, 而仅仅把速度方向变为相反方向, 我们将得出, 在问题的解中, 过去与将来调换了位置.

在所研究的宏观系统中, 如果作用力和相互作用特别依赖于状态参量变化率的方向 (例如摩擦力), 相应现象就是不可逆的.

我们强调, 可逆和不可逆现象都有可能由物质微元的一系列非平衡或平衡态组成. 以后将通过在具体的连续介质模型中出现的一些现象来说明这个结论.

我们还指出, 对于有限大小的物体, 现象在整体上的不可逆性可以与组成该物体的所有物理上无穷小的微元中的可逆过程同时存在.

严格地讲, 宏观尺度下的所有真实过程都是以有限的速度进行的, 其方向非常重要, 所以它们其实都是不可逆的, 但是在应用中可以把许多过程当作是热力学可逆的.

从实践观点和理论观点来看, 在许多应用中可以利用可逆过程来建立实际现象的模型.

可以在应用中当作可逆过程的一个例子

例如研究表明, 有时甚至连气体微元从火箭发动机喷口喷出这种高速进行的过程也可以大致认为是可逆的, 这时, 气体微元在千分之几秒量级的时间内就从它们在火箭发动机燃烧室中实际上处于静止而压强达 70 atm 量级的状态, 变化到在自由空间中以 $3000\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 量级的速度运动但压强基本为零的状态. 当火箭在高空飞行时, 正在工作的火箭发动机中的气体就是这样运动. 在这个过程中, 温度不同的气体微元之间来不及进行热量交换, 但是微元的热力学特征变量之间的关系实际上与平衡态下的情况是相同的.

平衡态与最概然态

考虑作为分子微观运动相应特征量的统计平均值而引入的某一组宏观状态参量, 例如温度 T 和密度 ρ. 显然, T 和 ρ 的每个具体值可以对应微观运动特征量的许多种分布. 结果表明, 宏观参量的平衡值对应着可能的不同微观状态的最大数目. 所以, 如果让一个热力学系统自然演化, 则在它可能达到的所有状态中, 平衡态是最概然态. 因此, 所有孤立系统或者已经处于平衡态, 或者趋于平衡态.

微观特征量, 平均量的概率和不可逆性

我们还指出, 所有已知的描述基本粒子的运动和相互作用的微观定律, 例如牛顿万有引力定律和基本相互作用定律, 都是可逆的. 不可逆性只是因为对大量粒子才成立的一些统计定律而出现的. 我们能够引入一个简单系统来替代粒子数目巨大的复杂系统 (一般而言只是近似地知道其相互作用定律和初始条件), 且该简单系统仅由数目不多的与最概然态有关的一些宏观特征量来描述, 不可逆性仿佛正是为这种可能性付出的一种代价.

因为在实际上很小的区域内有大量粒子, 所以概率分布具有非常陡的峰, 这表

示有可能使平均量只取完全确定的值.

在不可逆过程中, 概率分布本身一般与时间有关.

温度的概念 温度是物体状态的基本特征量之一. 在我们的日常生活中, 对物体温度最初的认识直接与感觉联系在一起. 我们说物体 A 的温度比物体 B 高 ($T_A > T_B$), 如果在物体 A 与物体 B 接触时热量必然会从物体 A 传向物体 B. 若处于热力学平衡的两个物体接触后不出现热流, 则它们具有相同的温度. 由实验可知, 如果使任意两个物体 A 和 B 接触, 然后让这个系统自然演化, 则其中发生的过程将以物体 A 和 B 的温度相等为结果. 根据这一事实, 我们能够制造出温度计——可以用来在数量上测量温度的一种仪器, 它有某种温标, 例如摄氏温标的特征点是水在 1 atm 下的沸点和凝固点.

在分析力学中, 温度的概念对自由度不大的系统是没有意义的. 在实践中可以认为, 凡由大量粒子组成的各种物体都具有温度.

与质点和刚体力学不同的是, 在连续介质力学中一般而言不能回避温度的概念. 因为在热流方程和能量守恒定律中都有外部热流 $dq^{(e)}$ 的表达式, 所以必须研究热量传递的机理, 从而必须引入温度的概念. 尽管对温度这一概念的详细而深入的研究涉及对分子动理论的研究, 但是应当指出, 在科学中很早就已经有了关于温度及其测量方法的相当完善的概念, 这是独立于统计物理学中对温度的深刻理解而出现的.

我们将在 §5 中阐述一个优美的热力学宏观理论, 该理论以热力学第二定律为基础, 对物体的热力学平衡态给出了绝对温度的严格定义.

由分子动理论可知, 温度 T 可以引入为正比于分子的无规运动在一个自由度上的平均能量的一个量. 如果不同种类的基本粒子具有不同的平均能量, 或者, 如果同类粒子在不同自由度上具有不同的平均能量, 则在进行得足够慢的过程中, 粒子的相互作用将使这些平均能量相同. 而在明显表现出非平衡性的过程中, 宏观微元内部不同种类的粒子之间来不及进行能量的统计平衡, 所以宏观微元的整体温度的概念就失去其基本意义了.

在非平衡的情况下, 一种介质有时可以有几个温度, 例如分子的振动温度、旋转温度和平动温度, 它们分别对应着相应的振动、旋转和平动自由度, 又如等离子体的离子温度和电子温度, 如果离子和电子分别处于平衡态, 等等.

当一个物体的很小的部分达到热力学平衡时, 其局部微元的温度是单值确定的. 然而即便在这种情况下, 温度的概念对有限大小的物体也可能是没有意义的, 如果物体的不同部分之间没有达到热平衡.

例如, 怎样理解地球的温度呢? 在不同时刻可以讨论热带、温带、极地乃至地球中心的温度, 但是地球整体的温度是难以定义的, 即使定义出来通常也毫无用处.

人们通常考虑物体中一些足够小的部分的温度并研究物体内的热流. 实验表明, 在许多实际问题中经常可以假设系统内体积很小的局部区域是热力学平衡的[1]. 在

[1] 这个假设通常称为局域平衡假设. ——译注

应用中, 导致非平衡性和不可逆性的原因经常仅仅是物体的体积较大, 这时温度和其他一些热力学特征量 (如混合物化学组元的浓度等) 按照物体微元的分布是不平衡的.

§4. 双参量介质 · 完全气体 · 卡诺循环

一种介质, 若其所有热力学函数只依赖于 2 个热力学状态参量, 我们就称之为双参量介质. 如果这 2 个参量是压强 p 和密度 ρ, 则该介质的质量内能应当通过它们表示为 $U = U(p, \rho)$.

理想气体的热流方程 若介质是理想可压缩流体 (气体), 则内面力的功与质量之比具有 (1.7) 的形式:

$$\frac{1}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}A_{\Sigma}^{(\mathrm{i})} = p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho},$$

而热流方程在 $\mathrm{d}q^{**} = 0$ 的假设下写为以下形式:

$$\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} = \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}. \tag{4.1}$$

完全气体的状态方程 在完全气体中, 密度与温度由克拉珀龙方程联系起来:

$$p = \rho R T, \tag{4.2}$$

式中 R 为某个常量, 称为气体常量, 它对不同气体是不同的. 像 (4.2) 这种类型的把介质的压强、温度、密度以及其他一些可能的特征量联系在一起的方程称为状态方程. 对于空气

$$R = 287.042\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}.$$

可以由以下等式引入 (对所有气体都相同的) 普适气体常量 R_0 与玻尔兹曼常量 k:

$$R = \frac{R_0}{\mathscr{M}} = \frac{k}{m},$$

式中 m 为分子的平均质量, $\mathscr{M}$ 为气体的平均摩尔质量, 它由以下公式确定:

$$n\mathscr{M} = n_1 M_1 + n_2 M_2 + \cdots + n_N M_N = \sum_{i=1}^{N} n_i M_i,$$

式中 n 为给定区域中由 N 个组元组成的混合物的物质的量, n_i 和 M_i 分别是单独种类气体的物质的量和摩尔质量,

$$R_0 = 8.3144\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}, \quad k = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1}.$$

完全气体的内能 完全气体可以定义为分子只在碰撞时才相互作用的气体, 所以可以认为, 单原子完全气体的内能就是诸原子无规运动的动能之和.

对于质量内能 U 可以写出

$$U = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2} + \text{const}$$

(M 是诸原子的总质量, m_i 是单个原子的质量, v_i 是单个原子相对于它们总的质心的速度, N 是所考虑的微小区域中的原子数目). 如果认为气体的所有原子均相同, 则 $M = Nm$, 于是

$$U = \frac{v_{\text{mean}}^2}{2} + \text{const},$$

式中 v_{mean}^2 为原子在无规运动中的速度的平方的平均值. 温度是作为原子的无规则热运动在一个自由度上的平均能量的特征量而定义的, 由此可把质量内能 U 表示为

$$U = c_V T + \text{const}, \tag{4.3}$$

式中 c_V 表示 $v_{\text{mean}}^2/2$ 与 T 之间的有量纲的比例系数.

以 (4.3) 的形式给出内能[1] U, 再加上克拉珀龙方程, 这就固定了一个确定的连续介质模型, 即所谓完全气体. 与实验数据的对比表明, 这个模型足够好地描述了实际气体在通常条件下的运动.

定容热容, 定压热容与迈耶公式

对于理想的完全气体中的定容过程 ($\mathrm{d}(1/\rho) = 0$), 由热流方程 (4.1) 易得 $(\mathrm{d}q^{(e)})_{V=\text{const}} = \mathrm{d}U = c_V \mathrm{d}T$, 或

$$\left(\frac{\mathrm{d}q^{(e)}}{\mathrm{d}T}\right)_{V=\text{const}} = c_V,$$

即 c_V 是在体积保持不变时使单位质量介质的温度升高 1 °C 所必须的热量, 所以 c_V 称为质量定容热容[2].

对于理想的完全气体中的定压过程, 从热流方程得

$$(\mathrm{d}q^{(e)})_{p=\text{const}} = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} = c_V \mathrm{d}T + \mathrm{d}\frac{p}{\rho} = (c_V + R)\,\mathrm{d}T. \tag{4.4}$$

在压强保持不变时使单位质量介质的温度升高 1 °C 所必须的热量称为质量定压热容, 用 c_p 表示:

$$c_p = \left(\frac{\mathrm{d}q^{(e)}}{\mathrm{d}T}\right)_{p=\text{const}}.$$

所以, 从 (4.4) 可得以下公式:

$$c_p - c_V = R. \tag{4.5}$$

此公式称为迈耶公式, 它把完全气体的定压热容、定容热容和气体常量 R 联系起来.

---

[1] 文中经常省略“质量”二字, 如质量内能简称为内能. ——译注

[2] 如果粒子在碰撞时其数目发生变化, 则公式 (4.3) 可改为 $U = \int c_V(T)\,\mathrm{d}T$.

热流方程在一般情况下含有外部热流 $\mathrm{d}q^{(e)}$. 在某些情况下, 热流方程可以用来确定所需要的或者所产生的热流, 只要连续介质的运动和状态序列已经给出. 在求解介质的运动和状态的题目中, 必须有用于确定外部热流规律的有关结果.

向介质输送热量的物理机理

吸收或者释放热量可能是由不同的物理现象决定的. 在应用中最重要的一些输送热量的物理机理如下:

一、热传导. 这是介质中直接接触的部分之间进行热量交换的现象, 是因为组成介质的分子、原子、电子和其他粒子在热运动过程中进行力学相互作用和碰撞而产生的. 因热传导而发生的热量传递与温度在物体中的宏观分布不平衡有非常密切的关系.

二、热辐射与辐射的吸收. 这是因为组成介质的基本粒子 (分子、原子、电子等) 的可能状态发生变化而导致的一种现象.

三、电的一些耗散过程所引起的热量释放, 例如电流通过时在物体内释放出的焦耳热.

利用热流方程以及热流的规律来解决具体问题, 这在数学上通常是很困难的. 在应用中经常采用一些额外的假设, 例如下述理想过程得到了广泛的应用.

绝热过程

(1) 没有外部热流, 且相邻微元之间也没有热交换 (即 $\mathrm{d}q^{(e)} = 0$) 的过程. 这样的理想过程称为绝热过程. 研究与外部热环境隔绝的物体, 或者研究高速发生 (但有时仍然可逆) 以至于热交换来不及明显表现出来的过程, 都关系到绝热过程的概念.

等温过程

(2) 另外一个例子可以是这样的理想过程, 其中因热传导或辐射而发生的热交换如此强烈, 而状态的改变又如此缓慢, 以至于系统所有组成部分的温度都可以认为是不变的. 这样的过程称为等温过程.

等温过程的方程具有以下形式:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0.$$

该方程与介质的状态方程一起可代替热流方程, 一般而言, 这大大简化了从理论上求解介质运动的问题. 此时, 可以从热流方程计算应当向介质的每个微元输送多少热量 $\mathrm{d}Q^{(e)}$ 才能实现等温过程.

我们指出, 条件 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = 0$ 表示温度仅在介质的每一物质微元中不随时间变化, 此时不同物质微元的温度可能是不同的. 不过, 说到等温过程, 人们也经常假设温度对空间和时间都是不变的, 即 $T = \mathrm{const}$.

最后, 若物质微元的温度可能随时间变化, 但所有微元的温度都相同, 这样的过程有时也称为等温过程. 此时, 为了代替等式 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = 0$, 应假设成立条件

$$\operatorname{grad} T = 0 \quad 或 \quad T = f(t).$$

因为等温过程存在不同的定义, 所以为了避免出现由此可能产生的某种混淆, 对

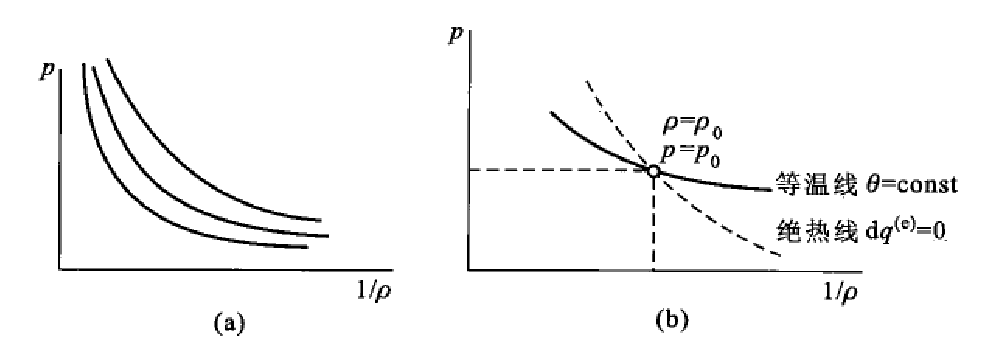


图 30. (a) 完全气体的等温线; (b) 完全气体的等温线与泊松绝热线的相互位置

问题的提法显然应有清晰的理解.

正压过程 (3) 作为限定一种过程的关系式, 对于双参量连续介质可以直接取密度与压强之间的某种关系来代替热流方程. 如果此关系对所有物质微元都相同, 这样的过程就称为正压过程.

多方过程 例如, 一种过程称为多方过程, 如果成立等式

$$p = C\rho^n,$$

式中 n 是一个常数——多方指数, C 是某个常量.

对于给定的关系 $p = f(\rho)$, 利用热流方程易求保障此关系存在的外部热流值.

对于完全气体和多方过程, 当 $n > 1$ 时从热流方程求出

$$dq^{(e)} = dU + C\rho^n d\frac{1}{\rho} = c_V dT - \frac{dRT}{n-1}.$$

因为 R 是常量, 根据迈耶公式 $R = c_p - c_V$, 由此可得一个简单的热流公式:

$$dq^{(e)} = c_V \frac{n - c_p/c_V}{n-1} dT = c^* dT.$$

若 $n > c_p/c_V > 1$, 则温度的提高 $dT > 0$ 关系到热量的吸收. 若 $1 < n < c_p/c_V$, 则当 $dT > 0$ 时 $dq^{(e)} < 0$, 因此温度的提高伴随着热量的释放. 若 $n = c_p/c_V$, 则 $dq^{(e)} = 0$, 即这样的多方过程是绝热过程. 上述性质表示多方指数 n 的物理意义.

完全气体的等温线 考虑由状态参量 p 和 $V = 1/\rho$ 给出的一种双参量介质 (例如完全气体) 的状态空间. 在这样的介质中, 包括温度在内的所有热力学函数都应当是 p 和 $1/\rho$ 的函数. 现在我们将用字母 θ 表示温度,

$$\theta = \theta\left(p, \frac{1}{\rho}\right).$$

我们来研究在这样的介质中进行的等温 ($\theta = \text{const}$) 平衡过程. 在状态空间 $(p, 1/\rho)$ 中作曲线 $\theta = \text{const}$ (等温线, 图 30 (a)).

在完全气体的情况下, 平面 $(p,\ 1/\rho)$ 上的等温线显然是双曲线

$$\frac{p}{\rho} = \text{const}\,. \tag{4.6}$$

我们总是可以从热流方程

$$\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} = \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}$$

来计算等温过程中系统所必须吸收的热流 $\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}$. 对于理想的完全气体, 该热流等于

$$\left(\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}\right)_{\mathrm{isoth}} = p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} = R\theta\rho\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho}.$$

完全气体在等温膨胀时 $\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} > 0$, 在等温压缩时 $\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} < 0$. 对于任意的气体, 平面 $(p, 1/\rho)$ 上等温线的形状取决于状态方程的形式.

我们指出, 例如, 水的沸点与凝固点所对应的点可以位于同一条等温线 $\theta = \text{const}$ 上, 因为水沸腾与凝固的温度取决于压强.

泊松绝热线

容易看出, 热流方程在绝热过程 $(\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} = 0)$ 的情况下具有以下形式:

$$\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} = 0. \tag{4.7}$$

如果已知内能 $U(p, 1/\rho)$, 由此就可以求出在连续的绝热过程中 p 对 ρ 的依赖关系.

对于完全气体, 式 (4.7) 的形式为

$$\frac{c_V}{R}\,\mathrm{d}\frac{p}{\rho} + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} = 0,$$

或者, 若引入比值 $\gamma = c_p/c_V$, 则

$$\frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\rho} + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho}\right) + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} = 0,$$

从而

$$\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p + \gamma p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} = 0.$$

积分后得

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \text{const}\,. \tag{4.8}$$

平面 $(p, 1/\rho)$ 上的这条曲线称为泊松绝热线, 而 $\gamma = c_p/c_V$ 称为绝热线指数或泊松系数[1]. 经过状态平面 $(p, 1/\rho)$ 的每个点 $p_0, 1/\rho_0$ 显然可以引一条等温线 (4.6) 和一条绝热线 (4.8).

完全气体等温线与绝热线的相互位置

现在我们来阐述完全气体的等温线与绝热线在平面 $(p, 1/\rho)$ 的每个点的相互位置是怎样的. 对于经过点 $p_0, 1/\rho_0$ 的等温线上的点, 我们有

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \text{即} \quad \frac{p_{\mathrm{isoth}}}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

[1] 在国家标准中 γ 称为质量热容比. ——译注

沿经过同一点的绝热线, 则有

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_0}{\rho_0^\gamma},\quad 即\quad \frac{p_{\rm ad}}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma.$$

绝热线指数 $\gamma=c_p/c_V>1$, 所以当 $\rho/\rho_0<1$ 时 $p_{\rm isoth}>p_{\rm ad}$, 当 $\rho/\rho_0>1$ 时 $p_{\rm isoth}<p_{\rm ad}$, 即在平面 $(p,\,1/\rho)$ 上的点 $p_0,\,1/\rho_0$ 的右侧, 等温线在绝热线的上方, 而在点 $p_0,\,1/\rho_0$ 的左侧, 等温线在绝热线的下方 (图 30 (b)).

我们指出, 等温线和绝热线的这个性质是对完全气体确立的, 它对许多其它的介质也保持不变. 然而, 例如, 它对温度为 +4 °C 的水却不成立[1].

系统所做的功

我们再次强调, 如果给出关系 $p(\rho)$, 即给出平面 $(p,\,1/\rho)$ 上的一条曲线, 就总可以计算出内力的功 $\int p\,{\rm d}\frac{1}{\rho}$. 这意味着, 对状态平面上的点 A_1 与 B_1 之间的任何过程 $\mathscr{L}_1$ 都可以计算出内力的功 $\int p\,{\rm d}\frac{1}{\rho}$. 但是在无穷缓慢的过程中, 内力的功与外力对系统做的功大小相等而符号相反, 或者, 内力的功等于系统本身对外部物体做的功[2]. 因此, 在平面 $(p,\,1/\rho)$ 上沿路径 $\mathscr{L}_1$ 计算的积分

$$\int\limits_{A_1B_1(\mathscr{L}_1)} p\,{\rm d}\frac{1}{\rho}=\frac{1}{m}A$$

当 $A>0$ 时是热力学系统在平衡过程 $\mathscr{L}_1$ 持续的时间内对外部物体做的功的总和, 或者, 若 $A<0$, 这个积分是外力为了实现过程 $\mathscr{L}_1$ 而应当对系统做的功的总和.

从外部向系统输送的总热流

类似地, 对于任何过程 $\mathscr{L}_1(p=p(1/\rho))$, 如果已经给出介质的内能 $(U=U(p,1/\rho))$, 就可以计算出实现过程 $\mathscr{L}_1$ 所必须的总热流

$$Q^{(\rm e)}=\int\limits_{A_1B_1(\mathscr{L}_1)}{\rm d}Q^{(\rm e)},$$

它是从外部介质向系统输送 (若 $Q^{(\rm e)}>0$) 或者从系统向外部介质释放 (若 $Q^{(\rm e)}<0$) 的热流. 由热流方程,

$$Q^{(\rm e)}=\int\limits_{A_1B_1(\mathscr{L}_1)}\left({\rm d}U+p\,{\rm d}\frac{1}{\rho}\right)m=\int\limits_{A_1}^{B_1}{\rm d}U_m+A=U_{mB_1}-U_{mA_1}+A.$$

---

[1] 对于水, 导数 $\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{\rho}\right)_p$ 在温度高于 +4 °C 时为正, 在温度低于 +4 °C 时为负, 在温度等于 +4 °C 时为零. +4 °C 所对应的等温线与绝热线重合, 而把高于 +4 °C 的等温线与低于 +4 °C 的等温线连接起来的绝热线是不存在的 (例如, 参见: Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика. Статистическая физика и кинетика. Ч. 1. Москва: Наука, 1972. Гл. 1, §17).

[2] 得自力的作用与反作用定律. 这时, 该系统的点和同它发生相互作用的外部系统的点在二者的公共界面上具有相同的位移. 当在这些位移上存在间断时, 总的能量流还将是相同的, 但力的功所对应的能量流一般将是不同的 (关于间断的情况, 参见 298 页, 以及 171 页的例子).

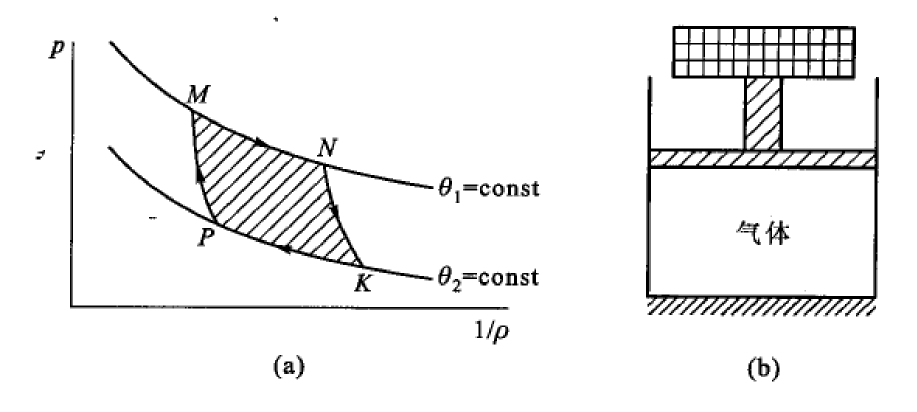


图 31. (a) 卡诺循环; (b) 按照卡诺循环运行的热机

卡诺循环 我们来考虑下面这个封闭且可逆的平衡过程, 这一重要过程称为可逆卡诺循环. 设完成这个循环的工作物或介质是一种完全气体, 或者是由参量 p 和 $1/\rho$ 决定的任何另外一种双参量介质[1]. 气体从状态空间中的任意一点 $M(p_0,\ 1/\rho_0)$ (图 31(a)) 沿等温线 $\theta_1 = \text{const}$ 无穷缓慢地膨胀至状态 N, 然后绝热膨胀至温度为 $\theta_2\ (< \theta_1)$ 的状态 K, 再从 K 等温压缩至状态 P, 最后可以沿绝热线重新返回初始状态 M.

按可逆卡诺循环运转的热机的一个例子 完成卡诺循环的系统称为热机. 例如, 可以通过以下方式在想象中实现这种热机. 取一些温度为 θ_1 的气体放入一个两端封闭的圆柱形容器中, 容器的一端是静止的固壁, 另一端是运动的活塞, 且活塞在初始时刻处于平衡态 (图 31(b)). 首先应使容器中的气体在 $\theta_1 = \text{const}$ 时从 M 膨胀至 N. 为此, 设想容器侧壁与活塞是隔热的, 而导热良好的底部位于一个温度 θ_1 保持不变的加热器——热库之上. 我们将逐渐从活塞卸掉无穷小载荷, 使活塞无穷缓慢地上升, 以便气体的温度 θ 来得及与热库的温度 θ_1 平衡, 从而使气体的温度在活塞上升的所有时间内都等于 θ_1. 此时气体发生膨胀, 气体的压强 p 减小, 体积增加. 用这种方法达到状态 N 后, 我们将容器与热库分开, 并增加一块隔热板覆盖在容器底部, 然后再连续地从活塞卸掉无穷小载荷, 使气体绝热膨胀至状态 K. 此后, 我们重新把容器放到温度 θ_2 保持不变的热库上, 并开始无穷缓慢地增加活塞的载荷, 使气体压缩至状态 P. 这时气体的温度显然有升高的趋势, 但我们利用温度为 θ_2 的物体来降低这个温度, 其作用此时已经不是加热, 而是冷却. 达到状态 P 后, 我们继续无穷缓慢地增加活塞的载荷, 但通过绝热的方式来压缩气体, 直到载荷增加到其初始值, 我们就回到状态 M. 用这种方法组成的卡诺循环不但可以沿一个方向 ($MNKPM$) 进行, 而且可以沿另一个方向 ($MPKNM$) 进行, 它是一个理想化的进行得无穷缓慢的可逆循环.

在一般情况下, 既可以研究可逆循环, 也可以研究不可逆循环. 在可逆卡诺循环

[1] 可以使用等价的量 $V = m/\rho$ 来代替 $1/\rho$, 因为所有讨论都是对物质体 V 进行的, 其质量 m 守恒, 并且在这个例子中认为密度对物质体中的所有点都相同.

的情况下, 它不仅可以向一个方向进行, 还可以向另一个方向进行.

作为热机或制冷机按卡诺循环运转的系统 我们沿全部卡诺循环对热流方程 (4.1) ($\mathrm{d}q^{**}=0$) 进行积分. 因为内能是状态的单值函数, 所以 $\oint \mathrm{d}U=0$, 从而

$$\oint p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho}=\oint \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})},\quad 或\quad A=Q^{(\mathrm{e})}, \tag{4.9}$$

式中 A 是系统因卡诺循环而"输出"的总功, $Q^{(\mathrm{e})}$ 是从外部"进入"系统的总热流.

沿任何封闭的循环运动的双参量介质, 其机械功的密度 A/m 等于 $\oint p\,\mathrm{d}(1/\rho)$, 所以它在数值上显然等于状态平面 $(p,\, 1/\rho)$ 上表示循环过程的曲线所围出的面积, 因而一般而言不为零. 对于所研究的卡诺循环, 功的密度 A/m 等于 $MNKPM$ 的面积. 若循环沿 $MNKPM$ 的方向进行, 则 $A>0$; 若循环沿反方向进行, 则 $A<0$. 如果 $A>0$, 则系统在循环中产生机械功, 根据 (4.9), 应当向系统输入热量 $Q^{(\mathrm{e})}$ 才能得到该机械功. 我们得到按卡诺循环工作的热机, 它从外部吸热并产生机械功. 而如果 $A<0$, 则外力对系统做功, 根据 (4.9), 我们从系统得到热量. 沿绝热段 NK 和 PM 有 $\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}=0$, 系统只在过程沿等温段 MN 和 KP 进行时才与外部介质交换热量.

前面已经证明, 为了实现气体的等温膨胀或者等温压缩, 应当相应地向系统提供热量或者从系统释放热量. 所以, 在气体膨胀的等温段 MN 需要提供热量, 这部分热量记为 Q_1 (>0), 而在压缩段 KP 则需要释放热量 Q_2 (>0), 这等价于提供热量 $-Q_2$ (<0). 因为 NK 和 PM 段是绝热线, 所以, 对于沿顺时针方向进行的卡诺循环完成一周所应提供的热量 $Q^{(\mathrm{e})}$, 得

$$Q^{(\mathrm{e})}=Q_1-Q_2.$$

根据 (4.9) 可以写出

$$A=Q^{(\mathrm{e})}=Q_1-Q_2. \tag{4.10}$$

此时, 完成卡诺循环的系统是热机, 它从高温物体吸取热量 Q_1, 把这些热量的一部分 Q_2 释放给低温物体, 并依靠热量 Q_1-Q_2 产生机械功. 如果卡诺循环沿反方向进行, 则在 PK 段应提供热量 Q_2 (>0), 在 NM 段应提供负的热量 $-Q_1$ (<0). 在反向循环中所提供的总热量 $Q^{(\mathrm{e})}=A_1<0$ (负数), 它由以下等式确定:

$$A_1=Q^{(\mathrm{e})}=Q_2-Q_1<0.$$

此时, 按卡诺循环运转的机器是作为制冷机工作的, 即这个机器从低温热库中吸取热量 Q_2, 并依靠从外部得到的机械功把热量 $Q_1=Q_2-A_1$ 传给高温热库.

§5. 热力学第二定律与熵的概念

我们现在来研究热力学第二定律, 它也像第一定律那样是一个普适的结论, 关于物理现象的机理的所有已知的实验数据和所有理论上的认识都证实了这一结论. 热

力学第二定律表明, 不可能有这样一种循环运转的装置, 它使热量从低温物体 M 传给高温物体 N, 但不给其他物体带来任何变化, 并且这时应认为, 物体 M 和 N 只能与外部装置交换热量[1] (热力学第二定律的第一种表述).

热力学第二定律可以这样来表述: 不可能制造出所谓的第二类永动机, 即按照某种循环运转且符合热力学第一定律的一种机器, 它仅仅依靠从某个温度固定的单一热源吸热而周期性地做功 (第二种表述).

下面将证明, 热力学第二定律的这两种表述是等价的.

我们开始先利用对卡诺循环的研究来得出热力学第二定律的一些重要推论和它在数量上的表述.

卡诺循环的效率 我们来引入按卡诺循环运转的热机的效率 η 的概念. 按照定义, 循环完成后所得机械功 $A\ (>0)$ 与循环进行时向系统提供的热量 $Q_1\ (>0)$ 之比称为卡诺循环的效率 η. 根据 (4.10), 对于卡诺循环的效率成立公式

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1.$$

对卡诺循环得到性质 $\eta < 1$ 是热力学第一定律的推论.

卡诺定理 热力学第二定律的一个绝妙的推论是下面这个关于卡诺循环效率 η 的卡诺定理.

对于任何可逆卡诺循环, η 的值只取决于等温线 MN 和 KP 对应的给定的温度 θ_1 和 θ_2 (图 31), 它与参加卡诺循环的工作物的性质无关 (所以在前面详细分析的例子中可以采用完全气体), 与组成循环的下述方法也无关, 例如与工作物的大小和沿等温线的膨胀程度无关.

我们来证明, η 只与 θ_1 和 θ_2 有关, 它是可逆卡诺循环的一个绝对特征量, 即它是一个普适函数 $\eta(\theta_1,\ \theta_2)$. 与此同时将证明, 如果温度 θ_1 和 θ_2 是固定的, 则按不可逆卡诺过程运转的热机 (即任何按照图 31 (a) 周期性运转的、只从温度 θ_1 和 θ_2 保持不变的热库取热的热机), 其效率 η' 不可能高于按相应可逆卡诺循环运转的热机的效率, 即

$$\eta' \leqslant \eta. \tag{5.1}$$

因此, 卡诺循环的效率在可逆循环中最大, 并且用任何方法都不可能使它等于 1, 因为为了得到机械功 A, 不但需要从环境介质获取热量 Q_1 来组成等温膨胀, 而且必然要把所得热量的一部分 Q_2 释放给环境介质来组成等温压缩.

首先证明结论 (5.1). 为此, 我们假设存在两个卡诺循环: 一个是效率为 η' 的不可逆循环, 另一个是效率为 η 的可逆循环, 并且在这些循环中, 起加热和冷却作用的热库分别具有相同的温度 θ_1 和 θ_2, 且 $\theta_1 > \theta_2$. 假如 $\eta' > \eta$, 我们来证明这一假设与

[1] 如果物体 M 和 N 能够与外部装置交换的不仅仅是热量, 就可以把热量从低温物体传给高温物体而不在其他物体中造成任何变化. 例如, 利用一个按卡诺循环运转的制冷机就可以实现这个过程, 它把物体 M 和 N 当作热库, 所需机械能也从物体 M 和 N 获取.

热力学第二定律矛盾. 其实, 让效率为 η' 的热机正方向运转, 从而产生机械功 A', 让第二个 (可逆) 热机反方向运转, 即把它用作制冷机. 那么, 对效率为 η' 的热机有 $Q'_1 > 0$, $Q'_2 > 0$, 且 $A' = Q'_1 - Q'_2 > 0$, 对效率为 η 的热机则有 $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$, 且 $A = Q_2 - Q_1 < 0$ ($-A$ (> 0) 是对制冷机做的功).

我们这样来选取可逆卡诺循环, 使等式 $-A = A'$ 成立[1], 即 $Q'_1 - Q'_2 = Q_1 - Q_2$, 然后把这两个机器连接起来. 我们得到一个这样的热机:

$$A_0 = A' + A = Q'_1 + Q_2 - Q_1 - Q'_2 = 0.$$

该组合热机所产生的唯一效果是作为高温和低温热库的物体之间的热量传递.

热量 $Q_1 - Q'_1 = Q_2 - Q'_2$ 取自其中一个物体, 又传给另一个物体. 我们所选取的可逆循环和不可逆循环满足 $|A| = A'$, 所以 $\eta Q_1 = \eta' Q'_1$. 由此可知, 从假设 $\eta' > \eta$ 推出不等式

$$Q'_1 < Q_1, \quad \text{或} \quad Q_1 - Q'_1 = Q_2 - Q'_2 > 0.$$

大于零的量 $Q_2 - Q'_2$ 等于取自温度为 θ_2 的热库的总热量, 而与之相等的同样大于零的量 $Q_1 - Q'_1$ 等于传给具有更高温度 θ_1 ($> \theta_2$) 的热库的热量. 于是, 组合热机不消耗外部能量就使热量从低温热库传给高温热库, 但根据热力学第二定律的第一种表述, 这是不可能的.

因此, 我们所做的假设 $\eta' > \eta$ 与热力学第二定律矛盾, 该假设不应成立, 从而只允许以下可能性:

$$\eta' < \eta \quad \text{或} \quad \eta' = \eta. \tag{5.2}$$

如果效率为 η' 的热机也是可逆的, 那么, 在上述讨论中交换 η' 与 η 的位置, 得

$$\eta < \eta' \quad \text{或} \quad \eta' = \eta. \tag{5.3}$$

式 (5.2) 与 (5.3) 仅在以下条件下才相容:

$$\eta' = \eta.$$

这就证明, 任何两个可逆卡诺循环在 θ_1 和 θ_2 分别相同时效率也相同. 如果效率为 η' 的热机是不可逆的, 就不能让该热机反方向运转从而给出上述结果, 所以不能这样来证明式 (5.3).

因此, 如果效率为 η' 的循环是不可逆的, 则一般成立不等式

$$\eta' < \eta.$$

效率 η 表征在热机运转时高温物体所提供的热量 Q_1 的利用率; 在这些热量中, 仅有量 η 所决定的那一部分被热机转化为机械功. 可逆热机是最合算的, 因为对不可逆

[1] 通过简单地选取工作物的尺寸, 总能够这样选取具有相同效率 η 的可逆热机, 因为在我们所研究的情况中, 功和热的值与工作物的质量成正比.

热机而言, 一般 $\eta' < \eta$. 从这个意义上讲, 在被消耗的能量中, 有一部分是因为不可逆性而额外损失掉的.

在证明所有可逆卡诺循环的效率相同时, 我们既没有用到工作物的性质, 也没有用到循环的个别性质. 因此, 可逆卡诺循环的效率与工作物的性质和膨胀程度无关, 它仅依赖于 θ_1 和 θ_2, 是一个普适函数 $\eta = \eta(\theta_1,\ \theta_2)$.

现在, 我们来求出这个普适函数 $\eta(\theta_1,\ \theta_2)$. 由卡诺循环效率的定义, 有

$$\eta(\theta_1,\ \theta_2) = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

引入如下函数来代替 $\eta(\theta_1,\ \theta_2)$:

$$f(\theta_1,\ \theta_2) = 1 - \eta(\theta_1,\ \theta_2),$$

即

$$f(\theta_1,\ \theta_2) = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

我们来得出 $f(\theta_1,\ \theta_2)$ 的函数方程. 为此, 考虑温度为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的 3 个高热容物体[1] 和 3 个可逆卡诺循环, 并且这些物体就是其中的高温和低温热库. 显然,

$$f(\theta_1,\ \theta_2) = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_3}\frac{Q_3}{Q_1} = f(\theta_3,\ \theta_2) f(\theta_1,\ \theta_3), \tag{5.4}$$

式中, 例如对于高温热库温度为 θ_3 而低温热库温度为 θ_2 的卡诺循环, $f(\theta_3,\ \theta_2) = 1 - \eta(\theta_3,\ \theta_2)$, 等等. 我们指出, 函数自变量的顺序非常重要, 第一个自变量总是所研究的卡诺循环的高温热库的温度, 第二个自变量则总是低温热库的温度.

当 $\theta_1 = \theta_2$ 时, 方程 (5.4) 归结为以下条件:

$$1 = f(\theta_3,\ \theta_1) f(\theta_1,\ \theta_3),$$

即, 当自变量交换位置后, 函数 f 变为 $1/f$. 利用函数 f 的这个性质, 从方程 (5.4) 得

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(\theta_1,\ \theta_2) = \frac{f(\theta_3,\ \theta_2)}{f(\theta_3,\ \theta_1)}. \tag{5.5}$$

比值 Q_2/Q_1 与 θ_3 无关, 它仅依赖于温度 θ_1 和 θ_2 的值. 因为对于所有可能的 θ_1 和 θ_2 来说 θ_3 可以认为是常量, 所以函数方程 (5.5) 的解具有以下形式:

$$f(\theta_1,\ \theta_2) = \frac{\omega(\theta_2)}{\omega(\theta_1)}.$$

因此,

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\omega(\theta_2)}{\omega(\theta_1)}.$$

[1] 这里假定 $\theta_1 \geqslant \theta_3 \geqslant \theta_2$. ——译注

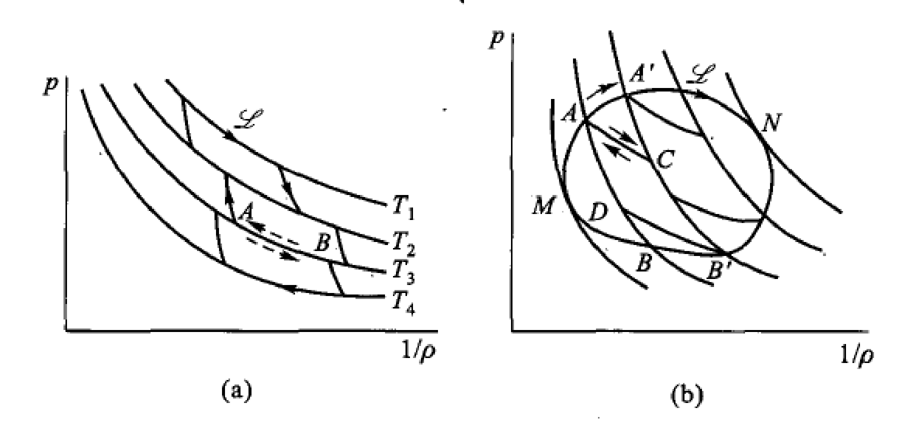


图 32. (a) 与一连串卡诺循环的外边界重合的过程 $\mathscr{L}$; (b) 任意的可逆循环

我们把函数 $\omega(\theta)$ 的值称为绝对温度[1) 2)] T, 从而有

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{T_2}{T_1}, \tag{5.6}$$

即在可逆卡诺循环中, 由热力学系统释放给低温热库的热量 Q_2 与系统从高温热库得到的热量 Q_1 之比等于低温热库和高温热库的绝对温度之比. 由此建立起来的关系把作为等温线特征量的温度的概念与在相应卡诺循环中所得到和释放的能量联系起来.

热力学第二定律用于可逆卡诺循环时的定量表述

我们把可逆过程的关系式 (5.6) 写为以下形式:

$$\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2}{T_2}=0.$$

然后, 按照一般定义, 我们规定系统得到的热量 $Q_1=Q_1^{(e)}$ 为正, 释放的热量 $-Q_2=Q_2^{(e)}$ 为负. 上面的等式这时具有以下形式:

$$\frac{Q_1^{(e)}}{T_1}+\frac{Q_2^{(e)}}{T_2}=0. \tag{5.7}$$

此普适结论得自热力学第二定律, 它可以作为热力学第二定律对工作物是任意双参量介质的任何可逆卡诺循环的定量表述.

热力学第二定律用于任意可逆循环时的定量表述

考虑某可逆循环 $\mathscr{L}$, 它在状态空间 p, $1/\rho$ 中由一条分段曲线表示, 该曲线与一连串可逆卡诺循环的外边界重合 (图 32 (a)). 因为等式 (5.7) 对每个单独的卡诺循环都成立, 所以, 对于所有的卡诺循环, 把这些等式相加, 得 $\sum\limits_i Q_i/T_i=0$. 与 $\mathscr{L}$ 内部的路径相对应的那些项 Q_i/T_i 在求和时显然将消失, 因为这些路径中的每一

[1)] 直接计算就容易验证, 如果在卡诺循环中使用状态方程为 $p=R\rho T$ (T 是开氏温度) 的完全气体为工作物, 则 $Q_2/Q_1=T_2/T_1$. 因此, 这里引入的绝对温度正比于开氏温度.

[2)] 绝对温度的规范名称是热力学温度. ——译注

条, 例如 AB, 都将沿不同方向被经过两次, 并且温度为 T_i 的工作物一次是起冷却作用, 另一次则是起加热作用. 所以最终得到

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0, \tag{5.8}$$

式中只对沿这些可逆卡诺循环之和的外边界进入的热流 Q_i 求和, 即只在分段曲线 $\mathscr{L}$ 上才进行求和.

现在, 设 $\mathscr{L}$ 是通过一个双参量热力学系统实现的任意的可逆循环. 为了实现这样的循环, 我们需要大量温度相差无穷小的热库. 让系统依次与温度等于循环微过程中的系统温度的热库进行接触, 同时进行无穷缓慢的压缩或膨胀. 设系统在封闭曲线 $\mathscr{L}$ 的无穷小段 AA' (图 32 (b)) 上得到微热量 $\Delta Q^{(e)}$. 经过点 A 引等温线 AC, 经过点 A' 引绝热线 $A'C$, 并用 ΔQ_{isoth} 表示系统假如完成无穷小等温过程 AC 而得到的热量. 考虑微循环 $AA'CA$, 可得 $\int\limits_{AA'} \mathrm{d}Q^{(e)} = \Delta Q^{(e)}$ 与 ΔQ_{isoth} 之间的关系. 对此循环应用能量守恒定律, $\Delta Q^{(e)} - \Delta Q_{\text{isoth}} = \Delta A$ (循环 $AA'CA$ 在等温线 AC 段沿 CA 方向进行, 所以在对循环 $AA'CA$ 的能量守恒定律中出现的是 $(-\Delta Q_{\text{isoth}})$). 对于循环的无穷小部分, 热量 $\Delta Q^{(e)}$ 和 ΔQ_{isoth} 是一阶无穷小量, 而微循环所做的功 ΔA 是面积 $AA'CA$, 因而是二阶无穷小量, 即相对于 $\Delta Q^{(e)}$ 和 ΔQ_{isoth} 的无穷小量. 延长绝热线 $A'C$ 至它与 $\mathscr{L}$ 的第二个交点 B', 再经过点 A 引绝热线. 那么, 系统在过程 $\mathscr{L}$ 的 $B'B$ 段上得到的热量 $\Delta Q^{(e)}$ 在同样的近似程度下等于等温线 $B'D$ 段所对应的那些热量. 显然, 精确到二阶小量, 过程的 AA' 和 $B'B$ 段上的两部分热量 $\Delta Q^{(e)}$ 等于系统假如作为进行可逆卡诺循环 $ACB'DA$ 的卡诺热机的工作物而分别从高温和低温热库得到的热量 ΔQ_{isoth}.

如果将曲线 $\mathscr{L}$ 内部的全部区域用一系列绝热线分割为许多带状区域 (图 32 (b)) 并作出相应的等温线, 就得到由状态空间中的一条分段曲线表示的过程 $\mathscr{L}'$, 该曲线是由一段段绝热线和等温线组成的. 对此过程可以应用等式 (5.8),

$$\sum_i \frac{Q_{i\,\text{isoth}}}{T_i} = 0, \tag{5.9}$$

式中对沿边界 $\mathscr{L}'$ 进入的热流 $Q_{i\,\text{isoth}}$ 进行求和.

如果所作绝热线的数目趋于无穷, 而循环 $\mathscr{L}$ 在这些绝热线之间的曲线段的长度趋于零, 则 $\mathscr{L}' \to \mathscr{L}$, $\Delta Q_{\text{isoth}} \to \Delta Q^{(e)}$, 又因为差 $\Delta Q^{(e)} - \Delta Q_{\text{isoth}}$ 是二阶小量 (无穷小曲线三角形的面积), 所以对 (5.9) 取极限, 得关系式

$$\oint\limits_{\mathscr{L}} \frac{\mathrm{d}Q^{(e)}}{T} = 0,$$

它对双参量介质所进行的任何可逆循环都精确地成立.

因为沿任何可逆循环 C 都成立等式

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T} = 0,$$

所以, 对于状态 A 与 B 之间的任何可逆过程 $\mathscr{L}$, $\int\limits_{AB(\mathscr{L})} \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T}$ 与积分路径 $\mathscr{L}$ 无关.

利用可逆过程引入双参量介质的熵 如果固定双参量介质系统的初始状态 A, 则对于能够通过可逆过程到达状态 A 的任何状态 B, 可以引入一个被称为熵的函数:

$$S(B) = S\left(p,\ \frac{1}{\rho}\right) = \int_A^B \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T} + S(A), \tag{5.10}$$

其自变量为状态参量——点 B 的坐标. 按照 (5.10), 熵可确定到相差一个常量 $S(A)$. 从 (5.10) 得出, 当点 B 的坐标发生任何变化时, 对于熵的增量成立公式

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T}.$$

所以, 尽管通过状态参量及其微分表示出来的元热流一般不是全微分, 对它却有积分因子 $1/T(p,\ 1/\rho)$——绝对温度的倒数.

利用热流方程, 对熵的微分可得表达式

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T} = \frac{\mathrm{d}U_m + \mathrm{d}A^{(\mathrm{i})}}{T},$$

或者按单位质量计算,

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}}{T} = \frac{\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}(1/\rho)}{T}. \tag{5.11}$$

它可用于计算双参量介质的熵, 如果介质的内能 U 作为状态参量的函数是已知的.

完全气体的熵 例如, 对于常热容完全气体 ($p = \rho RT$, $U = c_V T$), 有

$$\mathrm{d}s = \frac{c_V \mathrm{d}T}{T} + \frac{R\,\mathrm{d}(1/\rho)}{1/\rho},$$

或

$$\begin{aligned} s &= c_V \ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} + \text{const} = c_p \ln \frac{T}{\rho^{(\gamma-1)/\gamma}} + \text{const}_1 \\ &= c_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const}_2 = c_V \ln \frac{p/p_0}{(\rho/\rho_0)^\gamma} + s_0, \end{aligned} \tag{5.12}$$

式中 p_0, ρ_0, s_0 为相应的常量.

熵的存在对状态方程形式的限制条件

式 (5.11) 对函数 $U(p,\ \rho)$ 和 $T(p,\ \rho)$——介质的基本热力学状态函数——施加了一些限制. 因为 $\mathrm{d}s$ 应是全微分, 所以 (5.11) 的可积条件具有以下形式:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2 T}\right),$$

或

$$\frac{\partial T}{\partial \rho}\frac{\partial U}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial p}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2}\right) + \frac{T}{\rho^2}. \tag{5.13}$$

当函数 $U(p,\ \rho)$ 给定时, 函数 $T(p,\ \rho)$ 应是 (5.13) 的解, 因此, 这样的函数不是任意的, 即使偏微分方程 (5.13) 有许多不同的解.

我们来研究如何对不可逆卡诺循环表述第二定律.

热力学第二定律用于不可逆卡诺循环时的定量表述

设温度分别为 T_1 和 T_2 $(T_1 > T_2)$ 的两个热库是两个卡诺循环中的高温热库和低温热库, 其中一个循环可逆 (效率为 η), 另一个不可逆 (效率为 η'). 那么, 因为 $\eta' < \eta = 1 - T_2/T_1$, 所以

$$1 - \frac{Q_2'}{Q_1'} \leqslant 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad \text{或} \quad \frac{Q_2'}{Q_1'} \geqslant \frac{T_2}{T_1},$$

从而

$$\frac{Q_1'}{T_1} - \frac{Q_2'}{T_2} \leqslant 0.$$

若认为进入系统的热量 Q_1' 为正, 从系统释放的热量 Q_2' 为负, 得

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{Q_i'}{T_i} \leqslant 0.$$

这就是热力学第二定律对不可逆卡诺循环的定量表述.

说明熵在不可逆过程中的变化特点的一个例子

我们来考虑一个特别的例子, 这个例子指出可以怎样引入系统整体的熵, 以及熵在不可逆过程中如何变化. 假设在不可压缩流体中有两个体微元 I 和 II, 其压强相同, 但温度不同. 设体微元 I 的温度为 T_1, II 的温度为 T_2 $(T_2 > T_1)$.

如果让这两个微元进行接触, 它们之间就将发生热交换, 并且在每一时刻都可以对微元 I 和 II 中的每一个写出确定的温度值 (因为 I 和 II 的体积很小). 从 II 向 I 的热传导过程是不可逆的, 因为根据热力学第二定律, 若 $T_2 > T_1$, 热在不消耗外部能量时只能从温度为 T_2 的微元向温度为 T_1 的微元传递.

用 $\mathrm{d}Q$ 表示在 $\mathrm{d}t$ 时间内从微元 II 向微元 I 传递的正的热量. 为简单起见, 我们研究微元 I 与 II 共同组成的系统不与外部介质交换热量的情况. 如果不可逆性只与微元之间的热传导过程有关, 而每个单独的微元内部的状态和过程都可认为是可逆

的, 则可对单独的微元写出

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{d}Q}{T_1}, \quad \mathrm{d}S_{\mathrm{II}} = \frac{-\mathrm{d}Q}{T_2}.$$

若认为整个系统 $\mathrm{I}+\mathrm{II}$ 的熵是可加的函数, 即

$$S = S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}},$$

就可以计算出全部熵的变化:

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}S_{\mathrm{I}} + \mathrm{d}S_{\mathrm{II}} = \mathrm{d}Q\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} > 0.$$

因此, 虽然在这个例子中根本没有外部热流进入系统 $\mathrm{I}+\mathrm{II}$, 该系统的熵还是因为不可逆的内部过程而增加.

热力学第二定律用于多参量介质时的定量表述

上文中作为状态函数的熵是基于卡诺循环仅对双参量介质引入的. 现在我们来研究, 可以怎样对状态由 n 个变化的主定参量 $\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^n$ 决定的介质引入熵, 并证明, 对于在所有中间状态都可确定系统温度 T 的任意不可逆循环 C 都成立不等式

$$\oint\limits_C \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T} \leqslant 0.$$

为此, 我们把任意一个系统所完成的任意一个 (可能是不可逆的) 循环 C 分割为无穷小的微过程 $\mathrm{d}l_i$. 在每个微过程 $\mathrm{d}l_i$ 中, 系统的温度 T_i 可以认为是不变的, 而系统得到的热量记为 $\mathrm{d}Q_i$. 在每个微过程 $\mathrm{d}l_i$ 进行时, 可以把多参量介质用作一个通过辅助双参量介质实现的微可逆卡诺循环的热库, 并且可以这样来选取这些卡诺循环, 使辅助双参量系统在每个循环中向所该多参量系统释放出数量为 $\mathrm{d}Q_i$ 的热量. 所以, 多参量系统在过程 C 中从外界得到的所有热量, 可以想象为是通过与辅助双参量介质的接触而得到的. 我们取温度 T_0 不变的某个物体作为所有辅助卡诺循环的第二个外部热库.

对于每个微卡诺循环, 有

$$-\frac{\mathrm{d}Q_i^{(\mathrm{e})}}{T_i} + \frac{\mathrm{d}Q_0}{T_0} = 0, \tag{5.14}$$

式中 $-\mathrm{d}Q_i^{(\mathrm{e})}$ 与 $\mathrm{d}Q_0$ 分别为双参量介质在等温线 T_i 与 T_0 上得到的热量. 沿整个循环 C 对 (5.14) 进行积分, 得

$$Q_0 = \oint\limits_C \mathrm{d}Q_0 = T_0 \oint\limits_C \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T}.$$

现在考虑由双参量介质和多参量介质共同组成的热力学系统. 只有热库 T_0 才向这个系统提供热量. 经过循环 C 进入复合系统的外部热流之和等于 Q_0.

根据能量守恒定律, 复合系统得到的热量 Q_0 等于该系统对外部物体做的功 A:

$$Q_0 = T_0 \oint_C \frac{\mathrm{d}Q^{(e)}}{T} = A.$$

功 A 不可能为正, 因为在这种情况下我们就具有一个循环运转的机器, 它只依靠来自温度 T_0 固定的热库的热流就对外部物体做机械功 A. 不可能制造出这样的机器正是热力学第二定律的表述之一.

热力学第二定律两种表述的等价性

这个表述被称为热力学第二定律的第二种表述 (见 160 页). 我们来证明, 它等价于第一种表述.

为此, 利用反证法, 首先假设第一种表述成立, 而第二种表述不成立, 即可以实现这样的循环运转的机器, 它只与温度 T_0 固定的一个物体交换热量就能做正功. 那么, 所得到的功可以用于这样的制冷机, 它按照卡诺循环运转, 把热量从某个温度为 T^* ($< T_0$) 的热库传给温度为 T_0 的热库.

由方程

$$A = Q_1 - Q_2 = Q_0 > 0,$$

这个机器从温度为 T^* 的热库取出热量 Q_2, 并把热量 Q_1 ($> Q_0$) 传给温度为 T_0 的热库. 结果是, 在由该制冷机和上述产生功 A 的机器所组成的热力学系统中, 因为 $Q_1 - Q_0 > 0$, $Q_2 > 0$, 热量在不消耗外部任何能量的情况下就从温度 T^* 较低的物体传给温度 T_0 较高的物体, 并且温度分别为 T^* 和 T_0 的物体与这些机器只有热量交换. 根据热力学第二定律的第一种表述, 这是不可能的.

在论述热力学第二定律两种表述的等价性时, 为了其完整性, 我们指出, 如果提出相反的假设, 认为第一种表述不成立, 则由此可知建造第二类永动机是可能的.

其实, 如果假设热量在不消耗外部功的情况下即可从温度为 T_2 的热库传给温度为 T_1 ($T_1 > T_2$) 的热库, 我们就可以把从温度为 T_2 的物体传给温度为 T_1 的物体的热量 Q_1 热量用于一个热机, 例如按照卡诺循环运转的热机. 这个热机从温度为 T_1 的物体取出上述热量 Q_1, 把其中一部分 Q_2 ($Q_2 < Q_1$) 反过来传给温度为 T_2 的物体, 并产生某些机械功 A (> 0).

如果把上述两个过程 (自发过程和热机中的过程) 看作一个过程, 则显然其结果将是, 仅依靠从温度为 T_2 的一个热库吸收热量 $Q_1 - Q_2$ 即可周期性地产生机械功. 这违反了热力学第二定律的第二种表述.

热力学第二定律用于任何介质中的不可逆过程时的定量表述

这样, 上面已经证明, 假设 $\oint_C \frac{\mathrm{d}Q^{(e)}}{T} > 0$ 违反了热力学第二定律. 因此, 对于任何多参量介质 (包括双参量介质) 所完成的任何循环 C, 应当成立关系式

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}Q^{(e)}}{T} \leqslant 0.$$

热力学第二定律用于任何介质中的可逆过程时的定量表述

如果原循环 C 是可逆的, 则在循环 C 逆向进行时重复我们的讨论, 所得结论将是, $A<0$ 的假设也违反热力学第二定律. 对于任何介质所进行的可逆循环 C, 唯一的可能是

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T} = 0.$$

利用可逆过程引入多参量介质的熵

由此可见, 当过程可逆时, 积分 $\int_A^B \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T}$ 与积分路径无关, 它在初态 A 固定时只是介质的终态 B 的函数. 因此, 就像利用可逆过程对双参量介质引入熵那样, 利用可逆过程可以对多参量介质引入一个被称为熵的单值的状态函数:

$$S(B) = \int_A^B \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T} + S(A).$$

设过程 $\mathscr{L}$ 使介质从状态 A 到达状态 B. 如果这个过程是不可逆的, 就可以通过 A 与 B 之间相应的任意的[1]可逆过程 $\mathscr{L}_1$ 来计算状态 B 的熵, 只要假设这样的可逆过程存在 (图 33). 由此得出

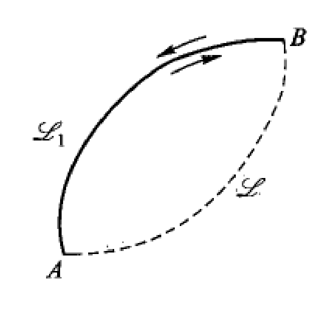


图 33. 用于通过可逆过程引入熵

$$S(B) - S(A) \geqslant \int_{AB(\mathscr{L})} \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T}.$$

其实, 考虑某介质的两个状态 A 与 B, 设在这两个状态之间能够实现两个过程, 其中一个 ($\mathscr{L}_1$) 是可逆的, 另一个 ($\mathscr{L}$) 是不可逆的. 利用可逆过程 $\mathscr{L}_1$ 可以计算熵

$$S(B) - S(A) = \int_{AB(\mathscr{L}_1)} \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T}.$$

如果考虑循环 $C = A\mathscr{L}B\mathscr{L}_1A$, 则它显然是不可逆的, 且

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T} \leqslant 0,$$

所以

$$S(B) - S(A) \geqslant \int_{AB(\mathscr{L})} \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}}{T}.$$

应当注意, 最后的积分是沿不可逆路径 $\mathscr{L}$ 进行的.

---

[1] 显然, 差值 $S(B)-S(A)$ 对状态 A 与 B 之间的每一个不同的可逆路径都是相同的.

非补偿热 对于连接两个无穷接近的状态 A 和 B 的不可逆过程, 我们有

$$\mathrm{d}S \geqslant \frac{\mathrm{d}Q^{(e)}}{T}.$$

因此, 当过程不可逆时

$$T\,\mathrm{d}S \geqslant \mathrm{d}Q^{(e)},$$

或

$$T\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q^{(e)} + \mathrm{d}Q', \tag{5.15}$$

式中的量 $\mathrm{d}Q'$ 称为非补偿热, 它永远大于或等于零. 当过程可逆时 $\mathrm{d}Q' = 0$. 然而值得强调的是, 在 $\mathrm{d}Q' = 0$ 时过程完全有可能是不可逆的[1].

上面已经证明, 如果假设任意两个状态 A 与 B 之间除不可逆过程外还同时存在可逆过程, 则从热力学第二定律可知, 存在熵这个函数, 它依赖于决定状态 A 与 B 的那些参量. 这个结论和熵的那些被证实的性质在所有宏观理论中都具有基本的意义, 因此, 作为任何力学、物理学乃至一般自然科学的宏观模型中的一个热力学函数, 引入熵的概念就像引入能量的概念那样是非常重要的. 从这个观点来看, 上面发展起来的理论在以下情况下需要推广和扩充, 如系统的温度一般而言没有定义的情况[2], 或者任意两个状态 A 与 B 根据某些模型的定义无法由可逆过程连接起来的情况.

长久以来, 许多作者似乎觉得在物理学中根本没有这类理论模型, 这种观点至今仍然存在. 然而, 这是不正确的观点. 例如, 如果在所建立的模型的范围内, 连接某两个或多个状态的所有平衡过程都是不可逆的, 上述观点就是错误的. 因此必须指出, 在许多普及的教材中, 其作者在没有特别附带条件的情况下"证明"了一个错误的结论: 所有平衡过程都是可逆的.

不可逆平衡过程的一个例子 示意图 34 给出了平衡但不可逆过程的一个例子: 一个重物(例如砖头) 沿静止的水平桌面运动, 考虑摩擦. 容易看出, 当砖头无穷缓慢地匀速运动时[3], 在水平方向作用于砖头的合力为零, 作用于砖头的力 $\boldsymbol{F}$ 与摩擦力 $\boldsymbol{f}_i$ 的总功也等于零. 砖头对桌面的反作用力的功等于零, 而砖头对绳子的反作用力的功不等于零, 它与作用于砖头的力 $\boldsymbol{F}$ 的功平

[1] 在用 (5.15) 和 $\mathrm{d}Q' \geqslant 0$ 的形式表述热力学第二定律时, 假设温度 T 对系统的所有部分都相同, 且系统不与环境介质进行质量交换. 本章 §8 和 §11 给出了包括这些情况的更一般的表述.

[2] 见: Куликовский А.,Г., Эглит М.Э. О понятии энтропии в феноменологической термодинамике. Вопросы нелинейной механики сплошной среды: Сборник научных трудов. Таллинн: Валгус, 1985. 49—62

[3] 因为固体之间的相对滑动在有干摩擦时不可能无穷缓慢地进行, 所以重物沿桌面的运动不是平衡 (准静态) 过程. 不过, 这个例子的条件只要稍作变化就可满足要求. 我们假设重物与桌面之间有一层起润滑作用的液体. 由于液体在静止状态下无法承受切向应力, 很小的拉力就能使重物运动起来, 液体层也同时运动起来阻碍重物的运动, 从而使重物的受力达到平衡. ——译注

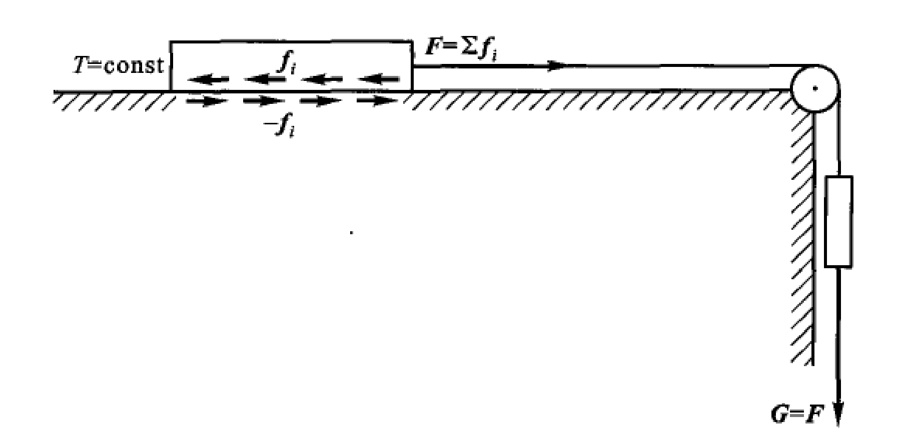


图 34. 不可逆准静态过程的一个例子, f_i 为摩擦力

衡. 在重物与桌面的接触面上释放出的热量散发到温度 T 为常量的巨大的热库中. 也可以不引入热库而考虑重物缓慢运动的过程, 其平衡温度是变化的.

显然, 图 34 给出了一个简单到极限的平衡但不可逆过程的例子. 如上所述, 这与许多热力学书中的结论是相反的.

从这个例子即可看出, 作用于重物的外力的功在一般情况下并不等于重物对外部物体做的机械功, 这与许多教材作者的结论相反. 在非保守系统中, 或者甚至当该力学系统与电磁场有相互作用时, 从作用力与反作用力相等这一定律根本不能得出对纯机械能交换也成立类似的定律, 这是极其显然和众所周知的.

作为上述理论的延伸, 以下论文更加深入地论述了熵的概念: Каменярж Я. А., Седов Л. И. Макроскопическое введение энтропии при ослабленных предположениях об осуществимых процессах. ПММ, 1979, 43(1): 3—6[1).

$dQ^{**}\neq 0$ 的热机的功 现在将得出在 $dQ^{**}\neq 0$ 条件下工作的热机的能量方程. 有一种使用了所谓磁热效应的装置就是这种热机的一个例子. 我们知道, 顺磁物质的绝热磁化与退磁类似于诸如完全气体的双参量系统的绝热压缩与膨胀. 在绝热磁化时需要消耗外部能量 dQ^{**}, 此时介质的内能增加, 温度升高. 在绝热退磁时系统释放能量 dQ^{**}, 其内能减少, 温度降低.

磁热效应可用来获得极低的温度 (用这种方法获得了 0.0044 K 的温度).

当 $dQ^{**}\neq 0$ 时, 热流方程具有以下形式:

$$dU_m = -dA^{(i)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}.$$

对于封闭的循环 C, 得

$$\oint_C (dA^{(i)} - dQ^{**}) = \oint_C dQ^{(e)} = Q^{(e)}, \tag{5.16}$$

1) 英文版: Kameniarzh Ia. A., Sedov L. I. Macroscopic introduction of entropy with relaxed assumptions about realizable processes. J. Appl. Math. Mech., 1979, 43(1): 1—4. ——译注

式中 $Q^{(e)}$ 表示进入热机工作物的总热流. 由动能定理 $\mathrm{d}E = \mathrm{d}A^{(i)} + \mathrm{d}A^{(e)}$, 对封闭的循环 ($\oint \mathrm{d}E = 0$) 有

$$\oint_C \mathrm{d}A^{(i)} = -\oint_C \mathrm{d}A^{(e)},$$

所以等式 (5.16) 可以改写为以下形式:

$$-\oint_C (\mathrm{d}A^{(e)} + \mathrm{d}Q^{**}) = Q^{(e)}.$$

这个关系式就是描述热机做功的能量方程. 此时, 热机完成封闭的循环并从外部介质获得热量 $Q^{(e)}$, 这些热量不仅用来产生对外部物体的机械功, 而且还用来向外部物体传递非力学 (不同于宏观力做功) 和非热量本质的能量.

可见, 与热机做功有关的那些结论也可应用于 $\mathrm{d}Q^{**} \neq 0$ 的情况, 只要把 $\mathrm{d}A$ 理解为和 $\mathrm{d}A^{(e)} + \mathrm{d}Q^{**}$, 即认为

$$A = \oint_C (\mathrm{d}A^{(e)} + \mathrm{d}Q^{**}).$$

内能相同而熵不同的状态

最后我们指出, 可以存在这样一些过程, 系统在经历这些过程后内能不变, 但系统的熵发生变化. 这是因为, 内能与熵可以依赖于不同的热力学参量, 而一个过程可能对决定内能的参量封闭而对决定熵的参量不封闭. 例如, 在完全气体中有

$$U = c_V T + \text{const},$$

$$s = c_p \ln \frac{T}{\rho^{(\gamma-1)/\gamma}} + \text{const}.$$

所以, 在两个状态之间的任何一个过程中, 若温度相同而压强不同, 该过程就是这个类型的.

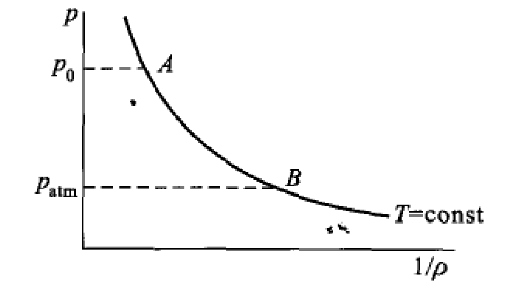


图 35. 在过程 AB 中 $U = \text{const}$, 但 s 发生变化

这样, 当气体在等温条件下从压强为 p_0 的高压气罐释放到大气时, 其内能不变, 但熵 s 增加 (因为 p 减小) (图 35). 在这个过程中, 气体以机械功的形式释放能量, 同时吸收数量完全相同的热量.

我们指出, 从能量的实际可用性的观点来讲, 相同数量的能量可以具有不同的品质[1], 并且熵的值恰好就决定了这种品质 (熵越高, 所拥有的能量的品质就越低). 其实, 例如, 当气体沿等温线从状态 A 移至状态 B 时, 气体在每一小段过程中都对

[1] 在热力学中有专门的理论研究能量的品质和可用性, 可以参考: B. M. 布罗章斯基. 㶲方法及其应用. 王加璇编译. 北京: 中国电力出版社, 1996. Szargut J. Exergy Method: Technical and Ecological Applications. Southampton: WIT Press, 2005. ——译注

外做机械功, 并吸收等量的热量.

然而, 热能是品质最低的一种能量形式, 因为根据热力学第二定律, 它在循环过程中不能完全转变为另一种形式的能量. 相反, 其他形式的能量 (例如机械功) 则能够完全地互相转变, 也能够完全转变为热.

用统计方法引入熵 可以用统计方法引入熵 s, 其数值与相应状态的概率有关. 在统计物理学中, 玻尔兹曼对熵建立起以下公式:

$$s = k \ln P, \tag{5.17}$$

式中 k 为玻尔兹曼常量, P 为所研究状态的概率的一种度量, 它定义为该宏观状态所对应的可能的微观状态的数目 (许多不同的微观状态具有完全相同的宏观特征量).

熵的可加性 由 (5.17) 可得熵的可加性, 只要系统整体状态的概率等于单独各部分状态的概率之积. 此结论在单独各部分状态的概率独立时显然成立.

熵在系统趋于平衡时增加 可以把等式 (5.17) 看作熵的定义, 它既适用于平衡态, 也适用于非平衡态. 因为实际出现的状态对应于最概然态, 所以由 (5.17) 可知, 当孤立系统趋于平衡时, 熵会增加.

绝热可逆过程与绝热不可逆过程 若一个系统与热环境隔绝, 但可以受到任何力的作用, 则它所经历的过程称为绝热过程. 此时, 从外部进入系统的热流为零 ($\mathrm{d}Q^{(e)}=0$). 在可逆绝热过程的情况下

$$T\,\mathrm{d}S = 0, \quad 故 \quad S = \mathrm{const}\,.$$

可逆绝热过程是等熵的.

相反, 若一个可逆过程是等熵的, 即 $S=\mathrm{const}$, 则 $\mathrm{d}Q^{(e)}=0$, 过程是绝热的.

若一个过程是绝热不可逆的, 则 $\mathrm{d}S \geqslant 0$, 因为 $\mathrm{d}Q' \geqslant 0$; 如果熵发生变化的话, 它只能增加.

在不可逆非绝热过程中, 熵既能减小也能增加, 因为此时

$$T\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q^{(e)} + \mathrm{d}Q'$$

可以具有任何符号, 而由热力学第二定律仅能得出 $\mathrm{d}Q'$ 是非负的.

在建立连续介质的具体模型时, 如果其中可能出现不可逆过程, 就必须通过一些专门的实验、假设或者统计物理学结果来补充关于 $\mathrm{d}Q'$ 的结果.

可以说, 热力学第二定律决定了实际出现的过程的方向. 绝热不可逆过程只能向熵增加的方向进行, 而非绝热不可逆过程只能向 $\mathrm{d}Q'$ 非负的方向进行.

孤立系统的熵增加原理与平衡条件 因为在孤立系统的 (实际上不可逆的) 所有过程中熵只能增加, 所以显然, 在孤立系统中熵最大的状态是平衡态. 因此, 对于孤立系统的内部过程, 熵最大的条件就是平衡条件.

§6. 双参量介质的热力学势

我们再来研究双参量介质热力学的一个重要问题, 其过程一般视为可逆过程 (并且认为 dq^{**} 等于零).

前面已经指出, 对于双参量介质, U, s 与 T 这 3 个状态函数不可能是任意的. 例如, 若通过 p 与 ρ 的函数给出内能 U, 则函数 $T(p,\ \rho)$ 应当满足条件 (5.13). 当 $U(p,\ \rho)$ 给定时, 这个条件应当视为用来确定 $T(p,\ \rho)$ 的一个线性偏微分方程.

众所周知, 该微分方程有许多解, 即在 $U(p,\ \rho)$ 给定时有许多不同的关系 $T(p,\ \rho)$, 介质的热力学性质因而不是唯一确定的. 为了消除这种不确定性, 必须从方程 (5.13) 的特解中选取一个解, 即选择出状态方程 $T = T(p,\ \rho)$ 的具体形式. 此后, 熵由 (5.11) 求出 (精确到相差一个常量).

可以选取不同的变量组合作为双参量介质的热力学主定变量, 例如 ρ 和 s, p 和 s, ρ 和 T, 等等. 这样做经常会带来方便. 由此出现一个问题: 能否通过一些变量的函数给出内能 U, 使得其他一些热力学函数可以完全由此唯一地确定下来? 答案是肯定的.

内能与熵是热力学势 设内能 U 通过 ρ 和 s 的函数给出, 那么, 根据微分法则与可逆过程的热力学第二定律及热流方程 (5.11), 有

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho ds + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_s d\rho = T\,ds - p\,d\frac{1}{\rho}. \tag{6.1}$$

因为 ds 与 $d\rho$ 是任意的, 由此可得

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho, \quad p = \rho^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_s, \tag{6.2}$$

即 T 与 p 作为 ρ 与 s 的函数被唯一确定下来. 内能 U 此时称为热力学势. 从式 (6.1) 还可以看出, 对于变量 U 与 ρ 来说熵是热力学势, 因为如果熵 s 通过 U 与 ρ 的函数给出, 则

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial U}\right)_\rho, \quad \frac{p}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial (1/\rho)}\right)_U.$$

自由能 若 ρ 与 T 是热力学主定变量, 则式 (6.1) 更宜写为以下形式:

$$d(U - Ts) = -s\,dT + \frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

或

$$dF = -s\,dT + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \tag{6.3}$$

式中 F 表示一个状态函数:

$$F \equiv U - Ts, \tag{6.4}$$

它称为自由能[1). 如果 F 作为 ρ 与 T 的函数是已知的, 则 p 与 s 可由 (6.3) 唯一确定. 当使用变量 ρ 与 T 时, 自由能 $F(\rho,T)$ 是热力学势. 其实, 从 (6.3) 可知

$$s=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\rho,\quad p=\rho^2\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_T. \tag{6.5}$$

焓 类似地, 如果压强 p 与熵 s 是主定参量, 则式 (6.1) 写为以下形式为宜:

$$\mathrm{d}\left(U+\frac{p}{\rho}\right)=T\,\mathrm{d}s+\frac{\mathrm{d}p}{\rho},$$

或

$$\mathrm{d}i=T\,\mathrm{d}s+\frac{\mathrm{d}p}{\rho}.$$

此时, 状态函数

$$i(p,\ s)\equiv U+\frac{p}{\rho} \tag{6.6}$$

称为焓, 它是热力学势, 因为

$$T=\left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_p,\quad \frac{1}{\rho}=\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_s.$$

吉布斯热力学势 最后, 如果压强 p 与温度 T 是主定参量, 则最好把式 (6.1) 写为以下形式:

$$\mathrm{d}\left(U-Ts+\frac{p}{\rho}\right)=-s\,\mathrm{d}T+\frac{\mathrm{d}p}{\rho},$$

或

$$\mathrm{d}\Psi=-s\,\mathrm{d}T+\frac{\mathrm{d}p}{\rho}.$$

函数

$$\Psi(p,\ T)\equiv U-Ts+\frac{p}{\rho} \tag{6.7}$$

称为吉布斯热力学势[2), 简称热力学势, 而 ρ 与 s 则由它唯一确定:

$$s=-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_p,\quad \frac{1}{\rho}=\left(\frac{\partial \Psi}{\partial p}\right)_T.$$

内能与熵可以确定到相差一个常量, 而自由能 F 与热力学势 Ψ 则可以确定到相差一个温度的线性函数.

显然, 在上面列出的那些情况下, 引入上述变量可以把求解所有状态函数的问题归结为仅仅求解一个相应的热力学势. 对于变量 p 与 ρ 或者 T 与 s 没有相应的

[1) 量 F 按国家标准称为 (质量) 亥姆霍兹自由能或亥姆霍兹函数. 从 (6.3) 可见, 亥姆霍兹自由能的减少量相当于等温 ($\mathrm{d}T=0$) 可逆过程中能够“自由地”转化为功的那部分能量. ——译注

[2) 量 Ψ 按国家标准称为 (质量) 吉布斯自由能或吉布斯函数. ——译注

热力学势.

通过相应变量的函数给出热力学势即确定了一种介质

这样, 双参量理想介质的热力学性质和力学性质完全决定于函数 $U(\rho,\ s)$, $i(p,\ s)$, $F(\rho,\ T)$ 和 $\Psi(p,\ T)$ 之一. 相应地通过其他变量给出函数 U, i, F 和 Ψ 不足以完全确定一种介质, 此时还要给出额外的关系式, 例如状态方程. 状态方程是一个确定的偏微分方程的某个解.

从实验确定热力学势

为了确定实际流体的相应热力学势, 可以利用在相应物理模型中通过某些简单假设得出的一些统计物理学结果, 或者利用 (量热学和力学的) 实验结果.

例如, 测量物质的质量热容值具有重要意义. 众所周知, 质量热容定义为单位质量的介质在温度升高 1 °C 时 (测量温度时使用摄氏温标) 所吸收的热量.

对于双参量介质, 热容对 2 个参量的变化都有很强的依赖性. 只有在温度升高的过程完全给出时, 热容才能被唯一确定下来.

可压缩介质的定压热容 c_p 与定容热容 c_V 具有重要意义. 对于热容 c_p 与 c_V, 成立公式

$$\begin{aligned} c_p &= \left(\frac{\mathrm{d}q^{(e)}}{\mathrm{d}T}\right)_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\rho - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$c_V = \left(\frac{\mathrm{d}q^{(e)}}{\mathrm{d}T}\right)_\rho = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\rho = \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho + \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho. \tag{6.9}$$

对于差 $c_p - c_V$, 由公式 (6.8) 与 (6.9) 可得等式

$$c_p - c_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T - \frac{p}{\rho^2}\right]\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\left[\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - \frac{1}{\rho}\right]\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho. \tag{6.10}$$

由 (6.10) 与热流方程还可得等式[1)]

$$c_p - c_V = -\frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \tag{6.11}$$

此式还可写为以下形式:

$$c_p - c_V = \frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p^2, \tag{6.12}$$

1) 其实, 仿照 (5.13) 的推导过程, 只要把 ρ 与 T 当作主定参量, 由等式 (5.11) 的可积条件即得

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T - \frac{p}{\rho^2} = -\frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho.$$

此方程称为亥姆霍兹方程, 它和方程 (5.13) 具有类似的用处. ——译注

这是因为

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p,$$

而此公式得自

$$\mathrm{d}p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \mathrm{d}\rho.$$

式 (6.10)—(6.12) 对任意双参量介质均成立. 在实验中测量出热容 c_p 和 c_V 的值, 以及在温度变化时的定压密度系数 $(\partial\rho/\partial T)_p = k_\rho$ 和定容压强系数 $(\partial p/\partial T)_\rho = k_p$ 的值之后, 利用所得数据即可求出内能的导数

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\rho = c_V, \\ &\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T = \frac{c_p - c_V}{k_\rho} + \frac{p}{\rho^2} = -\frac{1}{\rho^2}\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho - p\right] \end{aligned} \tag{6.13}$$

和焓的导数

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p = c_p, \\ &\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T = -\frac{c_p - c_V}{k_p} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho^2}\left[T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p + \rho\right]. \end{aligned} \tag{6.14}$$

作为热力学第一定律与第二定律的推论, 显然, 此时应满足以下可积条件:

$$-\frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_\rho = \left(\frac{\partial c_V}{\partial \rho}\right)_T,$$

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T\left[\frac{\partial^2 (1/\rho)}{\partial T^2}\right]_p.$$

这些条件可以用于减少实验次数或者检验实验结果.

在本章前面几节中证明了, 对于所有热力学系统都可以引入 2 个状态函数——内能 U 与熵 s, 对于平衡过程则还可以引入 1 个状态函数——温度 T; 得出了 1 个新的普适方程——热流方程

$$\mathrm{d}U = \frac{p^{ij}}{\rho}\nabla_j v_i\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}q^{**},$$

或者当 $p^{ij} = p^{ji}$ 时

$$\mathrm{d}U = \frac{p^{ij}}{\rho} e_{ij}\mathrm{d}t + \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}q^{**},$$

并研究了在建立具体连续介质模型时一般必须应用的热力学第二定律

$$T\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}Q', \quad \mathrm{d}Q' \geqslant 0,$$

或者 (对于单位质量)

$$T\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}q', \quad \mathrm{d}q' = \frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}m} \geqslant 0. \tag{6.15}$$

现在我们将用这些结果来建立一些具体的连续介质模型.

§7. 理想介质与黏性介质的例子及其热力学性质 · 热传导

为了利用上述普适方程组 (连续性方程, 动量方程, 经典情况 $p^{ij} = p^{ji}$ 的动量矩方程, 热流方程和热力学第二定律的方程) 来研究连续介质运动的个别问题, 必须补充一些给出具体介质模型性质的关系式.

现在我们来研究某些重要的连续介质模型, 同时还考虑其热力学性质.

(A) 理 想 不 可 压 缩 流 体 模 型

从不可压缩条件可知, 对于每个流体微元都有

$$\rho = \rho_0 = \mathrm{const}\,.$$

在非均匀流体的情形下, 密度 ρ 可以视为由拉格朗日坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3 给出的函数. 对于均匀流体, 密度对所有流体微元都相同.

依照前面给出的定义, 一种流体称为理想的, 若

$$p^{ij} = -pg^{ij}.$$

我们知道, 在理想不可压缩均匀流体的情形下, 为了确定压强 $p(x^i,\ t)$ 与速度矢量 $\boldsymbol{v}(x^i,\ t)$, 封闭方程组由 4 个标量方程组成, 即连续性方程

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$$

和 3 个欧拉方程

$$a_i = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i}.$$

如果理想不可压缩流体不是均匀的, 则为了确定欧拉观点下的函数 $\rho(x^i,\ t)$, 还应补充这些方程之外的第五个方程:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0.$$

因为在理想不可压缩流体中内应力的功永远为零,

$$\mathrm{d}A^{(\mathrm{i})} = -\frac{p^{ij}}{\rho}e_{ij}\,\mathrm{d}t = \frac{p}{\rho}g^{ij}e_{ij}\,\mathrm{d}t = \frac{p}{\rho}e^{i}_{\cdot i}\,\mathrm{d}t = \frac{p}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = 0,$$

所以热流方程

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}$$

可以视为确定内能密度 U 的方程或者流体中的传热方程.

理想不可压缩流体的熵与内能 在理想不可压缩流体模型的定义中还包括一个假设, 认为其中的力学过程是可逆的, 从而

$$dq^{(e)} = T\,ds, \quad dq' = 0. \tag{7.1}$$

利用 (7.1), 热流方程给出

$$dU = T\,ds.$$

由此可知, 若 $s = \text{const}$, 则 $U = \text{const}$, 所以 U 只是 s 的函数, $U = U(s)$. 但因为

$$\frac{dU}{ds} = T,$$

所以显然 $T = T(s)$, 或者 $U = U(T)$ 且 $s = s(T)$.

对于不可压缩流体的质量热容 c, 可以写出

$$c = \frac{dq^{(e)}}{dT} = \frac{dU}{dT} = c(T).$$

理想不可压缩流体的熵与内能按以下公式计算:

$$U = \int c(T)\,dT, \quad s = \int \frac{c(T)\,dT}{T},$$

其中热容 $c(T)$ 是温度的给定函数. 如果 $c = \text{const}$, 则

$$U = cT + \text{const}, \quad s = c\ln T + \text{const}.$$

热流方程

$$\frac{dq^{(e)}}{dt} = c(T)\frac{dT}{dt} = c(T)\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i\frac{\partial T}{\partial x^i}\right) \tag{7.2}$$

可以用来确定温度分布.

因此, 从连续介质力学的观点来看, 仅由密度值与热容 $c(T)$ 即可给定一种理想不可压缩流体.

此外, 为了解决具体问题, 还需要给出外质量力 $\boldsymbol{F}$, 热流 $q^{(e)}$, 以及一些附加的边界条件、初始条件或者使偏微分方程组有唯一解所必须的其他条件.

在理想不可压缩流体运动中力学问题对热学问题的独立性及其关系 最后我们指出, 确定理想不可压缩流体在给定力作用下的运动, 这一力学问题的解决独立于温度在流体中的分布问题的解决, 也不需要知道内能. 相反, 当热流给定时, 用来求解温度 T 的分布的方程 (7.2) 只有在从力学问题求出速度 $\boldsymbol{v}(x^i,\ t)$ 的分布之后才成为确定的. 因此, 当介质运动时, 热学问题的解决依赖于力学问题的解决.

(B) 理 想 可 压 缩 流 体 模 型

我们把理想气体定义为满足下述 3 个假设的介质: 第一, 其应力张量为球张量

$$p^{ij} = -pg^{ij};$$

第二, 它是一种双参量介质, 其内能只依赖于 2 个参量, 例如 ρ 与 s,

$$U = U(\rho,\ s);$$

第三, 其中所有力学过程在连续运动的情况下都是可逆的[1), 因而

$$\mathrm{d}q' = 0.$$

在 $U(\rho,\ s)$ 给定的条件下, 这三个假设不但在热力学意义下, 而且在力学意义下完全确定了理想气体或理想可压缩流体模型.

实际上, 如果质量力 $\boldsymbol{F}$ 与外部热流 $\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}$ 已经给定, 则被称为状态方程的 2 个方程 (6.2), 热力学第二定律

$$T\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}$$

或热流方程

$$\mathrm{d}U = -p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} + \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})},$$

以及连续性方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$$

和 3 个欧拉方程

$$a_i = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i}$$

就组成封闭的方程组, 用来求解 7 个未知函数 $\rho,\ v_i,\ p,\ s$ 与 T.

我们指出, 状态方程 (6.2) 在任何过程中都成立. 可以给出热力学势 $F(\rho,\ T)$, $i(p,\ s)$, $\Psi(p,\ T)$ 中的任何一个来代替函数 $U(\rho,\ s)$.

理想可压缩流体绝热过程的封闭的运动方程组

如果在物体每个微元中的过程都是绝热可逆的, 则 $\mathrm{d}q' = 0$, $\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} = 0$, 于是

$$s = f(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3),$$

即每个微元的熵不变. 微元的熵值应从额外的条件给出或求出, 这些条件源自具体问题的提法. 对于非均匀不可压缩流体的密度, 情况是类似的.

1) 有时会研究理想气体中的一些不可逆的物理化学过程, 例如化学反应. 此时, 与这些过程的不可逆性相关的 $\mathrm{d}q'$ 可以不等于零. 此外我们指出, 只要对内能 (或自由能) 的形式作相应假设, 再假设过程可逆, 就可得出应力张量是球张量的结论, 见第二卷第九章 §2 中关于把理想流体看作一种特殊的非线性弹性体的讨论.

如果在绝热过程中所有物质微元的熵都相等, $s = \text{const}$, 则由状态方程 (6.2) 可知, 压强 p 与温度 T 只依赖于 ρ, 即过程是正压的, 而力学方程组在 $U(\rho, s)$ 已知时是封闭的.

理想可压缩流体等温过程的封闭的运动方程组

如果 ρ 与 T 是独立的热力学变量, 则在决定连续介质模型时最好给出自由能 $F(\rho,\ T) = U - Ts$. 此时, 状态方程的形式为 (6.5). 尽管它们对任何过程都成立, 但他们的这种形式在研究等温过程时特别方便.

实际上, 这时若给出函数 $T(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3)$ 或 $T = \text{const}$, 则从 (6.5) 立即得出, 对于每个物质微元, p 都是 ρ 的已知函数, 并且当 $\operatorname{grad} T = 0$ 时 p 仅是 ρ 的函数 (不依赖于 ξ^i). 在这种情况下, 只要已知函数 $F(\rho,\ T)$, 力学方程组就是封闭的.

此时, 熵可从 (6.5) 的第一个方程计算, 热流方程可写为

$$\mathrm{d}q^{(e)} = -T\,\mathrm{d}\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\rho,$$

由此即可计算出维持等温过程所必须的外部热流.

完全气体模型

理想气体模型的一个例子是理想完全气体模型. 完全气体的密度 ρ, 压强 p 与绝对温度 T 之间的关系由克拉珀龙方程给出:

$$p = \rho R T, \tag{7.3}$$

式中 R 为气体常量. 根据克拉珀龙方程与理想介质可逆过程的热力学第二定律及热流方程 (6.1), 有

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}\left(s + R\ln\frac{\rho}{\rho_0}\right). \tag{7.4}$$

因此, 对于服从克拉珀龙方程的气体, 组合 $s + \int \frac{R}{\rho}\,\mathrm{d}\rho$ 仅仅依赖于 U, 又因为 $T = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}(s + R\ln\rho)}$, 所以 T 只是 U 的函数. 由此可知, 内能 U 与组合 $s + \int R\rho\,\mathrm{d}\rho$ 只能依赖于温度而不依赖于密度. 显然, 在形如 (7.3) 的状态方程中, 如果量 R 是密度 ρ 的任何函数, 而不像在克拉珀龙方程中那样是常量, 则上述结论依然成立.

取 $\mathrm{d}U = c_V(T)\,\mathrm{d}T$, 从 (7.4) 得

$$s = \int \frac{c_V\,\mathrm{d}T}{T} - R\ln\frac{\rho}{\rho_0}.$$

为了给定一个完全气体模型, 必须给出克拉珀龙方程中的常量 R, 再以温度 T 的函数的形式给出质量内能. 第二个要求精确到相差一个常量等价于以温度 T 的函数的形式给出定容热容. 因为方程 (7.3) 以及后面的结论不依赖于微元质量, 所以, 根据 §6 中的定义, 对于质量为 m 且 $R = \text{const}$ 的均匀的完全气体微元, 容易得出熵与热力学势的所有公式.

这些公式具有以下形式:

$$
\begin{aligned}
U_m &= m\left(U_0 + \int_{T_0}^{T} c_V \, \mathrm{d}T\right), \\
S &= m\left(s_0 + \int_{T_0}^{T} \frac{c_p \, \mathrm{d}T}{T} - R \ln \frac{p}{p_0}\right), \\
i_m &= m\left(i_0 + \int_{T_0}^{T} c_p \, \mathrm{d}T\right), \qquad (7.5) \\
F_m &= m\left(U_0 - T s_0 + \int_{T_0}^{T} c_V \, \mathrm{d}T - T \int_{T_0}^{T} \frac{c_V \, \mathrm{d}T}{T} - RT \ln \frac{\rho_0}{\rho}\right), \\
\Psi_m &= m\left(i_0 - T s_0 + \int_{T_0}^{T} c_p \, \mathrm{d}T - T \int_{T_0}^{T} \frac{c_p \, \mathrm{d}T}{T} + RT \ln \frac{p}{p_0}\right),
\end{aligned}
$$

式中 $c_V(T)$ 与 $c_p(T)$ 为质量热容, 常量 U_0, s_0, i_0 对应 U, s, i 在温度 T_0, 压强 p_0 与密度 ρ_0 下的值. 在研究不同气体时, 在许多情况下可以认为量 U_0, s_0, i_0, c_p, c_V 与 R 反比于摩尔质量 M.

在实际中有一种重要的情况, 可以认为热容 c_V 是常量, 即认为它不依赖于温度, 此时公式 (7.5) 特别简单, 并且从迈耶公式 (4.5)

$$R = c_p - c_V$$

可知, 热容 c_p 也是常量. 对于热容 c_V 和 c_p 为常量的完全气体, 从 (7.5) 得公式

$$
\begin{aligned}
U_m &= m c_V T + \text{const}, \\
i_m &= m c_p T + \text{const}, \qquad (7.6) \\
S &= m\left(c_V \ln \frac{T \rho_0^{\gamma-1}}{T_0 \rho^{\gamma-1}} + s_0\right) = m\left(c_V \ln \frac{p \rho_0^{\gamma}}{p_0 \rho^{\gamma}} + s_0\right),
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
p &= p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \exp\left(\frac{s - s_0}{c_V}\right), \\
\frac{U_m}{m} &= U = c_V T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \exp\left(\frac{s - s_0}{c_V}\right) + \text{const},
\end{aligned} \qquad (7.7)
$$

式中 $\gamma = c_p/c_V$ 为泊松系数. s, ρ, p 之间的关系式 (7.7) 或者 s, T, ρ 之间的相应关系式对于任何过程都可以视为类似于克拉珀龙方程 $p = \rho RT$ 的状态方程. 显然, 只

要给出一个函数 $U(\rho,\ s)$:

$$U = c_V T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \exp\left(\frac{s-s_0}{c_V}\right) + \text{const}$$

就可以完全确定热容为常量的完全气体模型.

对于被高度压缩的密度非常高的气体, 克拉珀龙状态方程并不符合实际情况. 对于接近气体液化点的状态和液体, 该方程也不成立. 此外我们指出, 在接近绝对零点的极低的温度下, 克拉珀龙状态方程与公式 (7.5) 不再满足热力学的一般定律 (第二定律, 能斯特定理[1]) 及其关于物质在绝对零点附近的性质的一些推论).

范德瓦耳斯气体　我们来研究一种理想气体, 它满足以下形式的范德瓦耳斯状态方程:

$$p = \frac{\rho RT}{1-b\rho} - a\rho^2, \tag{7.8}$$

式中 R, b 与 a 为正的物理常量. 方程 (7.8) 是对克拉珀龙状态方程的一种修正, 它描述气体液化点附近的过程和液相某些区域的实际关系. 在状态方程 (7.8) 中引入了分母 $1-b\rho = 1-\rho/\rho^*$, 这导致当密度 ρ 趋于取值很大的 ρ^* 时压强急剧增加. 附加项 $-a\rho^2$ 也仅在密度 ρ 很大时才变得重要, 利用这一项可以考虑分子之间的排斥力, 这种排斥力只有在高密度的条件下当分子互相靠近时才会出现.

从状态方程 (7.8) 与公式 (6.13) 可知

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T = -a, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\rho = c_V(T). \tag{7.9}$$

如果把其中第一个等式对 T 进行微分, 则显然范德瓦耳斯介质的热容 c_V 只与温度有关. 函数 c_V 由介质的性质决定. 当介质的模型固定时, 除了状态方程 (7.8), 还必须给出这个函数的形式.

从公式 (7.9) 可知, 范德瓦耳斯气体的内能由以下公式给出:

$$U = \int_{T_0}^{T} c_V(T)\,\mathrm{d}T - a\rho + \text{const} = \Phi\left[\frac{1}{\rho}(p+a\rho^2)(1-b\rho)\right] - a\rho. \tag{7.10}$$

函数 $\Phi(T)$ 以明显的方法通过函数 $c_V(T)$ 进行计算.

为了计算范德瓦耳斯介质的熵的微分, 由理想介质可逆过程的热力学第二定律及热流方程 (6.1) 和状态方程 (7.8) 易得公式

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}U}{T} + \frac{p}{T}\mathrm{d}\frac{1}{\rho} = \frac{c_V(T)\,\mathrm{d}T}{T} + \frac{R\,\mathrm{d}(1/\rho)}{1/\rho - b},$$

[1] 能斯特定理又称热力学第三定律, 它表明, 当温度 T 趋于 0 K 时, 所有可逆等温过程的熵不变. 因此, 熵在 $T \to 0$ K 时是一个常量, 可以选取为零. ——译注

所以

$$s = \int_{T_0}^{T} \frac{c_V(T)\,\mathrm{d}T}{T} + R\ln\frac{(1-b\rho)\rho_0}{\rho} + \mathrm{const}\,. \tag{7.11}$$

范德瓦耳斯气体的热力学势 F, i 与 Ψ 的公式直接得自其定义 (6.4), (6.6), (6.7), 熵的公式 (7.11), (7.10), 以及范德瓦耳斯气体的状态方程 (7.8).

压强只依赖于密度的介质 我们再研究双参量介质的一种一般情况, 其内能满足以下形式的公式:

$$U = f(\rho) + \varphi(s). \tag{7.12}$$

此时, 从状态方程 (6.2) 得

$$T = \varphi'(s), \quad p = \rho^2 f'(\rho). \tag{7.13}$$

因此, 在这种情况下的任何过程中, 压强只依赖于密度, 而温度只依赖于熵. 对于这样的介质, 普通的关系式 (7.13) 可以完全取代热流方程.

显然, 从公式 (7.12) 与 (7.13) 还可得出以下公式:

$$\begin{aligned} i &= f_1(p) + \varphi(s), \\ F &= f(\rho) + \omega(T), \\ \Psi &= f_1(p) + \omega(T). \end{aligned} \tag{7.14}$$

容易看出, 只要 (7.14) 中的一个公式成立, 就可得出 (7.14) 中的其他公式和公式 (7.12) 也成立.

还有一个明显的结论是, 如果在某种介质诸微元的所有可能的可逆过程中压强 p 只依赖于密度 ρ, 则由此可知, 温度只能依赖于熵, 而热力学势应满足公式 (7.12) 与 (7.14).

(C) 黏 性 流 体 模 型

黏性流体模型的定义 黏性流体 (见第四章) 是指这样一种介质, 其应力张量的分量与应变率张量的分量通过形如

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij}(e_{\alpha\beta}) \tag{7.15}$$

的关系式相联系, 式中 τ^{ij} 为黏性应力, $2e_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha$, 而 p 与 $e_{\alpha\beta}$ 无关.

如果 τ^{ij} 与 $e_{\alpha\beta}$ 的关系是线性的, 且流体是各向同性的, 则

$$\tau_{ij} = \lambda g_{ij}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} + 2\mu e_{ij}. \tag{7.16}$$

因此, 对于各向同性线性黏性流体,

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda g^{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}.$$

可以引入第二黏度 ζ

$$\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

来代替系数 λ. 系数 ζ, λ 与 μ 对不同介质是不同的, 它们可以是温度的函数, 也可以是给定介质的物理常量. 在某些应用中还需要研究这样一些介质, 其系数 λ 与 μ 是张量 e_{ij} 的某些标量不变量、温度 T 和其他一些热力学特征量的函数. 为简单起见, 我们以后将只研究对实际非常重要的一种黏性介质, 其系数 ζ, μ 为给定的常量.

为了定义黏性流体模型, 还应给出内能, 例如通过 ρ 与 s 的函数给出:

$$U = U(\rho,\ s).$$

此外, 还应当给出量 $\mathrm{d}q'$ 的有关信息, 因为黏性流体的运动一般而言是不可逆过程 ($\mathrm{d}q' \neq 0$).

众所周知, 黏度为常量的线性黏性流体的运动方程——纳维–斯托克斯方程——具有以下形式:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \nu\Delta\boldsymbol{v},$$

式中 $\nu = \mu/\rho$ 为运动黏度.

热流方程及热力学第二定律可以写为以下形式:

$$\mathrm{d}U = -\frac{\mathrm{d}A^{(\mathrm{i})}}{\mathrm{d}m} + T\,\mathrm{d}s - \mathrm{d}q'. \tag{7.17}$$

黏性流体中内力的功 我们来计算单位质量黏性流体中内应力的元功. 把 (7.15) 中的 p^{ij} 代入内面力的功的一般表达式, 得

$$\frac{\mathrm{d}A^{(\mathrm{i})}}{\mathrm{d}m} = -\frac{p^{ij}}{\rho}e_{ij}\,\mathrm{d}t = \frac{p}{\rho}g^{ij}e_{ij}\,\mathrm{d}t - \frac{\tau^{ij}}{\rho}e_{ij}\,\mathrm{d}t = \frac{p}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t - \frac{\tau^{ij}e_{ij}}{\rho}\,\mathrm{d}t.$$

由连续性方程 $\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v} = -\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t$, 有

$$\frac{\mathrm{d}A^{(\mathrm{i})}}{\mathrm{d}m} = p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} - \frac{\tau^{ij}e_{ij}}{\rho}\,\mathrm{d}t. \tag{7.18}$$

黏性流体中的压强与温度 从 (7.17) 和 (7.18) 得

$$\mathrm{d}U = -p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} + \frac{\tau^{ij}e_{ij}}{\rho}\,\mathrm{d}t + T\,\mathrm{d}s - \mathrm{d}q'. \tag{7.19}$$

按照定义, 我们认为在黏性可压缩流体 (黏性气体) 的任何过程中, 压强 p 与温度 T

就像在理想可压缩流体 (理想气体) 中那样由以下关系式确定[1]:

$$dU = -p\,d\frac{1}{\rho} + T\,ds, \tag{7.20}$$

即成立公式 (6.2)

$$p = -\left(\frac{\partial U}{\partial(1/\rho)}\right)_s, \quad T = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho.$$

引入类似模型的某种根据是, 黏性流体在静止时, 即当 $e_{ij} = 0$ 时, 其参量 p 与 ρ 应当等于静止的理想流体中的相应参量. 当流体像刚体那样运动时也是这样. 黏性应力只出现于有变形的运动.

黏性流体中的非补偿热的表达式

在我们引入的黏性流体模型中, 联系压强、温度、熵与内能的关系式与黏性无关. 比较方程 (7.19) 与 (7.20), 我们得到非补偿热的表达式:

$$dq' = \frac{\tau^{ij} e_{ij}}{\rho}\,dt, \tag{7.21}$$

它在非线性黏性流体的一般情况下也成立.

黏性流体中的机械能耗散

我们来证明, dq' 的存在导致黏性流体运动过程中机械能的耗散. 其实, 黏性流体的动能定理可以写为以下形式:

$$d\frac{v^2}{2} = \frac{dA^{(e)}}{dm} + p\,d\frac{1}{\rho} - \frac{\tau^{ij} e_{ij}}{\rho}\,dt.$$

量 $-\tau^{ij} e_{ij}\,dt/\rho = -dq'$ 是单位质量流体中黏性应力的功, 它永远是负的 (或者等于零, 若 $e_{ij} = 0$), 因为 $dq' \geqslant 0$. 所以, 黏性应力的功只能导致流体的动能减小.

黏度和第二黏度都是正数

对于各向同性线性粘性流体, 把纳维—斯托克斯定律 (7.16) 代入非补偿热的表达式 (7.21), 得

$$\begin{aligned} dq' = \frac{1}{\rho}\tau^{ij} e_{ij}\,dt &= \frac{dt}{\rho}\left[\left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)(e^{i}_{\cdot i})^2 + 2\mu e^{ij} e_{ij}\right] \\ &= \frac{dt}{\rho}\left[\zeta I_1^2 + 2\mu\left(I_2 - \frac{I_1^2}{3}\right)\right], \end{aligned} \tag{7.22}$$

式中 I_1 和 I_2 为应变率张量的第一和第二不变量, 由公式 $I_1 = g^{ij} e_{ij}$, $I_2 = e^{ij} e_{ij}$ 定义. 容易验算, 在应变率张量的主轴下可以把表达式 $I_2 - I_1^2/3$ 表示为平方和的形式, 即

$$I_2 - \frac{I_1^2}{3} = \left(e_1 - \frac{I_1}{3}\right)^2 + \left(e_2 - \frac{I_1}{3}\right)^2 + \left(e_3 - \frac{I_1}{3}\right)^2 \geqslant 0.$$

由此直接可知, 对于任意坐标系中的任意运动都有 $I_2 - I_1^2/3 \geqslant 0$. 因为式 (7.22) 可应用于任意的运动, 并且依条件知 ζ 与 μ 不依赖于 e_{ij}, 所以从热力学第二定律

[1] 这个重要假设称为吉布斯公式, 由此能够立刻建立起非补偿热 dq' 的公式.

($\mathrm{d}q' \geqslant 0$) 可知 $\zeta > 0, \mu > 0$.

其实, 如果在运动时每个流体微元的体积都不变, 则 $I_1 = 0, \mathrm{d}q' = 2\mu I_2 \,\mathrm{d}t/\rho \geqslant 0$. 但 $I_2 \geqslant 0$ 永远成立, 所以 $\mu > 0$. 当微元沿各个方向发生程度一致的压缩或膨胀时, 即当 $e_{ij} = eg_{ij}$ 时, 有 $I_2 - I_1^2/3 = 0, \mathrm{d}q' = \zeta I_1^2 \,\mathrm{d}t/\rho > 0$, 所以 $\zeta > 0$.

现在我们再来研究向连续介质物质体传递热量的问题.

热流矢量　向介质传递热量可以有不同的机理; 如热传导、辐射、电流、化学反应, 等等. 我们来考虑热传导过程, 即温度在物体中的不平衡分布所导致的热量传递过程. 此时, 对于取自介质的任何物质体 $\Delta\tau$, 热量只有通过其表面 Σ 才能进入其中. 因此, 我们有

$$\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} = \int\limits_{\Sigma} Q \,\mathrm{d}\sigma,$$

式中 Q 为物质体 $\Delta\tau$ 的表面 Σ 的点的某个函数. 由热流方程可知, 当 Σ 收缩至一点时, 量 $\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}$ 的量级为 $\Delta\tau \,\mathrm{d}t$, 即 $\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} = \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}\rho\,\Delta\tau$, 式中 $\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}$ 为 $\mathrm{d}t$ 量级的小量.

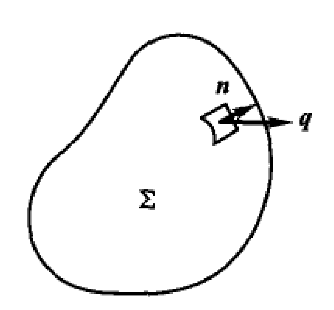


图 36. 热流矢量 $\boldsymbol{q}$ ($\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的单位外法向矢量)

由此可知[1], 曲面积分 $\int\limits_{\Sigma} Q \,\mathrm{d}\sigma$ 应可化为体积分, 即对于 Σ 上的量 Q 应当成立以下公式:

$$Q = -(q^1 n_1 + q^2 n_2 + q^3 n_3) \,\mathrm{d}t,$$

式中 n_i 为 Σ 的单位外法向矢量的协变分量. 因为 Q 是标量, 所以可以把有限的量 $q^i(x^1, x^2, x^3, t)$ 视为一个定义于介质中所有点的矢量 $\boldsymbol{q}$ 的逆变分量. 矢量 $\boldsymbol{q}$ 称为热流矢量. 该矢量表征热量传递的方向, 其大小等于单位时间内通过垂直于该方向的单位面积的热量. 在 $\mathrm{d}t$ 时间内通过任意方向的面微元 $\mathrm{d}\sigma$ 的热量显然等于 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} \,\mathrm{d}\sigma \,\mathrm{d}t$ ($\boldsymbol{n}$ 为 $\mathrm{d}\sigma$ 的法线), 而进入物质体 V 的总热流 $\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}$ 可以表示为以下形式 (图 36):

$$\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} = -\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} \,\mathrm{d}\sigma \,\mathrm{d}t,$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 Σ 的外法线. 按奥—高定理,

$$\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} = -\int\limits_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{q} \,\mathrm{d}\tau \,\mathrm{d}t.$$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内, 进入无穷小物质体 $\mathrm{d}\tau$ 的热量等于 $\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} = -\operatorname{div} \boldsymbol{q} \,\mathrm{d}\tau \,\mathrm{d}t$, 而进入单位质量介质的热量则等于

$$\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{q} \,\mathrm{d}t.$$

[1] 得到这个结论的方法与得到第三章中 $\boldsymbol{p}_n$ 的公式 (2.4) 的方法相同.

傅里叶热传导定律 确定矢量 $\boldsymbol{q}$ 的定律可能各不相同. 一个基本的、使用最广泛的定律是傅里叶热传导定律, 其形式为:

$$\boldsymbol{q} = -\varkappa \operatorname{grad} T.$$

该定律的正确性在许多实际情况下都得到证实.

热流矢量与温度梯度自然具有相反的方向, 所以 $\varkappa > 0$. 系数 $\varkappa$ 称为热导率. 可以研究一些重要的特例, 这时系数 $\varkappa$ 是常量, 或者是温度 T 的函数.

热传导服从傅里叶定律时的热流表达式 我们来研究 $\varkappa = \mathrm{const}$ 这一在实际中非常重要的简单情形. 这时, 对于单位质量介质所接受的热流 $\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}$, 得

$$\frac{\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}}{\mathrm{d}t} = \frac{\varkappa}{\rho} \operatorname{div} \operatorname{grad} T = \frac{\varkappa}{\rho} \nabla_i g^{ij} \nabla_j T = \frac{\varkappa}{\rho} \nabla_i \nabla^i T,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}}{\mathrm{d}t} = \frac{\varkappa}{\rho} \Delta T,$$

式中 ΔT 表示对温度取拉普拉斯算子. 在笛卡儿坐标系中

$$\frac{\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}}{\mathrm{d}t} = \frac{\varkappa}{\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

黏性导热流体的热流方程 因此, 若热流是由服从傅里叶定律的热传导引起的, 则黏性流体的热流方程具有以下形式:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \tau^{ij} e_{ij} + \frac{\varkappa}{\rho} \Delta T, \tag{7.23}$$

或者, 根据 (7.20),

$$T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho} \tau^{ij} e_{ij} + \frac{\varkappa}{\rho} \Delta T.$$

对于满足纳维—斯托克斯定律的流体, 利用 (7.22) 还可把此方程写为以下形式:

$$T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\zeta}{\rho} (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 + \frac{2\mu}{\rho} \left[e^{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 \right] + \frac{\varkappa}{\rho} \Delta T. \tag{7.24}$$

上述方程可以用来确定温度在流体中的分布. 这时, 内能 U 或熵 s 应当是温度与密度的已知函数. 例如, 若

$$U = \int c_V \, \mathrm{d}T + \mathrm{const},$$

则在笛卡儿坐标系中有

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = c_V \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = c_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right),$$

而热流方程 (7.23) 在介质静止时等同于通常的热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\rho c_V} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

黏性流体运动的封闭方程组 若外力已经给定, 则纳维—斯托克斯方程、连续性方程、热流方程 (7.24) 与状态方程组成了描述可压缩 (线性各向同性) 黏性导热流体运动的封闭方程组. 黏性导热完全气体模型可以作为黏性可压缩介质模型的一个例子, 其中

$$U = c_V T + \text{const}, \quad p = \rho RT.$$

我们详细研究了液体和气体的某些重要的模型. 以后还将详细研究可变形固体的某些最重要的模型, 例如弹性体模型.

§8. 连续介质物质体的热力学第一与第二定律 · 某些不可逆过程的熵产生

连续介质物质体的热力学第一与第二定律 现在我们对介质的有限物质体写出积分形式的热力学第一与第二定律. 为简单起见, 我们仅限于内能与熵的可加性假设, 即假设它们对有限物质体诸微元的质量是可加的. 根据前面发展起来的理论, 这些方程可以写为以下形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V \rho\left(\frac{v^2}{2}+U\right)\mathrm{d}\tau = \int\limits_V \rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_\Sigma \boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma - \int\limits_\Sigma q_n^*\,\mathrm{d}\sigma + \int\limits_V \frac{\mathrm{d}q_{\text{mass}}^*}{\mathrm{d}t}\rho\,\mathrm{d}\tau, \tag{8.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V s\rho\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_V \frac{1}{T}\left(\frac{\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t}\right)\rho\,\mathrm{d}\tau, \tag{8.2}$$

式中 V 为运动的有限物质体, 并且在外部能量流中把通过物质体 V 的表面 Σ 的能量流提取出来, 用矢量 $\boldsymbol{q}^*$ 来定义. 在该矢量 ($\boldsymbol{q}^*$) 的记号中, 星号表示这是与机械力做功无关的全部能量流 (既包括热流, 也包括形式与热流不同的能量流). 在 (8.1) 中, 含有 $\mathrm{d}q_{\text{mass}}^*/\mathrm{d}t$ 的附加项确定了单位质量介质所接受的外部能量流, 这可以是焦耳热, 外质量力偶的功, 等等. 其他记号的含义如前所述.

热传导是不可逆过程 考虑静止物体中的热传导过程. 同前面的个别例子 (见本章 §5) 一样, 我们认为此时 $\mathrm{d}q'=0$, 于是

$$T\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}t. \tag{8.3}$$

此式对静止黏性导热流体成立. 这时用奥—高公式进行变换, 方程 (8.2) 给出

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\int\limits_V \frac{1}{T}\operatorname{div}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\tau = -\int\limits_\Sigma \frac{q_n}{T}\mathrm{d}\sigma + \int\limits_V \left(\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{T}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{8.4}$$

此式在条件 (8.3) 下对介质的给定部分与外部物体之间的任何热交换都成立.

根据 (8.4), 当 $q_n \neq 0$ 时, 积分 $-\int\limits_{\Sigma} \frac{q_n}{T}\,\mathrm{d}\sigma$ 既能导致熵增加, 也能导致熵减少. 如果物体是隔热的, 这就表明在其表面 $q_n = 0$, 但在物体内部, 矢量 $\boldsymbol{q}$ 却可能因温度分布不均而不等于零. 因此, 对隔热物体可得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\int\limits_V \frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad}T}{T^2}\mathrm{d}\tau. \tag{8.5}$$

此时, 量 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t$ 永远大于零, 因为热传导导致熵增加. 于是, 根据热力学第二定律, 矢量 $\boldsymbol{q}$ 与 $\operatorname{grad}T$ 的标积永远是负的.

由傅里叶定律, $\boldsymbol{q} = -\varkappa\operatorname{grad}T$, $\varkappa > 0$. 式 (8.5) 在傅里叶定律成立时具有以下形式:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \int\limits_V \frac{\varkappa}{T^2}|\operatorname{grad}T|^2\mathrm{d}\tau.$$

因此, 尽管在整体上没有外部热流进入物体, 在 $T\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}$, $\mathrm{d}q' = 0$ 的条件下却可得出, 物体整体的熵是增加的. 上述讨论推广了本章 §5 中给出的例子.

从上述讨论可知, $\mathrm{d}q' = 0$ 的条件不是过程可逆的充分条件.

不可逆性判据

为了得到过程可逆的充分判据, 可以采用以下方法. 令[1]

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d_e}S + \mathrm{d_i}S, \tag{8.6}$$

式中 $\mathrm{d}S$ 为熵的微分, $\mathrm{d_e}S$ 与 $\mathrm{d_i}S$ 为无穷小量, 并且 $\mathrm{d_e}S$ 用来确定外部熵流所导致的熵变化, 它是因为与外部物体进行热量与质量的交换而形成的, 可能具有任意符号. 量 $\mathrm{d_i}S$ 给出内部不可逆过程所导致的熵增, 并且按照热力学第二定律, 这一项在存在不可逆性时严格为正, 而对可逆过程 $\mathrm{d_i}S = 0$. 在上述例子中, 对于整体上的物体, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d_e}S}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d_i}S}{\mathrm{d}t} = -\int\limits_{\Sigma}\frac{q_n}{T}\mathrm{d}\sigma - \int\limits_V \frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad}T}{T^2}\mathrm{d}\tau.$$

根据上面给出的定义, 必须令

$$\frac{\mathrm{d_e}S}{\mathrm{d}t} = -\int\limits_{\Sigma}\frac{q_n}{T}\mathrm{d}\sigma = -\int\limits_V \operatorname{div}\frac{\boldsymbol{q}}{T}\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\frac{\mathrm{d_i}S}{\mathrm{d}t} = -\int\limits_V \frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad}T}{T^2}\mathrm{d}\tau,$$

由此可得熵变化密度

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d_e}s + \mathrm{d_i}s,$$

[1] 公式 (8.6) 和 $\mathrm{d_i}S \geqslant 0$ (当且仅当过程可逆时取等号) 是热力学第二定律的现代表述, 其中 $\mathrm{d_e}S$ 称为熵流, $\mathrm{d_i}S$ 称为熵产生. 有时, 熵流和熵产生也特指其密度 $\mathrm{d_e}s$, $\mathrm{d_i}s$ 或相应量的时间变化率. ——译注

式中

$$\mathrm{d_e}s = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{q}}{T}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d_i}s = -\frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad}T}{\rho T^2}\mathrm{d}t.$$

从这些公式可知, 在一般情况下 $T\,\mathrm{d_i}s \neq \mathrm{d}q'$. 有时, 例如在没有温度梯度的某些情况下, $T\,\mathrm{d_i}s = \mathrm{d}q'$ 能够成立[1].

熵产生 $\mathrm{d_i}s$ 的公式 确定量 $\mathrm{d_e}s$ 与 $\mathrm{d_i}s$ 的公式通常具有以下形式:

$$\rho\frac{\mathrm{d_e}s}{\mathrm{d}t} = \rho\left(\frac{\mathrm{d_e}s}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{mass}} - \operatorname{div}\boldsymbol{S},$$
$$\rho\frac{\mathrm{d_i}s}{\mathrm{d}t} = \sigma = \sum_\alpha X_\alpha\chi^\alpha \geqslant 0, \tag{8.7}$$

式中 $\boldsymbol{S}$ 为熵流矢量, σ 确定了因内部过程而导致的熵的不可逆增长率, χ^α 称为广义热力学流, 而 X_α 称为广义热力学“力”. 对于静止介质中的热传导, 我们有

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{q}}{T}, \quad \chi^\alpha = q^\alpha, \quad X_\alpha = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^\alpha}.$$

对于黏性导热流体的运动, (8.7) 中 $\mathrm{d_i}s/\mathrm{d}t$ 的公式具有以下形式:

$$\rho\frac{\mathrm{d_i}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\tau^{ij}e_{ij}}{T} - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad}T}{T^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t} - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad}T}{T^2} = X^{ij}\chi_{ij} + X_k\chi^k,$$
$$X^{ij} = \frac{\tau^{ij}}{T}, \quad \chi_{ij} = e_{ij}, \quad X_k = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^k}, \quad \chi^k = q^k.$$

在许多情况下, 可以假设流 χ^α 与“力” X_α 之间存在联系. 纳维–斯托克斯定律与傅里叶定律就是联系广义热力学流与广义热力学“力”的特例.

X_α 与 χ^α 之间的关系称为动理关系[2]. 纳维–斯托克斯定律

$$\tau^{ij} = A^{ijkl}e_{kl}, \quad 即 \quad X^{ij} = \frac{A^{ijkl}\chi_{kl}}{T}$$

和傅里叶定律[3]

$$q^i = -\varkappa^{ij}\frac{\partial T}{\partial x^j}, \quad 即 \quad \chi^k = T^2\varkappa^{kl}X_l$$

---

[1] 其实, 由非补偿热的定义 (6.15) 或 (8.2) 可知, 在一般情况下

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\int_\Sigma \frac{q_n}{T}\mathrm{d}\sigma - \int_V \frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad}T}{T^2}\mathrm{d}\tau + \int_V \frac{\rho}{T}\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau,$$

所以熵产生与非补偿热的关系为

$$\frac{\mathrm{d_i}s}{\mathrm{d}t} = -\frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad}T}{\rho T^2} + \frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t}$$

(原书第四版在正文中给出了这个公式), 即 $\mathrm{d}q'/T$ 只是熵产生的一部分. ——译注

[2] 动理关系也称唯象关系, 式 (8.8) 中的动理系数 $L_{\alpha\beta}$ 也称唯象系数. ——译注

[3] 这是傅里叶定律 $q^i = -g^{ij}\varkappa\partial T/\partial x^j$ 向各向异性情况的推广. ——译注

都是动理关系的例子. 若一种介质中的过程是不可逆的, 则在决定其数学模型的一组关系式中一定包括 $\mathrm{d_i}s/\mathrm{d}t$ 的表达式和动理关系, 它们是在实验结果与各种原理的基础上提出的.

昂萨格倒易关系 在许多模型中, 广义热力学力被认为是广义热力学流的线性函数:

$$X_\alpha = \sum_\beta L_{\alpha\beta}\chi^\beta, \tag{8.8}$$

式中 $L_{\alpha\beta}$ 在一般情况下是状态参量的函数, 称为动理系数. 昂萨格倒易关系——动理系数的对称性原理[1)]——指出, 如果在 $L_{\alpha\beta}$ 的自变量中没有轴矢量, 则

$$L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha},$$

而如果耗散过程与轴矢量 $\boldsymbol{B}$ (例如磁场强度) 有关, 即 $L_{\alpha\beta}$ 与轴矢量 $\boldsymbol{B}$ 有关, 则昂萨格倒易关系表明

$$L_{\alpha\beta}(\boldsymbol{B}) = L_{\beta\alpha}(-\boldsymbol{B}).$$

耗散函数 在 χ^α 与 X_β 之间存在联系[2)] 的一般情况下, 量 σ 可以视为 χ^α 或 X_β 的函数, 即

$$\sum_\alpha X_\alpha\chi^\alpha = \sigma(X_\beta) = \sigma(\chi^\alpha). \tag{8.9}$$

我们将把 σ 称为耗散函数. 例如, 对于黏性导热流体, 基于傅里叶定律与纳维一斯托克斯定律可得以下公式:

$$\sigma = \varkappa\frac{|\operatorname{grad} T|^2}{T^2} + \frac{1}{T}\left\{\zeta(e^{i}_{\cdot i})^2 + 2\mu\left[e^{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}(e^{i}_{\cdot i})^2\right]\right\}.$$

在不可逆过程的许多理论中假设以下公式成立 (它们不能直接得自 (8.9)):

$$X_\alpha = \lambda\frac{\partial\sigma}{\partial\chi^\alpha}, \quad \chi^\alpha = m\frac{\partial\sigma}{\partial X_\alpha}, \tag{8.10}$$

式中 λ 与 m 为某些标量函数. 根据 (8.9), 它们满足以下公式:

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sum\limits_\alpha \chi^\alpha\dfrac{\partial\sigma}{\partial\chi^\alpha}}, \quad m = \frac{\sigma}{\sum\limits_\alpha X_\alpha\dfrac{\partial\sigma}{\partial X_\alpha}}. \tag{8.11}$$

由 (8.10) 与等式

$$\mathrm{d}\sigma = \sum_\alpha(\chi^\alpha\,\mathrm{d}X_\alpha + X_\alpha\,\mathrm{d}\chi^\alpha) \quad (\mathrm{d}\sigma \neq 0) \tag{8.12}$$

---

1) 动理系数的对称性表明, 如果热力学流 χ^β 对热力学力 X_α (或者说力 X_α 对流 χ^β) 有贡献, 则热力学流 χ^α 对热力学力 X_β (或力 X_β 对流 χ^α) 也有贡献, 并且贡献方式是相同的. 例如, 热流与物质流的相互作用就体现了这种交叉影响: 温度梯度不但引起热流, 还会引起扩散, 这种效应称为热扩散效应; 同样, 扩散过程也伴随着热量的传递. ——译注

2) 对于所有可能的连续介质模型, χ^α 与 X_β 之间的有限关系式不一定都存在.

可知

$$\lambda + m = 1.$$

根据 (8.12) 容易看出, 从 (8.10) 中的一个等式即可得出另一个等式, 如果假设所有微分 $\mathrm{d}X_\alpha$ 与相应微分 $\mathrm{d}\chi^\alpha$ 在变量 X_α 或 χ^α 的某些取值区间上是线性无关的. 若存在以下形式的约束:

$$f_\omega(X_\beta) = 0, \quad \omega \geqslant 1 \quad 或 \quad \varphi_\varkappa(\chi^\beta) = 0, \quad \varkappa \geqslant 1,$$

这个假设就不再成立. 在一般情况下, 如果知道函数 σ 依赖于 χ^α, 则 (8.10) 中的第一个等式在 $\sum\limits_\alpha \chi^\alpha \partial\sigma/\partial\chi^\alpha \neq 0$ 时可以替换为

$$X_\alpha = \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial \chi^\alpha} + \Omega_\alpha,$$

并且从 (8.9) 与 (8.11) 可得

$$\sum_\alpha \Omega_\alpha \chi^\alpha = 0. \tag{8.13}$$

量 Ω_α 可以视为"力" X_α 中不引起耗散的部分. 如果

$$\Omega_\alpha = \sum_\beta k_{\alpha\beta} \chi^\beta,$$

式中 $(k_{\alpha\beta})$ 为任意反对称矩阵 $(k_{\alpha\beta} = -k_{\beta\alpha})$, 则式 (8.13) 恒成立.

当 χ^β 之间存在约束时, 在模型的定义中可以引入一些满足式 (8.13) 的非零量 Ω_α, 并且它们满足 (8.13) 的唯一原因是约束方程

$$\varphi_\varkappa(\chi^\beta) = 0, \quad \varkappa = 1,\ 2,\ \cdots,\ s\ (s \geqslant 1).$$

如果耗散函数是其自变量的齐次函数, 则根据齐次函数的欧拉定理, λ 与 m 为常数. 如果耗散函数是其自变量的二次型, 则

$$\lambda = m = \frac{1}{2}.$$

此时, 式 (8.10) 确定了"力" X_α 与流 χ^α 之间的线性关系. 当 σ 是 χ^α 的二次型时, 从式 (8.10) 可知, 这些线性关系的系数矩阵是对称的, 这与昂萨格倒易关系一致. 所以, 假设动理关系在非线性情况下具有 (8.10) 的形式, 可以视为昂萨格倒易关系的推广.

我们将在本书第二卷中证明, 在理想塑性理论中可以研究这样的关系式 (8.7), 其中函数 σ 是 χ^α 的一阶齐次函数; 此时 $\lambda = 1$, 公式 $X_\alpha = \partial\sigma/\partial\chi^\alpha$ 能够成立, 但是量 X_α 由形如 $f_\omega(X_\beta) = 0, \omega \geqslant 1$ 的约束相关联. 与 (8.10) 相比, χ^α 的相应公式的形式则有所变化. 关于昂萨格倒易关系, 还可参见本章 §11.

§9. 考虑组元化学反应与扩散的液体或气体混合物模型理论引论

混合物整体运动问题的提法 在许多重要现象中需要研究混合物的运动过程, 这种运动伴随有化学变化、相变或其他某些变化, 以及扩散现象. 组成混合物的或者是不同的气体和液体, 或者是含有固体微粒的气体和液体, 或者仅仅是一些液体, 而扩散则是组成混合物的那些物质的内部相对运动. 相应过程在某些情况下可以认为是可逆的, 然而在一般情况下就需要考虑不可逆性与力和能量的各种内部相互作用. 为了描述相应的现象, 可以建立不同的模型来分别处理具有相应物理化学变化的某类混合物与运动.

下面在建立个别模型时, 我们将从多组元连续介质[1] 这样一种问题的提法出发, 见第三章 §1. 因此, 对于体积为 ΔV 的无穷小区域, 我们对组成混合物的 N 种不同组元引入相应的组元质量 $m_i = \rho_i \Delta V$ 与扩散流矢量 $\boldsymbol{I}_i = \rho_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v})$, 这些组元定义为同时占据同一个区域, 但在物理或化学上不同的、一般相互发生反应的物质.

混合物宏观微元的特征量 在一般情况下, 为了描述混合物组元之间的相互作用, 需要定义并选出表征各组元和混合物整体的重要性质的一些参量. 所谓重要性质, 是指那些在所用观点和相应要求下对描写和表述基本规律起本质作用的力学、物理学和化学性质, 而这些观点和要求决定于如何提出所研究的问题. 例如, 可以引入以下参量作为这样的主定与被定参量: 混合物的质量熵 s, 混合物整体的密度 ρ, 混合物各组元的密度 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_N$. 当混合物微元的不同组元处于热力学非平衡态, 但相同组元处于热力学平衡态的时候, 可以把各组元的绝对温度 $T_1, T_2, \cdots, T_N$ 用作状态特征量[2]. 可以加入此列的还有前面已经引入并研究过的表征微元变形性质的几何与运动学特征量, 而如果考虑组元的扩散, 则还有诸如扩散流失量 $\boldsymbol{I}_i$ 等特征量. 在许多实例中, 组元的原子与分子的一些特征量是非常重要的参量, 例如在发生电离时, 它们的电荷量与电磁场特征量, 或者分子与原子的激发态能量, 等等. 在一般情况下, 为了表述相互作用与能量输运的定律和动理方程, 不仅需要考虑上述参量的取值, 一般而言还要考虑它们的各种梯度, 即它们对坐标与时间的各阶导数.

建立混合物模型也可用于研究等离子体运动的现象, 因为等离子体是离子、电子与中性粒子的混合物. 对等离子体而言, 非常重要的是宏观的电磁场相互作用, 包括在等离子体微元内部各组元之间的相互作用和微元作为混合物在整体上与外部电磁场的相互作用.

混合物在宏观上可以视为一种具有复杂性质的介质, 其性质由一组内部参量来表征, 这些参量首先可以包含混合物各组元的密度值 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_N$. 为了确定一个

[1] 在某些情况下, 下述理论的部分结论也可应用于混合物组元占据相邻区域的情况.

[2] 占据同一区域的不同组元, 其中每一组元在诸微元内部的温度是平衡的, 但不同组元在微元内的温度不平衡, 这是一个相当强的假设. 在所研究的现象中, 这个假设的正确性必须通过额外的物理方法加以证实.

混合物模型, 除了前面已经建立起来的普适的力学方程与热力学方程, 还必须进一步建立一些方程来表述用来确定内部状态特征量的定律, 例如用来确定组元密度 ρ_i 的方程.

混合物组元的质量守恒方程

在一般情况下, 除了速度 $\boldsymbol{v}$ 与密度 ρ 的力学方程, 还可以写出在第三章 §1 中建立的包含密度 ρ_i 与混合物整体速度 $\boldsymbol{v}$ 的质量守恒方程, 这些方程[1] 具有以下形式:

$$\frac{1}{\Delta V}\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho_i}{\mathrm{d}t} + \rho_i \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \varkappa_i - \operatorname{div} \boldsymbol{I}_i. \tag{9.1}$$

量 $\varkappa_i \Delta V$ 与 $\operatorname{div} \boldsymbol{I}_i \Delta V$ 确定了在整体混合物的运动物质体 ΔV 中, 序号为 i 的组元的质量 m_i 在单位时间内因物理化学变化和扩散而导致的增量. 为了从 (9.1) 得出 ρ_i 或质量分数 c_i 的实际方程, 必须先要得出 $\varkappa_i$ 与 $\boldsymbol{I}_i$ 所满足的一些物理化学定律. 而为了确定符合实际情况的 $\varkappa_i$ 与 $\boldsymbol{I}_i$ 的定律, 则必须先以一些假设为基础, 然后再通过应用 (9.1) 的实验来检验这些假设, 这类似于使用动力学第二定律来建立那些决定力对相互作用的类型与条件的关系的定律.

物理化学变化的质量守恒方程

例如在化学中, 当发生相变与化学反应时, 基本的质量守恒方程就是这样建立起来的: 首先在不考虑运动的情况下建立方程, 然后将其外推至运动的情况. 这些方程具有以下形式:

$$\varkappa_i = \frac{1}{\Delta V}\frac{\mathrm{d}m_i^1}{\mathrm{d}t} = M_i \sum_{\alpha=1}^{r} \nu_{i\alpha} w_\alpha, \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N, \tag{9.2}$$

式中, r 为同时进行的独立的[2] 反应或相变的数目; 量 $\mathrm{d}m_i^1/\mathrm{d}t$ 给出了在给定体微元 ΔV 中序号为 i 的物质组元的质量 m_i 在单位时间内因物理化学变化而导致的增量; M_i 为摩尔质量; $\nu_{i\alpha}$ 为化学计量数, 它们对反应物为负, 对产物为正, 此时以满足条件 $w_\alpha > 0$ 的方向为反应的正方向; 若序号为 i 的给定组元不参加序号为 α 的反应, 则 $\nu_{i\alpha} = 0$; 乘积 $M_i\nu_{i\alpha}$ 确定参加序号为 α 的反应的相应组元的质量比例; 量 w_α 表征该混合物中序号为 α 的反应进行的快慢[3]. 显然, 在所研究的反应中, 混合物组元在单位时间和单位体积中的质量增量正比于量 w_α. 若序号为 α 的反应正在进行, 则 $w_\alpha \neq 0$, 否则 $w_\alpha = 0$.

---

[1] 在应用中可以把组元的密度 ρ_i 替换为质量分数 $c_i = \rho_i/\rho$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$, 这样处理经常更为方便. 显然, c_i 满足以下方程:

$$\frac{1}{\Delta V}\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} = \rho\frac{\mathrm{d}c_i}{\mathrm{d}t} = \varkappa_i - \operatorname{div} \boldsymbol{I}_i, \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N.$$

[2] 每个独立的反应都对应着含有不同组元的不同反应方程式, 一般而言, 这样的反应在所有其余的反应都停止时仍可发生.

关于平衡态下独立反应的可能数目和独立相变的可能数目 (吉布斯相律) r 的问题是在物理化学中进行研究的.

[3] 量 w_α 称为第 α 个化学反应的反应速率, 它与化学反应方程式的写法有关. 若反应方程式为 $0 = \sum\limits_i \nu_{i\alpha} B_i$, 则定义 $w_\alpha = \dfrac{1}{\nu_{i\alpha}\Delta V}\dfrac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t}$, 式中 n_i 为体微元 ΔV 中组元 B_i 的物质的量. ——译注

混合物整体和单独每一个反应的质量守恒定律给出下述关系式:

$$\sum_{i=1}^{N} \varkappa_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{N} M_i \nu_{i\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,\ 2,\ \cdots,\ N.$$

式 (9.2) 给出量 $\varkappa_i$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ 通过反应速率 w_α $(\alpha = 1, 2, \cdots, r)$ 的表达式. 根据 (9.2), 确定函数 $\varkappa_i$ 的问题归结为建立反应速率 w_α 这 r 个函数所满足的额外的一些物理化学定律. 当 $r < N$ 时, 对 $\varkappa_i$ 的额外关系式的数目依照 (9.2) 可减少 $N - r$ 个.

若在 N 组元混合物 $(N \geqslant 0)$ 中只发生组元 1 与组元 2 之间的一种相变, 并且两相的摩尔质量[1)] 相同, 则

$$r = 1, \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N, \quad M_1 = M_2 = M,$$

$$\nu_{11} = -1, \quad \nu_{21} = 1, \quad \nu_{31} = \cdots = \nu_{N1} = 0,$$

$$\varkappa_1 = -Mw_1, \quad \varkappa_2 = Mw_1, \quad \varkappa_3 = \cdots = \varkappa_N = 0.$$

再考虑一个例子. 假设在氢气 H_2 (摩尔质量 $M_1 = 2\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$)、氧气 O_2 (摩尔质量 $M_2 = 32\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$)、水蒸气 H_2O (摩尔质量 $M_3 = 18\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$) 和某种惰性气体所组成的混合物中只发生产物为水蒸气的唯一一种化学反应, 其化学方程式为

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O.$$

此时显然有以下数值与关系式:

$$r = 1, \quad N = 4, \quad \nu_{11} = -2, \quad \nu_{21} = -1, \quad \nu_{31} = 2, \quad \nu_{41} = 0,$$

$$\varkappa_1 = -2M_1w_1, \quad \varkappa_2 = -M_2w_1, \quad \varkappa_3 = 2M_3w_1, \quad \varkappa_4 = 0.$$

对于不可逆过程, 速率 w_α 对决定混合物状态和成分的参量的依赖关系称为化学反应的动理方程, 而如果组元质量分布发生变化的原因并不是因为组成这些组元的粒子的本质发生变化, 则上述依赖关系称为物理过程的动理方程. 如果根据一些附加的定律或数据得以确定量 ρ_i 与 $\boldsymbol{v}$ 对某些参量的依赖关系, 并且质量守恒方程成立, 则在没有扩散时, 量 w_α 在 $r < N$ 时可以从 (9.2) 与 (9.1) 求出. 下文表明, 当物理化学变化以可逆方式进行时就是这样.

关于扩散流失量 $\boldsymbol{I}_i$ 由哪些定律来决定的问题是不可逆过程热力学所关注的核心; 下面之所以研究这些定律, 是因为它们关系到能量内部耗散所致熵产生的公式.

[1)] 原文在这里和下文中使用的是分子量 (现称相对分子质量) 而不是摩尔质量. 为了与式 (9.2) 中的 M_i 的含义保持一致, 译文将分子量改为摩尔质量, 并对相关表达式进行了调整. ——译注

混合物整体的内能 引入一个具体的混合物模型主要关系到选出主定参量组, 并把混合物整体的内能通过这些参量的一个固定的函数确定下来. 在 §6 中研究了双参量理想可压缩流体, 其微元的内能正比于微元的质量 m 并通过质量熵 s 与密度 ρ 的某个函数确定. 在研究混合物整体的时候, 作为一个基本假设, 可以认为混合物微元的内能 U_m 具有以下形式:

$$U_m = U_m(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N,\ \chi^1,\ \chi^2,\ \cdots,\ \chi^l), \tag{9.3}$$

式中 $\chi^1, \chi^2, \cdots, \chi^l$ 为表征混合物内部过程和状态的某些参量. 例如, 这可以是组元的各种温度, 组元内部宏观相对运动的一些特征量, 还包括扩散流矢量或者组元的位置与结构所导致的相互作用特征量, 混合物各组元的应变张量的分量, 表征组元电磁性质的参量, 以及其他一些量. 可以研究因参量 χ^i 变化而导致的内能变化, 这种变化与组元因为扩散而发生相对运动时各组元之间的内部宏观相互作用质量力做功有关.

如果简化函数 (9.3) 的形式, 利用以下基本假设即可给出在 §6 中研究过的双参量理想介质模型向混合物的一种最简单的推广:

$$U_m = U_m(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N). \tag{9.4}$$

在公式 (9.4) 中没有 χ^i 之类的其他参量, 从而导致一系列简化, 但与此同时也使某些效应无法研究, 这些效应可能在实际现象中出现于具有复杂性质的混合物中, 例如等离子体.

根据公式 (9.4) 可以写出:

$$\mathrm{d}U_m = \frac{\partial U_m}{\partial s}\,\mathrm{d}s + \frac{\partial U_m}{\partial (1/\rho)}\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial U_m}{\partial m_k}\,\mathrm{d}m_k. \tag{9.5}$$

在公式 (9.4) 和 (9.5) 中, 自变量与微分 $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}\dfrac{1}{\rho}$ 以及 N 个微分 $\mathrm{d}m_k$ 可以认为是独立的, 它们在某些范围内是任意的.

按照公式 (9.5) 计算的增量 $\mathrm{d}U_m$ 可以对应于物质微元在运动过程中内能的变化, 或者一个微元相对于另一个微元的 U_m 的变化, 乃至一般而言许多其他实际情况下的这种变化. 由公式 (9.4) 和 (9.5), 可以考察以下函数:

$$\begin{aligned}
m\theta(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N) &= \left(\frac{\partial U_m}{\partial s}\right)_{\rho,\, m_k}, \\
mp'(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N) &= -\left(\frac{\partial U_m}{\partial (1/\rho)}\right)_{s,\, m_k}, \\
\mu'_k(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N) &= \left(\frac{\partial U_m}{\partial m_k}\right)_{s;\, \rho,\, m_{i\neq k}},
\end{aligned} \tag{9.6}$$

式中[1])

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_N.$$

根据双参量介质中的可逆过程在 $dq^{**}=0$ 时的公式 (6.2), 成立等式 $\theta = T$ 和 $p' = p$, 式中 T 为绝对温度, p 为压强. 显然, 当过程可逆并且 $m_k = \text{const}$ 和 $dq^{**}=0$ 成立时, 上述情况下的 θ 与 p' 也具有同样的含义.

在更一般的情况下, 对于不可逆过程, 当 m_k 是变量并且 dq^{**} 不等于零时, 公式 (9.6) 在 $\theta = T$ 和 $p' = p$ 时可以视为温度与压强在这些复杂情况下的定义. 函数 (9.4) 由实验数据确定, 进而可以通过实验确定函数 $\theta(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N)$, $\theta(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N)$ 与 $\mu'_k(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N)$, 它们应满足可积条件.

函数

$$\mu_k = \mu'_k - \theta s + \frac{p'}{\rho} \tag{9.7}$$

称为化学势. 根据 (9.5) 和 (9.6) 不难检验, 成立以下公式[2]:

$$\mu_k = \left(\frac{\partial U_m}{\partial m_k}\right)_{S_m,\Delta V, m_{i\neq k}}, \tag{9.8}$$

式中

$$S_m = ms, \quad \Delta V = \frac{m}{\rho}.$$

混合物的自由能与吉布斯热力学势 为了更详细地解释量 μ_k 的物理意义, 除了混合物微元的内能 U_m, 我们还考虑由以下公式定义的自由能 F_m 与热力学势 Ψ_m:

$$\begin{aligned} &F_m(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N) = U_m - m\theta s, \\ &\Psi_m(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N) = U_m - m\theta s + m\frac{p'}{\rho}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

根据公式 (9.6), 可以在函数 F_m 与 Ψ_m 中分别引入自变量 ρ, θ 与 θ, p' 来代替自变量 s, ρ.

[1]) 在这里和后面的公式中, 下标 $m_{i\neq k}$ 是 $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_{k-1},\ m_{k+1},\ m_{k+2},\ \cdots,\ m_N$ 的简写, 表示在这些量不变时求偏导数. 这是为准确起见由译者添加的. ——译注

[2]) 公式 (9.8) 也可视为化学势的定义, 式中 $U_m = U_m(S_m,\ \Delta V,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N)$. 此外, 由于在化学中使用物质的量 (单位为摩尔) 来度量物质的多少比使用质量更加方便, 所以常常也将以下量定义为化学势:

$$\tilde{\mu}_k = \left(\frac{\partial U_m}{\partial n_k}\right)_{S_m,\ \Delta V,\ n_{i\neq k}} = M_k \mu_k,$$

式中 $U_m = U_m(S_m,\ \Delta V,\ n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_N)$, $n_i = m_i/M_i$ 为第 i 种组元的物质的量. 此外, 化学势还可等价地通过自由能 F_m 和热力学势 Ψ_m 来定义, 见 (9.10) 和 (9.11). ——译注

根据公式 (9.9) 容易直接验证, 成立公式[1)]

$$\mu_k = \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial m_k}\right)_{p',\,\theta,\,m_{i\neq k}} = \left(\frac{\partial U_m}{\partial m_k}\right)_{s,\,\rho,\,m_{i\neq k}} - \theta s + \frac{p'}{\rho} = \left(\frac{\partial F_m}{\partial m_k}\right)_{\rho,\,\theta,\,m_{i\neq k}} + \frac{p'}{\rho}, \quad (9.10)$$

$$\mu_k = \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial m_k}\right)_{p',\,\theta,\,m_{i\neq k}} = \left(\frac{\partial U_m}{\partial m_k}\right)_{S_m,\,\Delta V,\,m_{i\neq k}} = \left(\frac{\partial F_m}{\partial m_k}\right)_{\theta,\,\Delta V,\,m_{i\neq k}}. \quad (9.11)$$

在某些情况下, 在实验中确定函数 $U_m(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N)$ 更宜替换为确定函数 $F_m(\theta,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N)$ 或 $\Psi_m(\theta,\ p',\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N)$, 而直接根据实验确定化学势 μ_k 对自变量 $\theta = T$, $p' = p$ 与 m_i 的函数关系通常也比确定函数 $\mu'_k(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N)$ 更加方便.

热力学函数相对于质量的齐次性

如果可以忽略内能对质量的不可加性, 例如, 如果忽略微元的表面能或者与微元形状有关的能量, 则作为一个基本的实验结果可以认为, 当质量熵 s 与密度 ρ 不变时, 若组成混合物的所有质量 m_k 都增加 n 倍, 内能也将增加 n 倍. 例如, 如果可以认为整个物体的内能等于物体各部分内能之和, 上述假设对所有这样的物体就都是成立的. 这个假设要求函数 (9.4) 满足以下关系:

$$nU_m(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N) = U_m(s, \rho, nm_1, nm_2, \cdots, nm_N), \quad (9.12)$$

即内能对质量 m_i 是一阶齐次函数. (9.12) 这一假设在内能不可加时也可能成立.

令 $1/n = m_1 + m_2 + \cdots + m_N = m$, 从 (9.12) 得

$$U_m(s,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N) = mU_m(s,\ \rho,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N),$$

式中

$$c_i = \frac{m_i}{m} = \frac{\rho_i}{\rho}$$

是混合物组元的质量分数.

由公式 (9.12) 与 (9.9) 可知, 函数 $F_m(\theta,\ \rho,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N)$ 与 $\Psi_m(p',\ \theta,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N)$ 也满足形如 (9.12) 的等式, 即它们对质量 m_i 也是一阶齐次函数. 此时, 根据齐次函数的欧拉定理与式 (9.10), 得

$$\Psi_m = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial m_k}\right)_{p',\,\theta,\,m_{i\neq k}} = \sum_{k=1}^{N} m_k \mu_k(\theta,\ p',\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N),$$

$$U_m = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial U_m}{\partial m_k}\right)_{s,\,\rho,\,m_{i\neq k}} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left[\mu_k(s,\ \rho,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N) + \theta s - \frac{p'}{\rho}\right],$$

$$F_m = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial F_m}{\partial m_k}\right)_{\rho,\,\theta,\,m_{i\neq k}} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left[\mu_k(\theta,\ \rho,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N) - \frac{p'}{\rho}\right].$$

[1)] 应当强调, 公式 (9.6), (9.9), (9.10) 与 (9.11) 在数学上得自定义 (9.4).

我们强调, μ_k 在一般情况下不只是 s, ρ 或 θ, ρ 或 θ, p' 的函数, 它们可能还依赖于比值 $m_1/m = c_1$, $m_2/m = c_2$, $\cdots$, $m_N/m = c_N$ [1).

完全气体混合物 我们以完全气体混合物为例来研究其热力学函数的公式. 完全气体热力学函数的表达式由公式 (7.5) 给出, 它们可以视为质量为 m_k 的单独组元的热力学函数的公式, 其中相应的量为 ρ_k, T_k, p_k, $c_{Vk}(T_k)$, $c_{pk}(T_k)$, 所有常量的值也都给出. 另一方面, 如果混合物整体也可以当作完全气体的话, 这些公式还可以视为混合物整体在平衡态的特征热力学函数的定义, 相应密度为 ρ, 温度为 T, 压强为 p.

为了得到混合物整体的热力学函数和所有常量对混合组元的质量 m_k 与其他特征量的依赖关系, 可以进行下面这些思想实验. 如果将质量为 m_1 和 m_2 的同一种完全气体用不透气隔膜隔离开, 并且每部分气体都处于平衡态, 则撤掉隔膜之后, 只要两部分气体的压强和温度相同, 平衡就不会被破坏. 因为压强相等, 所以不产生运动, 又因为温度相等, 所以不发生热交换. 根据状态方程, 由压强和温度相等可知密度相等. 两部分气体都满足公式 (7.6), 其中的系数分别为 m_1, m_2, 由此可知, 同样的公式对两部分气体所组成的整体系统也成立, 且常量 c_V, c_p 不变, 只是系数变为 $m_1 + m_2$. 显然, 当许多部分质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_N$ 的同一种气体发生接触时也会有相似的情况.

如果用质量分别为 m_1 和 m_2 的两种不同气体进行同样的实验, 那么, 尽管在撤掉隔膜之前压强和温度相等, 在撤掉隔膜之后, 由两种不同气体组成的系统在整体上也不是平衡的, 因为此时扩散使混合气体中的每一种物质在全部区域中平均分布的状态比质量非平均分布的初始状态具有更大的概率. 在没有外部热流时, 从 (撤掉隔膜之后瞬间的) 初始非平衡态向 (更概然的) 最终平衡态的转变导致熵的增加. 设初始状态的熵为 $\tilde{S}_{m_1+m_2}$, 它等于被分开的组元的熵之和, 而最终状态的熵为 $S_{m_1+m_2}$,

---

1) 此结论是相应热力学势对质量 m_i 的一阶齐次性的重要推论. 例如, 由 (9.9), (9.6), (9.7) 可知

$$\mathrm{d}\Psi_m = -ms\,\mathrm{d}\theta + \frac{m}{\rho}\mathrm{d}p' + \sum_{k=1}^{N}\mu_k\,\mathrm{d}m_k,$$

所以 $\Psi_m = \Psi_m(\theta,\ p',\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N)$. 利用上述一阶齐次性, 有

$$\Psi_m(\theta,\ p',\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N) = m\Psi_m(\theta,\ p',\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N),$$

所以

$$\begin{aligned}\mu_k = \left(\frac{\partial\Psi_m}{\partial m_k}\right)_{p',\,\theta,\,m_{i\neq k}} &= \Psi_m(\theta,\ p',\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N) + m\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\Psi_m(\theta,\ p',\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N)}{\partial c_i}\frac{\partial c_i}{\partial m_k}\\ &= \Psi_m(\theta, p', c_1, c_2, \cdots, c_N) + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\Psi_m(\theta, p', c_1, c_2, \cdots, c_N)}{\partial c_i}(\delta_{ik} - c_i),\end{aligned}$$

即 $\mu_k = \mu_k(\theta,\ p',\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N)$. ——译注

故对混合物整体应有

$$S_{m_1+m_2} > S_{m_1}(p,\ T) + S_{m_2}(p,\ T).$$

然而, 得出这个结论的一个重要因素是, 不同的气体发生混合. 如果发生混合的气体是相同的, 则初始状态与最终状态相同, 从而

$$S_{m_1+m_2} = S_{m_1}(p,\ T) + S_{m_2}(p,\ T).$$

如果从某些重要的物理化学特性来看确实有 N 种不同的完全气体, 则对于它们的混合物可以假设, 这 N 种气体占据同一个区域, 并且可以对每一种气体的平衡态单独引入特征量与状态方程而不必关心在该区域中还有其他气体. 按照这一假设, 气体相互作用的能量被忽略, 所以根据 (7.5) 成立等式

$$U_m = U_{m_1}(T_1) + U_{m_2}(T_2) + \cdots + U_{m_N}(T_N) = m\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k}{m}\left(U_{0k} + \int_{T_{0k}}^{T_k} c_{Vk}(T)\,\mathrm{d}T\right). \quad (9.13)$$

此外, 对于气体混合物中的 N 种完全气体, 我们还引入分压 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_N$ 和混合物整体的压强 p, 它们是由状态方程 $p_k = \rho_k R_k T_k = \rho_k R_0 T_k/M_k$ (R_0 为普适气体常量) 和道尔顿定律

$$p = \sum_{k=1}^{N} p_k = \sum_{k=1}^{N}\rho_k R_k T_k = \rho\sum_{k=1}^{N}\frac{R_k m_k}{m}T_k \quad (9.14)$$

确定的.

如果认为每种气体组元的状态概率独立于其他组元的状态概率, 则混合物的熵可表示为相应状态下各组元的熵之和, 所以混合物整体的熵由以下等式引入:

$$S_m(p,\ T,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N) = \sum_{k=1}^{N} S_{m_k}(p_k,\ T_k,\ m_k),$$

式中, 依照 (7.5),

$$S_{m_k} = m_k\left(s_{0k} + \int_{T_{0k}}^{T_k}\frac{c_{pk}}{T}\mathrm{d}T - R_k\ln\frac{p_k}{p_{0k}}\right). \quad (9.15)$$

在内能 U_m 的基本公式 (9.4) 中并未考虑可能出现组元温度不同的情况, 与问题的这种提法相应, 我们假设组元的温度在无穷小的微元中相同, 即

$$T_1 = T_2 = \cdots = T_N = T.$$

从道尔顿定律还可得出

$$\frac{mp}{\rho} = \sum_{k=1}^{N}\frac{m_k p_k}{\rho_k}.$$

所以, 对于混合物整体的热力学势成立公式

$$\Psi_m = U_m - TS_m + \frac{mp}{\rho} = \sum_{k=1}^{N} U_{m_k} - T\sum_{k=1}^{N} S_{m_k} + \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k p_k}{\rho_k}$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \Psi_{m_k}(p_k,\ T) = \sum_{k=1}^{N} m_k \mu_k. \tag{9.16}$$

从公式 (9.13), (9.15) 与 (9.16) 可得以下化学势公式:

$$\mu_k(p_k,\ T) = U_{0k} + R_k T_0 - s_{0k}T + \int_{T_0}^{T} c_{pk}\,\mathrm{d}T - T\int_{T_0}^{T} \frac{c_{pk}}{T}\,\mathrm{d}T + R_k T \ln\frac{p_k}{p_{0k}}, \tag{9.17}$$

式中已经应用了 $c_{pk} - c_{Vk} = R_k$.

因为在 $T_1 = T_2 = \cdots = T_N$ 时利用 (9.14) 有

$$p_k = p\frac{R_k\rho_k}{R\rho} = p\frac{R_k m_k}{Rm} = p\frac{R_k m_k}{\sum\limits_{i=1}^{N} R_i m_i},$$

所以从公式 (9.15) 可得

$$S_m(p,\ T,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N) = \sum_{k=1}^{N} S_{m_k}(p,\ T) - \sum_{k=1}^{N} R_k m_k \ln\frac{R_k m_k}{\sum\limits_{i=1}^{N} R_i m_i}.$$

显然

$$S_m > \sum_{k=1}^{N} S_{m_k}(p,\ T),$$

因为

$$\Delta S_m = -\sum_{k=1}^{N} R_k m_k \ln\frac{R_k m_k}{\sum\limits_{i=1}^{N} R_i m_i} = -\sum_{k=1}^{N} R_0 n_k \ln\frac{n_k}{\sum\limits_{i=1}^{N} n_i} > 0, \tag{9.18}$$

式中 n_i 为质量为 $m = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$ 的微元中第 i 种组元的物质的量.

如果在初始时刻将质量为 m_k 且压强 p 与温度 T 都分别相同的 N 种气体用隔膜隔离开, 则在撤掉隔膜之后的瞬间, 熵等于 $\sum\limits_{k=1}^{N} S_{m_k}(p,\ T)$. 气体在体积不变且没有外部热量输入的条件下发生混合, 混合物达到平衡态后压强与温度的值不变[1], 熵变为 $S_m(p,\ T,\ m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_N)$. (9.18) 中的量 ΔS_m 给出扩散过程的不可逆性所导致的熵增加. 我们重点指出, 因扩散而导致的熵增加 (9.18) 与发生混合的气体的本质无关, 它只依赖于其物质的量.

[1] 得自能量守恒定律与平衡态下的道尔顿定律.

吉布斯佯谬 对于由不同完全气体组成的混合物, 上面发展出了确定其热力学函数的理论. 如果在形式上将此理论应用于同一种气体的 N 个部分, 就会产生矛盾. 其实直接可见, 此时"混合物"的熵应等于

$$\sum_{k=1}^{N} S_{m_k}(p,\ T),$$

然而上述理论给出熵 S_m 大于此值.

这一矛盾称为吉布斯佯谬. 问题的本质可解释为, 诸组元的物理化学性质不同这一假设在上述混合物理论中极其重要. 这种区别可能很小, 但是它在物理上总是被定义为某种有限的区别. 这种区别导致的结果是, 当气体不同组元所在的区域在压强 p 与温度 T 都相同的条件下 (在撤掉隔膜之后的瞬间) 合在一起形成一个共同区域时, 其中的气体处于强非平衡态. 然后, 此状态在体积不变且没有热量输入的条件下通过扩散过程变化到 p 与 T 的值不变的平衡态. 从统计方法直接可得, 对于数目相等的不同粒子与相同粒子, 包括熵在内的热力学函数是不同的.

如果一种气体由相同的分子组成并占有区域 ΔV, 则物理上无法区别占据同一区域 ΔV 的不同的物质组元, 所以上述计算熵的方法只能用于由物理上不同的组元组成的混合物, 但不能用于由相同的粒子组成的气体.

混合物的热力学第一与第二定律的方程 根据热力学第二定律 (见 §5)

$$T\,\mathrm{d}S_m = \mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}Q' \tag{9.19}$$

和混合物整体的热流方程 (见 §2)

$$\mathrm{d}U_m = \frac{m}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}Q^{**}, \tag{9.20}$$

我们有

$$\mathrm{d}U_m = \frac{m}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i\,\mathrm{d}t + T\,\mathrm{d}S_m + \mathrm{d}Q^{**} - \mathrm{d}Q'. \tag{9.21}$$

为了在一般情况下确定一个模型, 除了内能函数 (9.3) 或 (9.4), 一般而言还必须给出量 $\mathrm{d}Q'$ 与 $\mathrm{d}Q^{**}$. 量 $\mathrm{d}Q^{**}$ 是由给定微元的外部对象引起的非热量形式的一部分能量流, 它不同于使介质整体移动的外力的功. 例如, 与该微元的边界 Σ 接触的相邻介质微元会引起这种能量流. 此外, $\mathrm{d}Q^{**}$ 还可能是因为与电磁场的相互作用而导致的能量流 (见后面第六章). 因为在给定微元与相邻微元之间由质量力和分布于表面 Σ 的应力 p^{ij} 以及外部热流引起的相互作用并未计入 $\mathrm{d}Q^{**}$, 所以, 当没有扩散和外部场, 在 Σ 上也没有广义力 (例如面力偶, 见第三章 §3) 的时候, 可以认为 $\mathrm{d}Q^{**}=0$. 然而在存在扩散时, 能量流 $\mathrm{d}Q^{**}$ 能够不等于零. 其实, 物质微元既然是对混合物整体定义的, 不同组元的质量由于扩散便可通过该微元的边界 Σ 进入其中, 从而导致这种非热量形式的能量流.

§10. 混合物的可逆过程模型

我们来研究满足以下条件的过程:

$$dQ' = 0; \quad I_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{10.1}$$

我们在此仅考虑这样一些模型, 这时对于混合物整体的内能 U_m 成立形如 (9.4) 的公式, 此外我们还假设成立等式

$$dQ^{**} = 0. \tag{10.2}$$

混合物在可逆过程中的状态方程 根据热力学第二定律, 混合物整体的热流方程 (9.21) 此时可以改写为

$$dU_m = -\frac{m}{\rho} p \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, dt + \frac{m}{\rho}(p^{ij} + pg^{ij})\nabla_j v_i \, dt + mT \, ds,$$

或

$$\frac{\partial U_m}{\partial(m/\rho)} d\frac{m}{\rho} + \frac{\partial U_m}{\partial S_m} dS_m + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial U_m}{\partial m_k} dm_k = -p \, d\frac{m}{\rho} + T \, dS_m + \frac{m}{\rho} \tau^{ij} \nabla_j v_i \, dt. \tag{10.3}$$

因此, 如果定义

$$p = -\left(\frac{\partial U_m}{\partial(m/\rho)}\right)_{S_m, m_k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial(1/\rho)}\right)_{s, m_k}, \tag{10.4}$$

并假设张量分量 $\tau^{ij} = p^{ij} + pg^{ij}$ 与速度梯度 $\nabla_j v_i$ 无关, 则由 dS_m 与 dm_k 的独立性可得关系式

$$T = \left(\frac{\partial U_m}{\partial S_m}\right)_{\frac{m}{\rho}, m_k} = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_{\frac{1}{\rho}, m_k} \tag{10.5}$$

和

$$\tau^{ij} = 0,$$

而利用化学势 μ_k 的公式 (9.7) 与 $\varkappa_k$ 的定义 (9.2) 可得关系式

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial U_m}{\partial m_k}\right)_{\frac{m}{\rho}, S_m, m_{i \neq k}} dm_k = \sum_{k=1}^{N} \mu_k \, dm_k = \sum_{k=1}^{N} \mu_k \varkappa_k \, dt \, \Delta V = 0. \tag{10.6}$$

式 (10.4) 与 (10.5) 是状态方程. 只要按照 (10.4) 与 (10.5) 给出函数 (9.4), 即可确定混合物的压强 $p\left(\frac{1}{\rho}, s, \frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m}, \cdots, \frac{m_N}{m}\right)$ 与温度 $T\left(\frac{1}{\rho}, s, \frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m}, \cdots, \frac{m_N}{m}\right)$, 此外还可得 $\tau^{ij} = 0$. 因此, 从所作假设可知, 我们建立起来的这个介质模型是理想流体.

化学平衡条件 当没有化学变化或相变时, 我们有 $dm_k = \varkappa_k \, dt \, \Delta V = 0$, 所以等式 (10.6) 恒成立. 当有化学变化或相变但没有扩散时, 量 m_k, w_α 与 ΔV 在有限的时间间隔内可以视为一个固定的介质微元的特征量, 因此, 这些量是

拉格朗日坐标和时间的函数 (拉格朗日坐标对所有组元都相同, 因为 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}$). 此时, 每个微元在发生物理化学变化时的质量守恒方程在对时间 t 积分后可以表示为以下形式:

$$\left.\begin{aligned} m_i - m_{0i} &= M_i \sum_{\alpha=1}^{r} \nu_{i\alpha}\omega_\alpha, \\ \text{或}\qquad \rho_i &= \frac{\rho_{0i}}{\rho_0}\rho + M_i \sum_{\alpha=1}^{r} \nu_{i\alpha}\frac{\omega_\alpha}{\Delta V}, \end{aligned}\right\} \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N, \tag{10.7}$$

式中使用了等式 $m = m_0 = \text{const}$, 并且根据介质整体的连续性方程引入了记号[1]

$$\omega_\alpha = \int_{t_0}^{t} w_\alpha \Delta V\, \mathrm{d}t = m \int_{t_0}^{t} \frac{w_\alpha}{\rho}\, \mathrm{d}t.$$

利用物理化学变化的守恒方程 (9.2), 式 (10.6) 具有以下形式:

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i M_i \nu_{i\alpha} \right) w_\alpha\, \mathrm{d}t = 0.$$

因为 r 个反应依条件是独立的, 所以量 $w_\alpha\, \mathrm{d}t$ 可以视为线性无关的, 从这个关系式就可以对 r 个反应得到 r 个平衡条件[2]:

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i M_i \nu_{i\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,\ 2,\ \cdots,\ r. \tag{10.8}$$

这些方程是化学变化或相变的热力学平衡的基本方程.

把混合物视为理想双参量介质 因为化学势 μ_i 可以视为 ρ_i, ρ 与 T 的函数, 所以, 根据物理化学变化的质量守恒方程在积分后的形式 (10.7), 平衡条件 (10.8) 可以视为决定 r 个量 $\omega_\alpha/\Delta V$ 的 r 个方程, 而这些量是混合物组元的 ρ, T 和"初始"质量分数 $\rho_{0i}/\rho_0 = c_{0i}$ 的函数. 这样, 在可逆过程中, 组元的质量分数 $\rho_i/\rho = c_i$ 一般决定于混合物的密度 ρ, 温度 T 和混合物组成的不变的"初始"特征量 c_{0i}.

---

[1] 量 ω_α 称为第 α 个化学反应的反应进度, 它与化学反应方程式的写法有关. 若反应方程式为 $0 = \sum_i \nu_{i\alpha} B_i$, 则 $\mathrm{d}\omega_\alpha = \dfrac{\mathrm{d}n_i}{\nu_{i\alpha}}$, 式中 n_i 为组元 B_i 的物质的量. 显然 $w_\alpha = \dfrac{1}{\Delta V}\dfrac{\mathrm{d}\omega_\alpha}{\mathrm{d}t}$ (参见 196 页的译注). ——译注

[2] 我们强调, 关系式 (10.8) 是热流方程 (10.3) 在条件 (10.1) 和 (10.2) 下的推论, 所以它们实际上是化学反应的可逆性条件. 如果考虑化学反应的不可逆性 (见 §11), 则关系式 (10.8) 仅在化学反应达到平衡时才成立, 此时熵产生为零. 这是 (10.8) 被称为平衡条件的原因.

量 $A_\alpha = -\sum_{i=1}^{N} \mu_i M_i \nu_{i\alpha} = -\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mu}_i \nu_{i\alpha}$ 称为第 α 个反应的化学亲和势. 化学亲和势是推动化学反应发生的热力学力. 化学平衡条件 (10.8) 即化学亲和势为零. ——译注

对于可逆过程, 混合物整体的状态方程

$$U_m = mU\left(\rho,\, s,\, \frac{m_1}{m},\, \frac{m_2}{m},\, \cdots,\, \frac{m_N}{m}\right),$$
$$p = p\left(\frac{1}{\rho},\, T,\, \frac{m_1}{m},\, \frac{m_2}{m},\, \cdots,\, \frac{m_N}{m}\right),$$
$$s = s\left(\frac{1}{\rho},\, T,\, \frac{m_1}{m},\, \frac{m_2}{m},\, \cdots,\, \frac{m_N}{m}\right)$$

可以改写为

$$\begin{aligned} U_m &= mU(\rho,\, T,\, c_{01},\, c_{02},\, \cdots,\, c_{0N}),\\ p &= p\left(\frac{1}{\rho},\, T,\, c_{01},\, c_{02},\, \cdots,\, c_{0N}\right),\\ s &= s\left(\frac{1}{\rho},\, T,\, c_{01},\, c_{02},\, \cdots,\, c_{0N}\right). \end{aligned} \tag{10.9}$$

混合物的这些状态方程具有双参量介质状态方程的形式, 但其中包含的常参量 c_{0i} 在具体实例中对不同物质微元可能具有不同的数值.

如果过程是不可逆的, 或者存在扩散, 则上述理论根本不成立. 然而, 如果化学反应进行得很快, 在每一时刻都可以认为化学平衡所对应的关系式成立, 则在这种情况下也能应用状态方程 (10.9). 但由于存在扩散, 而这可能改变每个给定物质微元中各组元的相对组成, 所以量 c_{0i} 可能变化. 这时, 为了确定状态方程 (10.9) 中的变量 c_{0i}, 必须利用表示扩散定律的方程.

当摩尔质量相同的两相达到平衡时, 我们有 $r=1$, $i=1,\,2$, $\nu_{11}=+1$, $\nu_{21}=-1$, $M_1=M_2$, 所以平衡方程 (10.8) 的形式为

$$\mu_2 = \mu_1.$$

显然, 当三相平衡时应同时成立两个方程

$$\mu_1 = \mu_2, \quad \mu_2 = \mu_3.$$

所得相平衡条件在忽略表面效应时可用于固态、液态和气态介质共存的情况.

古尔德贝格－瓦格定律

作为第二个例子, 我们来考虑一个关于可逆化学反应的重要问题, 其中包括运动的完全气体混合物中的离解与复合问题. 发生可逆反应的 N 种完全气体的混合物, 其化学平衡条件 (10.8) 利用 $\mu_i(T, p_k)$ 的公式 (9.17) 可以写为

$$\sum_{i=1}^{N}\left(U_{0i} + R_i T_0 - T s_{0i} + \int_{T_0}^{T} c_{pi}(T)\,\mathrm{d}T - T\int_{T_0}^{T}\frac{c_{pi}}{T}\,\mathrm{d}T + \frac{R_0}{M_i}T\ln\frac{p_i}{p_{0i}}\right)M_i\nu_{i\alpha} = 0.$$

此方程的形式可以改写为

$$\left(\frac{p_1}{p_{01}}\right)^{\nu_{1\alpha}}\left(\frac{p_2}{p_{02}}\right)^{\nu_{2\alpha}}\cdots\left(\frac{p_N}{p_{0N}}\right)^{\nu_{N\alpha}} = k_1^{\nu_{1\alpha}}k_2^{\nu_{2\alpha}}\cdots k_N^{\nu_{N\alpha}}, \quad \alpha = 1,\ 2,\ \cdots,\ r, \tag{10.10}$$

式中

$$k_i(T) = \exp\left[-\frac{1}{R_iT}\left(U_{0i} + R_iT_0 - Ts_{0i} + \int_{T_0}^{T} c_{pi}\,\mathrm{d}T - T\int_{T_0}^{T}\frac{c_{pi}}{T}\,\mathrm{d}T\right)\right].$$

考虑到克拉珀龙方程后, 平衡方程 (10.10) 和质量守恒方程 (10.7) 所组成的方程组包含 $r+N$ 个方程, 用来确定 $r+N$ 个量 $\omega_\alpha/\Delta V$ 和 ρ_i/ρ_{0i}, 这些量给出了混合物的成分和化学反应的进展, 例如离解程度.

式 (10.10) 表示质量作用定律——古尔德贝格—瓦格定律. 量 $k_i(T)$ 与 T_0, s_{0i}, U_{0i} 有关, 它们一般对应着混合物在组元密度为 ρ_{0i} 时的"初始"状态. 如果可以认为热容 c_{pi} 与 c_{Vi} 是常量, 则量 $k_i(T)$ 由以下公式给出:

$$k_i(T) = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma_i}{\gamma_i-1}} \exp\left(\frac{s_{0i}-c_{pi}}{R_i} - \frac{U_{0i}-c_{Vi}T_0}{R_iT}\right),$$

式中 $\gamma_i = c_{pi}/c_{Vi}$. 在一般情况下, $k_i(T)$ 由实验数据决定.

如果使用以下记号:

$$\nu'_{i\alpha} = \nu_{i\alpha} > 0, \quad \nu''_{j\alpha} = -\nu_{j\alpha} > 0, \quad \nu''_\alpha = \sum_j \nu''_{j\alpha}, \quad \nu'_\alpha = \sum_i \nu'_{i\alpha},$$

则方程 (10.10) 还可以改写以下形式:

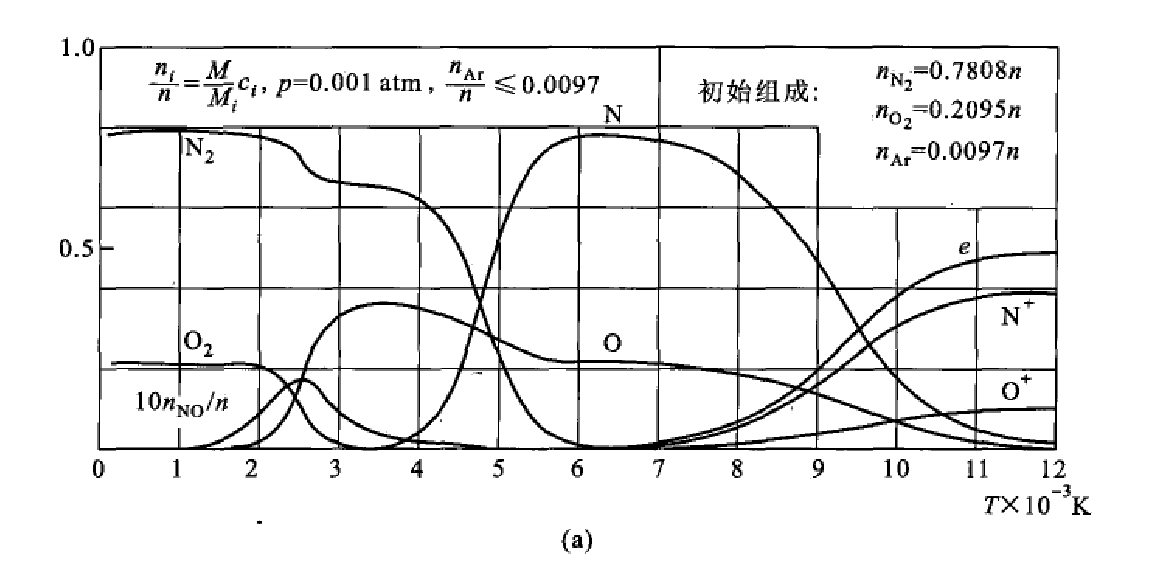
$$(R_0T)^{\nu''_\alpha}\prod_j\left(\frac{\rho_j}{M_jp_{0j}k_j}\right)^{\nu''_{j\alpha}} - (R_0T)^{\nu'_\alpha}\prod_i\left(\frac{\rho_i}{M_ip_{0i}k_i}\right)^{\nu'_{i\alpha}} = 0.$$

混合物的参量 $\omega_\alpha/\Delta V$ 和成分作为 ρ 和 T 的函数确定之后, 就不难通过随体导数 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ 来确定化学变化的有限的"速度"值.

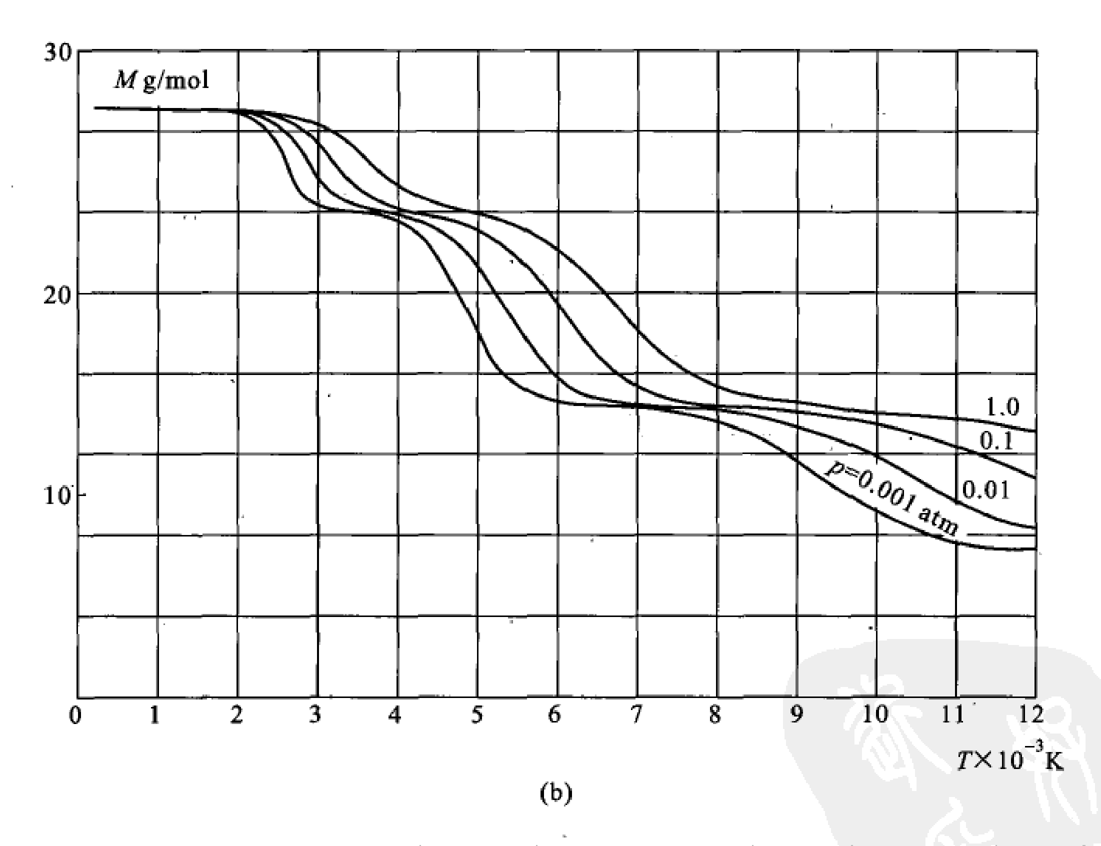
撒哈方程 在可逆变化的条件下研究混合物成分的上述方法可以用来研究被电离的气体, 因为电子与通过各种途径激发出来的原子或分子的离子可以视为混合物的不同组元, 而电离程度由相应的参量 ω_α 来表征. 此时, 质量守恒方程 (10.7) 与平衡条件 (10.8) 决定了电离程度, 而平衡条件在完全气体近似下即是方程 (10.10). 应用于此现象的条件 (10.8) 或条件 (10.10) 称为撒哈方程.

作为气体混合物的空气的性质 图 37, 38, 39 给出了作为气体混合物的空气在平衡态下的组元浓度、摩尔质量、表观热容 c_V、质量内能、质量熵和密度对温度和压强的依赖关系, 它们是依照上述平衡态理论通过计算得出的[1]. 这些图像表明了 (10.9) 这种类型的依赖关系, 其中密度被替换为应用上更加方便的变量——压强.

[1] 在空气的各种热力学性质手册中以表格的形式列有相应数据.



(a)



(b)

图 37. (a) 在压强 $p=0.001$ atm 时空气的物质的量浓度与温度的关系. 物质的量浓度在温度高于 2000 K 时因离解而发生显著变化, 在温度高于 7000 K 时因电离而发生显著变化. N_2, O_2 和 NO 是氮分子、氧分子和一氧化氮分子, N 和 O 是氮原子和氧原子, O^+ 和 N^+ 是一价离子, e 是电子. 氩的浓度 n_{Ar}/n 总是小量. (b) 空气的平均摩尔质量与温度和压强的关系

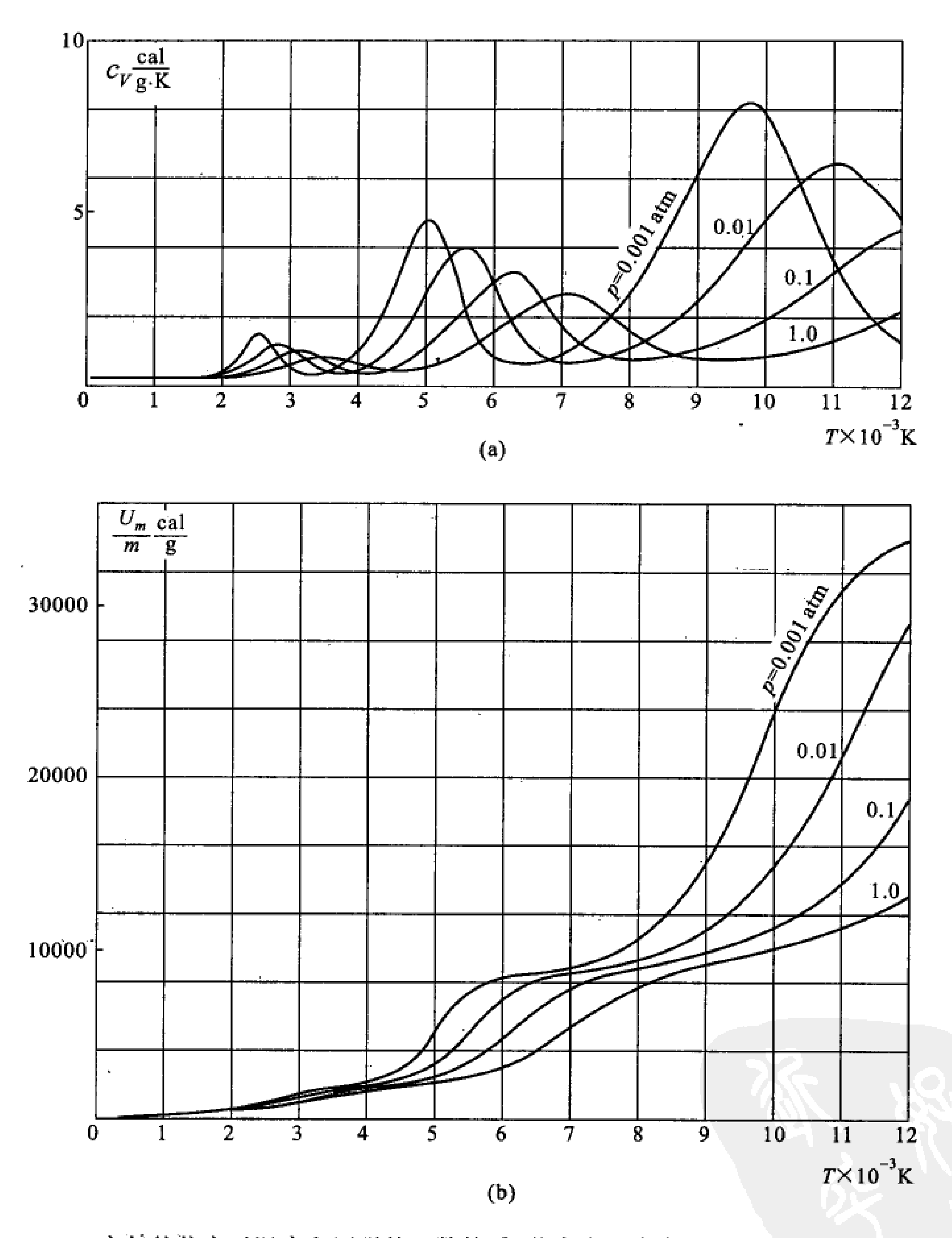


图 38.　(a) 空气的热容对温度和压强的函数关系. 热容在温度高于 2000 K 时发生显著变化. (b) 空气的质量内能对温度和压强的函数关系

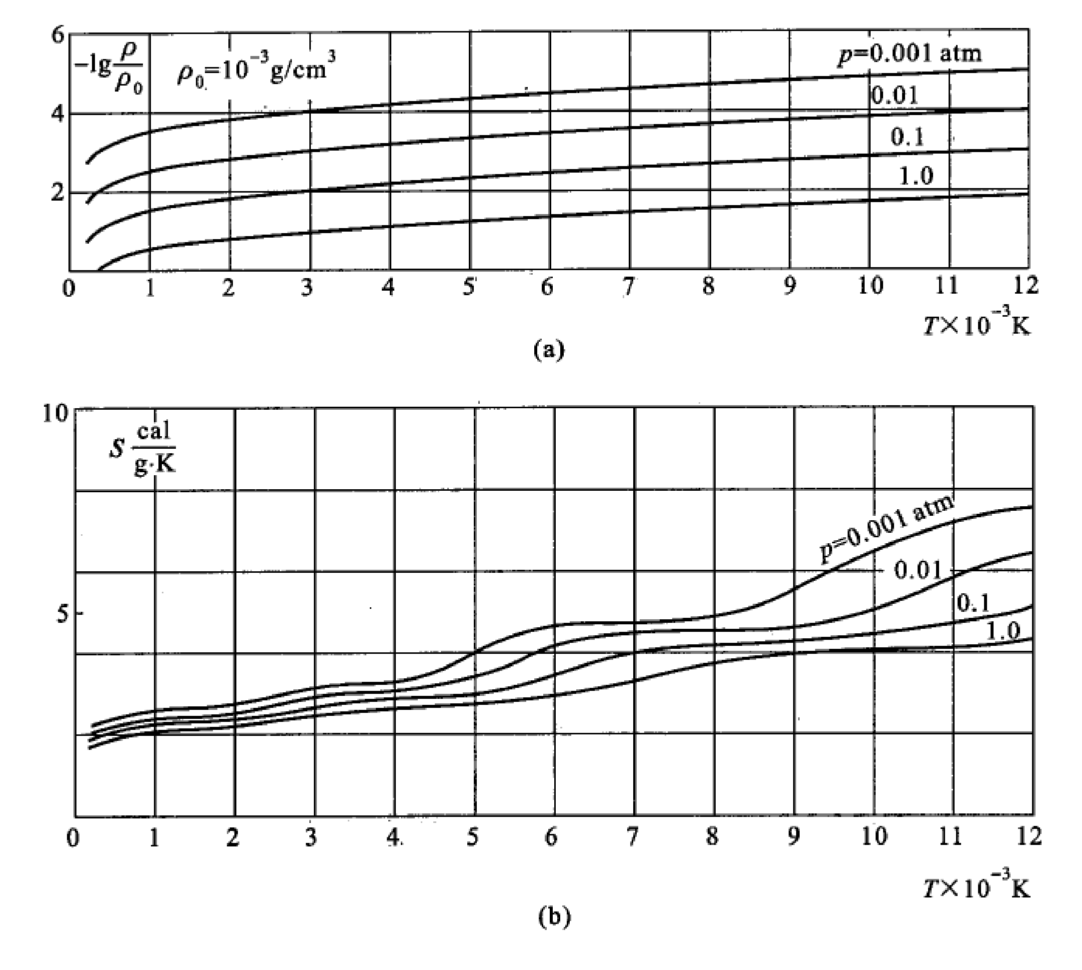


图 39. (a) 空气的密度与温度和压强的关系. (b) 空气的质量熵对温度和压强的函数关系

混合物可逆过程的封闭的运动方程组 若混合物中的过程是可逆的, 则封闭的运动方程组由混合物整体的连续性方程、理想可压缩介质的 3 个欧拉方程、状态方程 (10.9), 以及热流方程或表述热力学第二定律的如下方程组成:

$$dU = p\,d\frac{1}{\rho} + dq^{(e)} \quad 或 \quad T\,ds = dq^{(e)}.$$

外部热流 $dq^{(e)}$ 必须额外给出. 在绝热过程中 $dq^{(e)} = 0$, 此时, 由于有化学变化发生, 密度和温度之间的关系依赖于混合物的组成, 它可由式 $s = \text{const}$ 根据 (10.9) 计算出来.

§11. 混合物的不可逆过程模型

混合物不可逆过程的运动问题的一般提法 我们来研究混合物的最简单的一些不可逆过程模型, 其热力学不可逆性表现在状态方程和表征该模型的其他关系式中, 并且这种不可逆性只稍微偏离热力学可逆过程的相应性质. 在 §10 中研究的可逆过程模型将因为考虑黏性、热传导、扩散和化学反应所造成的

不可逆效应而变得更加复杂.

如前所述, 作为一个基本假设, 我们认为质量为 m 的混合物微元的动能等于 $mv^2/2$, 而混合物的内能 U_m 满足式 (9.4) 或其特例 (9.13), 并且成立一个重要的附加条件: 混合物组元的温度相同,

$$T_1 = T_2 = \cdots = T_N = T. \tag{11.1}$$

换言之, 我们假设在每个微元中混合物各组元之间都达到了温度平衡.

在某些应用中, 例如在描述微元状态变化很快的过程时, (11.1) 是一个过强的假设, 所以在许多情况下需要建立组元温度不同的其他一些模型. 我们认为, 与内能 U_m 中的以相对较高温度为特征的随机热运动的平均能量相比, 各组元相对于微元整体发生运动的动能是小量, 因而可以忽略[1].

熵变化的一般方程 关于熵变化的热力学基本方程 (9.19) 和热流方程 (9.20) 显然可以改写为

$$T\,\mathrm{d}S_m = \mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}Q' = \mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}Q^{**} + \mathrm{d}Q' - \mathrm{d}Q^{**}, \tag{11.2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U_m &= \frac{\partial U_m}{\partial(m/\rho)}\,\mathrm{d}\frac{m}{\rho} + \frac{\partial U_m}{\partial S_m}\,\mathrm{d}S_m + \sum_{k=1}^{N}\mu_k\,\mathrm{d}m_k \\ &= -p\,\mathrm{d}\frac{m}{\rho} + T\,\mathrm{d}S_m + \tau^{ij}e_{ij}\Delta V\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}Q^{**} - \mathrm{d}Q',\end{aligned} \tag{11.3}$$

式中已经考虑了应力张量的对称性, 即 $p^{ij} = p^{ji}$, 以及公式 $e_{ij} = (\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)/2$. 利用式 (11.3), 根据压强 p 的定义并假设量 $Q^{**} - \mathrm{d}Q'$ 不包含形如 $A\,\mathrm{d}S_m$ 的项[2], 式中 A 为主定参量的函数, 我们得到状态方程

$$p = -\frac{\partial U_m}{\partial(m/\rho)} = -\frac{\partial U}{\partial(1/\rho)}, \quad T = \frac{\partial U_m}{\partial S_m} = \frac{\partial U}{\partial s}. \tag{11.4}$$

再利用质量守恒方程 (9.1) 和 (9.2), 得等式

$$\mathrm{d}Q' - \mathrm{d}Q^{**} = \left\{\tau^{ij}e_{ij} - \sum_{k=1}^{N}\left[\mu_k\left(M_k\sum_{\alpha=1}^{r}\nu_{k\alpha}w_\alpha - \operatorname{div}\boldsymbol{I}_k\right)\right]\right\}\Delta V\,\mathrm{d}t.$$

根据此式, 熵变化方程 (11.2) 可改写为

$$T\,\mathrm{d}S_m = \mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}Q^{**} + \left(\tau^{ij}e_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\mu_k\operatorname{div}\boldsymbol{I}_k - \sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{r}\mu_k M_k\nu_{k\alpha}w_\alpha\right)\Delta V\,\mathrm{d}t. \tag{11.5}$$

[1] 在以下专著中详细地研究了考虑扩散动能和组元温度不同等一般情况下的混合物不可逆过程模型: Woods L. C. The Thermodynamics of Fluid Systems. Oxford: Clarendon Press, 1975 (第九章); Hutter K., Jöhnk K. Continuum Methods of Physical Modeling: Continuum Mechanics, Dimensional Analysis, Turbulence. Berlin: Springer, 2004 (第七章). ——译注

[2] 此假设等价于假设在不可逆运动中温度可由前面对可逆过程建立的公式 $T = \partial U/\partial s$ 来定义.

我们强调, 最后一个公式与状态方程 (11.4) 具有颇为一般的形式, 与之密切相关的是假设 (9.4), 即内能 U_m 只与混合物的密度和熵以及组元质量 m_k 有关.

对能量流的假设 对于体积为 ΔV、表面为 Σ 并且以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的混合物物质体微元, 进一步假设从外部进入其中的总能量流可由以下公式确定:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})}+\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}+\mathrm{d}Q^{**}\\
&=\sum_{k=1}^{N}\rho_k\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{v}_k\,\Delta V\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{N}\int_{\Sigma}p_k^{ij}n_jv_{ki}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma-\int_{\Sigma}\boldsymbol{q}_0\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma+\mathrm{d}Q_{\mathrm{mass}}^{(\mathrm{e})}\\
&=\sum_{k=1}^{N}\rho_k\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{v}\,\Delta V\,\mathrm{d}t+\int_{\Sigma}p^{ij}n_jv_i\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma+\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{I}_k\,\Delta V\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\nabla_j\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k^{ij}I_{ki}}{\rho_k}\right)\Delta V\,\mathrm{d}t-\nabla_j\,q_0^j\,\Delta V\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}Q_{\mathrm{mass}}^{(\mathrm{e})},
\end{aligned}\tag{11.6}$$

式中, $\rho_k\boldsymbol{F}_k\,\Delta V$ 为作用于混合物第 k 个组元的外质量力; $p_k^{ij}n_j\,\mathrm{d}\sigma$ 为表面 Σ 的微元 $\mathrm{d}\sigma$ 上作用于混合物第 k 个组元的面力的分量, 并且认为

$$p^{ij}n_j\,\mathrm{d}\sigma\,\boldsymbol{e}_i=\sum_{k=1}^{N}p_k^{ij}n_j\,\mathrm{d}\sigma\,\boldsymbol{e}_i$$

是混合物整体在面微元 $\mathrm{d}\sigma$ 上的应力矢量; $\boldsymbol{q}_0$ 是由热传导和扩散导致的外部能量流; $\mathrm{d}Q_{\mathrm{mass}}^{(\mathrm{e})}$ 是按照质量分布的外部能量流, 例如, $\mathrm{d}Q_{\mathrm{mass}}^{(\mathrm{e})}$ 可以包括因为外部辐射而被吸收的热流, 或者因为电流而释放的焦耳热. 外质量力 $\boldsymbol{F}_k$ 对不同组元一般不同, 量 $\sum\limits_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{I}_k\,\Delta V\,\mathrm{d}t$ 等于外质量力 $\boldsymbol{F}_k$ 在扩散所致内部运动的相对位移上的元功. 如果外质量力 $\boldsymbol{F}_k$ 对所有组元均相同, 则 $\sum\limits_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{I}_k\,\Delta V\,\mathrm{d}t=0$. 例如, 对于重力 $\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{g}$, $k=1,2,\cdots,N$ ($\boldsymbol{g}$ 为重力加速度), 因为 $\sum\limits_{k=1}^{N}\boldsymbol{I}_k=0$, 所以

$$\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{I}_k\,\Delta V\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{g}\cdot\left(\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{I}_k\right)\Delta V\,\mathrm{d}t=0.$$

按照混合物整体物质点位移的定义和式 (11.6), 可以取

$$\mathrm{d}A^{(\mathrm{e})}=\sum_{k=1}^{N}\rho_k\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{v}\,\Delta V\,\mathrm{d}t+\int_{\Sigma}p^{ij}n_jv_i\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$\mathrm{d}Q^{(\mathrm{e})}+\mathrm{d}Q^{**}=-\nabla_j\left(q_0^j-\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k^{ij}I_{ki}}{\rho_k}\right)\Delta V\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{I}_k\,\Delta V\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}Q_{\mathrm{mass}}^{(\mathrm{e})}.$$

根据此式, 方程 (11.5) 可写为质量熵 $s=S_m/m$ 的全导数的形式:

$$\frac{\mathrm{d}S_m}{\mathrm{d}t}=\rho\Delta V\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{T}\left(-\nabla_j q^j+\sum_{k=1}^{N}\mu_k\nabla_i I_k^i+\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{I}_k\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{r}\mu_k M_k\nu_{k\alpha}w_\alpha+\tau^{ij}e_{ij}\right)\Delta V+\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{mass}}^{(\mathrm{e})}}{\mathrm{d}t}, \tag{11.7}$$

式中使用了以下记号:

$$\boldsymbol{q}=q^j\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{q}_0-\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k^{ij}I_{kj}}{\rho_k}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{q}_0-\sum_{k=1}^{N}p_k^{ij}(v_{kj}-v_j)\boldsymbol{e}_i.$$

矢量 $\boldsymbol{q}$ 表征在混合物各组元发生相对运动时因为热传导、扩散和面力做功而通过表面 Σ 的微元的总能量流.

混合物运动的封闭方程组和动理方程 质量守恒方程, 混合物整体的动量方程, 状态方程 (11.4) 和熵方程 (11.7) 组成混合物运动的封闭方程组, 只要再补充上热流 $\mathrm{d}Q_{\mathrm{mass}}^{(\mathrm{e})}$ 的结果和决定变量

$$\boldsymbol{q},\quad \boldsymbol{I}_k,\quad w_\alpha,\quad \tau^{ij}$$

的宏观动理方程. 建立这些动理方程是不可逆过程热力学的一个基本问题[1].

介质的运动伴随着许多不可逆效应, 对这些效应的性质和机理也有各种类型的假设, 上述基本问题的解决总是涉及到这些假设. 介质的具体性质不同, 运动的类型不同, 这些假设也可能不同, 它们还可能与具有数学性质的一些假设有关, 例如基于微元状态偏离平衡态很小而做的假设[2]. 归根结底, 这些假设总是必须通过实验来证实. 实验观察的数据经过处理可得各种经验公式, 这些公式也可能有助于动理方程的建立.

当运动和过程偏离可逆情形较小的时候, 为了得到动理关系, 作为一个例子可以考虑昂萨格方法 (见 §8 和下文). 用这种方法对所研究的介质和现象得到的关系式还需要通过实验方法来检验或证实, 即使这些关系式能够进一步用统计理论中的结论从理论上证明.

熵产生公式 为了应用昂萨格理论, 必须把总的熵变化 $m\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 表示为和的形式:

$$m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d_i}s}{\mathrm{d}t}+m\frac{\mathrm{d_e}s}{\mathrm{d}t}.$$

从 (11.7) 出发, 利用下述公式所表达的假设即可将熵变化分为这样的两部分.

[1] 为了确定混合物整体的运动, 并不需要求出前面引入的量 $\boldsymbol{q}_0$, p_k^{ij}, v_k, 并且对于这些量也没有相应的方程, 其作用是辅助性的, 仅仅是为了启发式地建立方程 (11.7). 如果用其他一些假设代替 (11.6), 也可得出这个方程.

[2] 在下述论文中提出了不可逆化学反应动理方程的某些一般形式: Седов Л. И. Об общем виде уравнений кинетики химических реакций в газах. ДАН СССР, 1948, 40(1): 73—76.

量 $m\dfrac{\mathrm{d_e}s}{\mathrm{d}t}$ 定义为从外部对象进入物质体 ΔV 的热流、$\mathrm{d}Q_{\mathrm{mass}}^{(\mathrm{e})}$ 和通过其边界 Σ 的外部熵流引起的熵变化, 这与外部对象同给定介质发生相互作用有关. 因此, 根据公式 (11.7), 令[1]

$$m\frac{\mathrm{d_e}s}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{mass}}^{(\mathrm{e})}}{\mathrm{d}t}+\left(\sum_{k=1}^{N}\operatorname{div}\frac{\mu_k\boldsymbol{I}_k}{T}-\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right)\Delta V$$
$$=\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{mass}}^{(\mathrm{e})}}{\mathrm{d}t}+\int_{\Sigma}\frac{1}{T}\left(\sum_{k=1}^{N}\mu_k\boldsymbol{I}_k-\boldsymbol{q}\right)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{11.8}$$

相应地, 在 $m\dfrac{\mathrm{d_e}s}{\mathrm{d}t}$ 确定之后, 对于在单位时间内由内部不可逆效应引起的熵产生 $m\dfrac{\mathrm{d_i}s}{\mathrm{d}t}$, 我们得出

$$m\frac{\mathrm{d_i}s}{\mathrm{d}t}=\left[-\frac{\operatorname{grad}T}{T^2}\cdot\boldsymbol{q}+\frac{\tau^{ij}e_{ij}}{T}+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\boldsymbol{F}_k}{T}-\operatorname{grad}\frac{\mu_k}{T}\right)\cdot\boldsymbol{I}_k\right.$$
$$\left.-\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_kM_k\nu_{k\alpha}}{T}w_\alpha\right]\Delta V. \tag{11.9}$$

耗散函数 熵产生公式 (11.9) 可以改写为以下形式:

$$\rho\frac{\mathrm{d_i}s}{\mathrm{d}t}=\sigma=\sum_{\beta}X_\beta\chi^\beta>0,$$

式中, 量 χ^β 是矢量的分量 q^i, I_k^i, 黏性应力张量的分量 τ^{ij} ($i,\ j=1,\ 2,\ 3;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ N$) 和标量 w_α ($\alpha=1,2,\cdots,r$) 在重新编号后的统一记号, X_β 显然表示相应 χ^β 的系数.

要想进一步建立一个模型, 就要假设量 X_β 与 χ^β 之间存在有限的关系. 因此, 量 σ 可以视为 X_β 或 χ^β 的函数, 并且 p, T 和混合物组元浓度 $c_i=\rho_i/\rho$ 是作为参量出现的, 即

$$\sum_{\beta}X_\beta\chi^\beta=\sigma(p,\ T,\ c_i,\ X_j)=\tilde{\sigma}(p,\ T,\ c_i,\ \chi^j). \tag{11.10}$$

在某些情况下, 可以把建立动理方程的问题看作建立以下函数关系的问题:

$$\chi^\beta=\chi^\beta(g_{ij},\ p,\ T,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N,\ X_1,\ X_2,\ \cdots), \tag{11.11}$$

式中 g_{ij} 为度规张量的分量, 量 p, T, c_i 为标量. 在一般情况下, 式 (11.11) 对于 I_k^i 应满足条件

$$\sum_{k=1}^{N}I_k^i=0.$$

---

[1] 我们强调, 在公式 (11.8) 中之所以有 $\dfrac{1}{T}\dfrac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{mass}}^{(\mathrm{e})}}{\mathrm{d}t}$ 这一项, 是因为相关假设认为该热流是可逆的.

成对出现的相应函数 X_β 和 χ^β 可以利用以下记号来表示:

$$\begin{aligned}X_\beta &\longrightarrow \chi^\beta,\\ -\frac{\operatorname{grad} T}{T^2} = \boldsymbol{\omega} = \omega^i \boldsymbol{e}_i &\longrightarrow \boldsymbol{q},\\ \frac{\boldsymbol{F}_k}{T} - \operatorname{grad}\frac{\mu_k}{T} = \boldsymbol{\omega}_k = \omega_k^i \boldsymbol{e}_i &\longrightarrow \boldsymbol{I}_k,\\ -\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k M_k \nu_{k\alpha}}{T} = \gamma_\alpha &\longrightarrow w_\alpha,\\ e_{ij} &\longrightarrow \frac{\tau^{ij}}{T}.\end{aligned}$$

在函数关系 (11.11) 的自变量中, 除了记为 X_β 的标量、矢量分量和张量分量, 仅仅还列出了一个张量——分量为 g_{ij} 的度规张量. 这等价于假设所研究的混合物模型满足各向同性的物理条件. 因为 σ 是标量, 所以, 作为 (11.11) 中 σ 的自变量, 在一般情况下可取标量 p, T, c_k, γ_α, 而对于矢量和张量的分量 ω^i, ω_k^i, e_{ij}, g_{ij} 则只能取其不变量组合.

各向同性介质耗散函数的一般形式 · 各向同性介质的昂萨格关系式

我们在 §10 中研究了可逆的热力学平衡过程. 在研究偏离这种可逆平衡过程较小的不可逆过程的时候, 在许多应用中会认为函数 (11.11) 是 X_β 的线性函数, 即

$$\chi^\beta = \sum_\delta L^{\beta\delta} X_\delta, \tag{11.12}$$

式中, 矩阵元素 $L^{\beta\delta}$ 由标量、二阶张量的分量和四阶张量的分量组成.

在各向同性的情况下, 由系数 $L^{\beta\delta}$ 组成的相应张量只依赖于标量和度规张量[1] g_{ij}. 下面将得出 $L^{\beta\delta}$ 对 g^{ij} 的依赖关系, 而对介质的状态参量 p, T, c_1, c_2, $\cdots$, c_N 这些标量的依赖关系则必须另行建立. 当线性关系 (11.12) 成立时, 量 $\sigma(X_\beta)$ 是 X_β 的二次型.

对于向同性介质, 不难看出 σ 的二次型可以写为以下形式:

$$\begin{aligned}\sigma = {} & a_0 T^2 g_{ij}\omega^i\omega^j + 2a^k g_{ij}\omega^i\omega_k^j + a^{kl} g_{ij}\omega_k^i\omega_l^j \\ & + b^{sm} T\gamma_s\gamma_m + 2b^s\gamma_s g^{ij} e_{ij} + \frac{\lambda}{T}(g^{ij}e_{ij})^2 + \frac{2\mu}{T} g^{ij} g^{mn} e_{im} e_{jn}.\end{aligned} \tag{11.13}$$

由此可见, 为了使函数 σ 完全确定下来, 必须固定 (11.13) 中的系数 a_0, a^k, $a^{kl} = a^{lk}$, $b^{sm} = b^{ms}$, b^s, λ 和 μ, 其中 $k, l = 1, 2, \cdots, N$; $m, s = 1, 2, \cdots, r$. 这些独立系数的数目等于

$$1 + N + \frac{N(N+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + r + 2 = 3 + \frac{N(N+3)}{2} + \frac{r(r+3)}{2}.$$

(11.13) 中的系数还应满足条件 $\sigma \geqslant 0$.

---

[1] 这个直接的结论是非常明显的, 其详细证明见附录一.

按照 §8 中阐述的不可逆过程的一般理论, 关系式 (11.12) 在应用昂萨格原理后可表示为

$$q_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial \omega^i} = a_0 T^2 \omega_i + \sum_k a^k \omega_{ki} = -a_0 \frac{\partial T}{\partial x^i} + \sum_k a^k \left(\frac{F_{ki}}{T} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\mu_k}{T}\right), \tag{11.14}$$

$$I_{ki} = \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial \omega_k^i} = a^k \omega_i + a^{kl}\omega_{li} = -\frac{a^k}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^i} + \sum_l a^{kl}\left(\frac{F_{li}}{T} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\mu_l}{T}\right), \tag{11.15}$$

$$w_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial \gamma_\alpha} = b^\alpha \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \sum_s b^{s\alpha} T \gamma_s = -\frac{b^\alpha}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} - \sum_{k,\ s} b^{s\alpha}\mu_k M_k \nu_{ks}, \tag{11.16}$$

$$\frac{\tau^{ij}}{T} = \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial e_{ij}} = g^{ij}\sum_s b^s \gamma_s + \frac{\lambda}{T} g^{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \frac{2\mu}{T} e^{ij}. \tag{11.17}$$

最后一个关系式与黏性应力的通常的纳维－斯托克斯定律有所不同, 式中第一项是由于不可逆的化学变化或相变而出现的, 它影响应力矢量在所在面微元上的法向分量的取值.

条件 $\sum\limits_{k=1}^{N} I_{ki} = 0$ 给出系数 a^k 和 a^{kl} 的 $N+1$ 个关系, 即

$$\sum_{k=1}^{N} a^k = 0; \quad \sum_{k=1}^{N} a^{kl} = 0, \quad l = 1,\ 2,\ \cdots,\ N. \tag{11.18}$$

因此, 公式 (11.13)—(11.17) 只含有

$$n = 2 + \frac{N(N+1)}{2} + \frac{r(r+3)}{2}$$

个独立的系数, 它们一般而言是 p, T, c_k 的函数. 我们指出, 最初的一般形式的公式 (线性关系 (11.12)) 含有 $n_0 = (3+3N+r+6)^2 = (9+3N+r)^2$ 个系数 $L^{\beta\delta}$. 上述一般理论使得必须给出的系数的数目减少了[1)]

$$n_0 - n = 79 + \frac{17}{2}N^2 + \frac{107}{2}N + \frac{1}{2}r^2 + \frac{33}{2}r + 6Nr$$

个. 例如, 当三组元混合物 ($N=3$) 中发生一种反应 ($r=1$) 的时候, 我们有 $n_0 = 361$, 而独立系数的数目 $n = 10$, 即待定系数的数目减少了 $n_0 - n = 351$ 个.

如果展开公式 (11.14), (11.15) 中的 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\dfrac{\mu_l(p,T,c_k)}{T}$, 然后计算、合并 $\dfrac{\partial T}{\partial x^i}$, $\dfrac{\partial p}{\partial x^i}$ 和 $\dfrac{\partial c_k}{\partial x^i}$ 的系数, 就可以对这些公式进行一些简化和变形. 为了确定系数 a_0, a^k, a^{kl}, b^s, $b^{s\alpha}$, λ, μ 或它们的某些组合, 可以利用统计理论和相应的实验数据.

上述理论不只适用于完全气体混合物, 而且适用于实际介质的许多其他模型. 在一些专著和具体研究工作中可以找到该理论的进一步简化和应用.

---

1) 在实际中还额外认为 $b^s = 0$, $s = 1, 2, \cdots, r$.

完全气体混合物的唯象系数 a_0, a^k, a^{kl} 与输运系数的关系

如果对完全气体混合物使用化学势公式 (9.17), 就可以将表达式 (11.14), (11.15) 所给出的热力学流 q_i 和 I_{ki} 通过气体动力学参量 T, p, c_k $(k=1, 2, \cdots, N)$ 表示出来. 为此, 我们把 (9.17) 写为以下形式:

$$\mu_k = \mu_k^0(p,\ T) + R_k T \ln z_k, \tag{11.19}$$

式中

$$\mu_k^0(p,\ T) = U_{0k} + R_k T_0 - T s_{0k} + \int_{T_0}^{T} c_{pk}\,\mathrm{d}T - T\int_{T_0}^{T} \frac{c_{pk}}{T}\,\mathrm{d}T + R_k T \ln\frac{p}{p_{0k}},$$

z_k 表示第 k 种组元的物质的量浓度,

$$z_k = \frac{p_k}{p} = \frac{n_k}{n} = \frac{M}{M_k}c_k.$$

根据 (11.19), 我们有

$$T\,\mathrm{d}\frac{\mu_k}{T} = T\,\mathrm{d}\left(\frac{\mu_k^0}{T} + R_k \ln z_k\right) = \frac{R_k T}{z_k}\mathrm{d}z_k + \left(\frac{\partial \mu_k^0}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + T\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{\mu_k^0}{T}\right)_p \mathrm{d}T, \tag{11.20}$$

$$\left(\frac{\partial \mu_k^0}{\partial p}\right)_T = \frac{R_k T}{p} = \frac{R_0 T}{M_k p} = \frac{1}{nM_k}, \tag{11.21}$$

$$T\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{\mu_k^0}{T}\right)_p = -\frac{1}{T}\left(U_{0k} + R_k T_0 + \int_{T_0}^{T} c_{pk}\,\mathrm{d}T\right) = -\frac{i_k}{T}, \tag{11.22}$$

式中 i_k 为第 k 种组元的质量焓. 利用 (11.20), (11.21) 和 (11.22), 得 ω_k 的以下公式:

$$\boldsymbol{\omega}_k = \frac{1}{T}\left(\boldsymbol{F}_k - T\nabla\frac{\mu_k}{T}\right) = \frac{1}{T}\left(\boldsymbol{F}_k - \frac{p}{\rho_k}\nabla z_k - \frac{1}{nM_k}\nabla p + \frac{i_k}{T}\nabla T\right). \tag{11.23}$$

利用 (11.23), 公式 (11.15) 的形式变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}_k &= -\frac{a^k}{T^2}\nabla T + \sum_l \frac{a^{kl}}{T}\left(\boldsymbol{F}_l - T\nabla\frac{\mu_l}{T}\right)\\ &= -p\sum_l \frac{a^{kl}}{T\rho_l}\left(\nabla z_l + \frac{z_l}{p}\nabla p - \frac{\rho_l}{p}\boldsymbol{F}_l\right) - \left(\frac{a^k}{T} - \sum_l \frac{a^{kl}}{T} i_l\right)\frac{1}{T}\nabla T\\ &= \rho\sum_l \frac{M_k M_l}{M^2} D^{kl}\boldsymbol{d}_l - D_k^T \frac{1}{T}\nabla T,\end{aligned} \tag{11.24}$$

式中

$$\boldsymbol{d}_l = \nabla z_l + (z_l - c_l)\frac{1}{p}\nabla p + \frac{c_l}{p}\left(\sum_k \rho_k \boldsymbol{F}_k - \rho \boldsymbol{F}_l\right),$$

并且多组元扩散系数 D^{kl} 和热扩散系数 D_k^T 是按照以下公式引入的:

$$D^{kl} = -\frac{p}{\rho T}\frac{M^2}{M_k M_l}\left(\frac{a^{kl}}{\rho_l} - \frac{a^{kk}}{\rho_k}\right) = -\frac{R_0 M}{M_k M_l}\left(\frac{a^{kl}}{\rho_l} - \frac{a^{kk}}{\rho_k}\right), \tag{11.25}$$

$$D_k^T = \frac{a^k}{T} - \sum_l \frac{a^{kl}}{T} i_l, \quad k,\ l = 1,\ 2,\ \cdots,\ N. \tag{11.26}$$

公式 (11.24) 和等式

$$\sum_k D_k^T = 0, \quad D^{kk} = 0, \quad \sum_k \boldsymbol{d}_k = 0$$

之所以成立, 是因为我们有性质 (11.18). 从公式 (11.25) 和 (11.26) 容易得出用 D_k^T 和 D^{kl} 表示 a^k 和 a^{kl} 的逆向公式.

用类似的方法可以对完全气体混合物把公式 (11.14) 改写为以下形式:

$$\boldsymbol{q} = -a_0\nabla T + \sum_k \frac{a^k}{T}\left(\boldsymbol{F}_k - T\nabla\frac{\mu_k}{T}\right) = -k\nabla T + \sum_l i_l \boldsymbol{I}_l - p\sum_l \frac{D_l^T}{\rho_l}\boldsymbol{d}_l,$$

式中

$$k = a_0 - 2\sum_k \frac{a^k i_k}{T^2} + \sum_{k,\ l}\frac{a^{kl} i_k i_l}{T^2}. \tag{11.27}$$

系数 D^{kl}, D_k^T 和 k 通常出现在气体动理论中, 它们在这里是通过唯象系数 a_0, a^k 和 a^{kl} 用公式 (11.25), (11.26) 和 (11.27) 定义的.

如果介质是各向异性的, 例如, 与电磁场的相互作用导致各向异性, 上述理论就会变得更加复杂. 此时, 在 σ 的自变量中, 除了度规张量, 还必须进一步引入表征各向异性的其他一些张量.



第六章　电动力学的基本概念和方程

§1. 电动力学的基本概念 · 电磁场 · 真空中的麦克斯韦方程

近来, 在考虑电磁效应的情况下研究连续介质运动问题具有越来越重要的意义. 因此, 有必要在连续介质力学中阐述电动力学的基本原理.

下面将认为, 我们通过初等物理学和普通物理学课程已经知道了最简单的一些电动力学实验现象和定律. 我们将把电动力学基本定律用公理化的形式表述为麦克斯韦方程, 这种形式是对实验观察进行理论加工和推广的结果.

麦克斯韦方程得以表述的基础是许多抽象的数学概念, 这些概念是为了描述物体和场的电磁性质而引入的一些电磁场特征量. 对电磁现象的科学研究经历了一百多年的不平静的发展过程, 为了引入和分析这些概念和方程, 前人历尽艰辛, 完成了大量工作.

基于麦克斯韦方程的许多理论方法获得了丰硕的成果, 所有描述电磁效应的实际工作和所有已知的宏观实验数据都证实了这些方法的有效性.

我们不准备按照历史发展讲述电动力学, 而只是给出其基本原理的简要描述, 目的是在连续介质力学问题中应用电动力学. 我们仅仅指出, 电磁场理论作为实际对象的一种理论是由法拉第提出的, 但是该理论直到 19 世纪末才被实验证实, 当时赫兹成功地捕获了电磁波, 从而证明了电磁场存在的事实.

我们首先指明, 电磁现象对连续介质力学为什么有意义. 在物理学中已知物质对象之间相互作用的 4 种基本类型: 基本粒子理论中的引力、电磁力、核力和弱相互作用力. 我们所研究的内力相互作用主要与电磁效应有关, 这些效应导致了固体、液体和气体中的宏观应力. 例如, 当分子和原子发生碰撞时, 电磁力的作用是主要的.

此外, 物体在某些条件下可能具有电荷, 所以在物体中可能出现电流, 此时产生

的相互作用力必须在连续介质物质体受力的总平衡中加以考虑. 这类效应在研究等离子体运动时表现得特别强烈. 等离子体是具有大量自由电子和离子的气体, 所以等离子体与电磁场有明显的相互作用.

我们现在回忆电动力学的某些基本的定义和概念.

静止电荷的库仑定律 实验表明, 携带电荷 e_1 和 e_2 的两个静止的介质微元之间的相互作用力类似于两个物体之间的万有引力,

$$\boldsymbol{F} = \pm k\frac{e_1e_2}{r^2}\,\mathrm{grad}\,r,$$

式中 r 为带电微元之间的距离, 系数 k 为常量. 此关系式称为库仑定律. 万有引力永远是相互吸引的力, 力 $\boldsymbol{F}$ 则不同: 它在电荷 e_1 和 e_2 异性时是引力, 在电荷同性时是斥力. 万有引力的影响在发生相互作用的质量 m_1 和 m_2 非常大的时候才明显表现出来, 电相互作用力则比万有引力大得多. 两个电子之间的万有引力比它们之间的电斥力小 10^{39} 倍, 这是一个在通常的认识中难以体会的极其巨大的数.

电荷密度 在连续介质力学中, 就像引入质量的连续分布那样, 自然会引入电荷 e 的连续分布. 电荷密度定义如下:

$$\rho_e = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta e}{\Delta V},$$

式中 Δe 是体积为 ΔV 的区域中的电荷总量.

对于电中性物体, $\Delta e = 0$, $\rho_e = 0$. 由于离子或电子聚集的情况不同, 电荷密度在一个确定的位置既可能是正的, 也可能是负的. 在实际中, 对于所有的物体, ρ_e 近似于零, 因为同名电荷总是互相排斥, 使得带正电荷或负电荷的粒子大量聚集的情况通常不能长时间存在.

电流 电流就是带电粒子的运动. 这样, 如果在物体中自由电子相对于离子发生定向运动, 这就表示在物体中有电流. 此时, 尽管存在离子和电子的宏观流动, 物体诸微元的宏观速度之和仍可能为零.

电流在本质上类似于高强度的有序扩散. 在静止的和运动的介质中都可以考虑电流. 电流的密度由电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$ 来表征, 其数值等于单位时间内通过垂直于矢量 $\boldsymbol{j}$ 的单位面积的电荷总量.

原子的极化 在通常条件下, 物质的原子是电中性的, 其总电荷为零. 但是, 如果有许多互相靠近的原子, 每个原子中的电荷就会发生相对偏移, 中性原子于是变得类似于偶极子或多极子. 这种现象称为极化. 大量被极化的分子或原子在外部电场作用下会有序排列, 从而导致介质的一个宏观效应——其宏观部分在电场作用下发生极化. 显然, 随机的热运动一般会阻碍宏观极化的出现.

磁相互作用 除了上述静止带电粒子的相互作用, 还存在磁相互作用. 例如, 我们知道, 磁铁吸引铁屑, 指南针指向地球经线的方向. 因此, 在地球上总是存在一种使指南针向确定方向偏转的力.

由于存在磁相互作用, 人们曾经尝试过引入磁荷, 并比照电荷的库仑定律对磁荷写出类似的定律. 然而后来表明, 在自然界中并不存在任何磁荷, 磁相互作用归结为电流 (即运动电荷) 的相互作用. 例如, 各种物质的磁性可用原子内部存在微观电流来解释, 这些电流是由于电子围绕原子核运动以及电子与原子核的特征“旋转”(自旋) 而形成的. 在通常条件下, 大多数物体中的原子的方位是无序的, 原子内的电流所产生的作用因而表现不出来. 如果组成物体的基本粒子的方位变得有序, 物体磁性的相应宏观效应就会因为磁化现象而表现出来.

电场强度矢量和磁场强度矢量 假设在空间中有一些电荷, 它们相对于某个惯性坐标系 K 是静止的. 在物理学中有一套通用的一般方法来研究电荷系对位于空间给定点 x^1, x^2, x^3 的检验电荷 e 的作用力. 众所周知, 对静止检验电荷的作用力只依赖于电荷的位置和带电量, 它等于

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}, \tag{1.1}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 为某一矢量, 称为电场强度矢量, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x^1,\ x^2,\ x^3)$. 矢量场 $\boldsymbol{E}$ 是单个电荷的电场强度之和.

最初, 人们认为这个场是为了便于计算作用在检验电荷上的力而引入的一种数学抽象. 后来的研究表明, 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可以看作是一种在空间中存在的物理对象, 它与是否存在检验电荷无关, 并且可以把电场当作有别于物体的一种物质对象.

对于电荷与电场之间的关系, 可以有两种观点. 可以认为, 电场是由电荷产生的, 或者认为, 电荷是已有电场的奇点 (物理上很小的对象).

类似于电场强度矢量, 通过对微观电流作用的叠加可以引入磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$, 它作为磁场的一个特征量可以用来计算与磁场有关的相互作用力. 为了表征检验磁体或检验电流, 引入一个很小的磁偶极矩 $\boldsymbol{d}$, 使磁场作用于磁偶极矩为 $\boldsymbol{d}$ 的小磁针的力偶矩按照以下公式计算:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{H}. \tag{1.2}$$

如果磁场是均匀的, $\boldsymbol{H} = \text{const}$, 则磁场对小磁偶极子的作用力之和等于零, 但力偶矩 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 不等于零.

如果磁场 $\boldsymbol{H}$ 不均匀, 则除了力偶矩 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, 还会出现按照以下公式计算的力 $\boldsymbol{\mathcal{F}}'$:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}' = (\boldsymbol{d} \cdot \nabla)\boldsymbol{H} = d^i \nabla_i \boldsymbol{H} = d\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial s},$$

式中 $\partial/\partial s$ 表示在检验电流所在点沿磁偶极矩方向的导数.

在静止条件下, 为了确定空间中给定点的电场强度和磁场强度, 可以在该点放置静止的检验电荷和朝向各异的小磁体 (检验电流), 并测量作用于它们的力 (1.1) 和力偶矩 (1.2).

采用检验电荷与检验电流的这些简单的实验可以变得复杂一些, 可以把它们推广到检验电荷与检验电流处于运动状态的情况, 以及场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 随时间变化的情况.

这样, 真空中的电磁场在空间中的每一点和每一时刻可以由电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 这两个矢量来表征. 矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$, 电荷密度 ρ_e 和电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$ 是电动力学的基本概念.

静电学中的麦克斯韦方程 不难证明, 对于在惯性坐标系中静止的点电荷系或分布电荷, 决定其电场 $\boldsymbol{E}$ 的库仑定律可以写为以下微分形式:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0. \tag{1.3}$$

在无界空间中, 如果矢量 $\boldsymbol{E}$ 在无穷远处等于零, 方程组 (1.3) 的通解就归结为库仑定律.

库仑定律是一个简单的实验定律, 而方程 (1.3) 是静止电荷系的麦克斯韦方程, 从前者过渡到后者是电动力学基本定律利用微分方程语言的一种简单的重新表述, 这很类似于从牛顿万有引力定律过渡到牛顿引力势理论的微分方程. 鉴于这种过渡的重要性, 我们更详细地解释一下上述内容.

牛顿力学中引力场的微分方程 如果有质量为 m 和 m_k 的两个质点, 则它们按照牛顿定律互相吸引, 质点 m_k 对质点 m 的作用力等于

$$\boldsymbol{F}_k = -f\frac{mm_k}{r_k^2}\boldsymbol{r}_k^0,$$

式中 r_k 为质点 m_k 与 m 之间的距离, f 为引力常量, $\boldsymbol{r}_k^0$ 是从质点 m_k 指向质点 m 的单位矢量. 我们知道, 这是一个有势的力, 即 $\boldsymbol{F}_k = \operatorname{grad} U_k$, 势函数 $U_k = fmm_k/r_k$.

如果在空间中有质量为 m_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 的 n 个质点, 并考虑它们对一个质量为 $m = 1$ 且能放置在空间中不同点的质点 (检验质量) 的影响, 则所有质点 m_k 对检验质量 $m = 1$ 的作用力为

$$\boldsymbol{F} = \sum_k \boldsymbol{F}_k, \quad \boldsymbol{F}_k = \operatorname{grad} U_k,$$

其势函数为

$$U = \sum_k U_k = f\sum_k \frac{m_k}{r_k}. \tag{1.4}$$

质量 m_k 在空间中的分布形成势函数为 U 的引力场. 只要在空间中所研究的点放置检验质量, 就能发现该引力场.

我们来写出引力势 U 应当满足的微分方程.

设检验质量位于点 x, y, z, 而产生引力场的第 k 个质点位于点 x_k, y_k, z_k, 则函数 $1/r_k$ 是调和函数, 式中

$$r_k = \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2}$$

为上述两点之间的距离. 在所有 $r_k \neq 0$ 的点 x, y, z, 函数 $1/r_k$ 满足拉普拉斯方程

$$\Delta\frac{1}{r_k} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r_k} = 0.$$

因此, 一个质点的引力场势函数 U_k 满足方程

$$\Delta U_k = 0,$$

或

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}_k = 0, \quad \boldsymbol{F}_k = \operatorname{grad} U_k, \quad 即 \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{F}_k = 0.$$

拉普拉斯方程是线性方程. 根据 (1.4), 在某一区域 V 中连续分布的质量所形成的引力场, 其势函数 $U(x,\ y,\ z)$ 可以写为

$$U(x,\ y,\ z) = f \int\limits_V \frac{\rho\, \mathrm{d}\tau}{r} \quad (\rho\, \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}m). \tag{1.5}$$

显然, 这个函数 $U(x,\ y,\ z)$ 在没有质量分布的点满足拉普拉斯方程

$$\Delta U = 0.$$

U 的拉普拉斯方程等价于方程

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0, \quad \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U. \tag{1.6}$$

可以证明, 引力场势函数 (1.5) 在 V 内部的点 x, y, z 满足泊松方程

$$\Delta U = -4\pi\rho f, \tag{1.7}$$

此时对密度分布 ρ 有一些非常一般的、但在实际中可以接受的假设. 方程 (1.7) 等价于方程

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = -4\pi\rho f, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0, \quad \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U. \tag{1.8}$$

因此, 求引力场势函数和引力场对单位检验质量的作用力的问题可以这样提出: 求这样的函数 $U(x,\ y,\ z)$, 它在无穷远处为零, 在 V 的外部处处满足拉普拉斯方程, 而在 V 的内部处处满足泊松方程; 或者, 求满足方程 (1.6) 和 (1.8) 的力 $\boldsymbol{F}$.

牛顿引力势理论中的这种问题提法完全类似于基于麦克斯韦方程 (1.3) 的静电学问题的提法. 可以证明, 在无限大空间中求解在无穷远处为零的函数 U 的问题归结为表示万有引力定律的公式 (1.5)[1].

在存在非定常电磁场的时候, 可以根据电磁感应的实验定律通过类似的方法推广方程 (1.3).

真空中电磁场的麦克斯韦方程 在不包含物体的真空中 (其中 $\rho_e = 0$, 因为只有物体才能携带电荷), 这些方程在惯性坐标系下具有以下形式:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{1.9}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0. \tag{1.10}$$

[1] 本书第二卷 (见第八章 § 26) 详细分析了这个结论.

麦克斯韦方程 (1.9) 和 (1.10) 适宜作为一些实验观察的初始的、基本的和经过数学抽象的表述, 用以代替历史上和实际中与直接的实验更为密切相关的库仑定律和电动力学的其他一些定律. 在方程 (1.9) 和 (1.10) 中, c 是具有速度量纲的常量; 结果表明, 常量 c 应视为电磁扰动的传播速度, 即光速.

方程 (1.9) 和 (1.10) 是物理学的基石, 是光学和无线电技术的主要方程, 它们描述光乃至一般的电磁波在真空中的传播和许多其他现象.

测量单位的选取 许多电磁场特征量是有量纲量, 而具体公式和方程的写法使得这些公式和方程所包含的量的测量单位之间有一定的关系. 例如, 使用形如 (1.9), (1.10) 的麦克斯韦方程就意味着 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 具有同样的测量单位.

在力、质量和加速度的测量单位可独立选取的时候, 在基本的牛顿方程 $\boldsymbol{F} = km\boldsymbol{a}$ 的写法中必须带有一个有量纲的常量 k; 当 $k = 1$ 是无量纲的量时, 上述测量单位就不是独立的.

方程 (1.9) 和 (1.10) 中的有量纲常量 c 或万有引力定律中的常量 f 可以取为 1, 这是完全可行的, 而且某些作者也在这样使用. 不过, 如果在 (1.9) 和 (1.10) 中 $c = 1$, 这就表示, 或者光速被用作速度的测量单位, 或者 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的测量单位与长度和时间的测量单位有关. 类似地, 当万有引力定律中 $f = 1$ 且牛顿定律 $\boldsymbol{F} = km\boldsymbol{a}$ 中 $k = 1$ 时, 质量的测量单位与距离和时间的测量单位有关, 等等. 在出现所研究的物理量的大量实验领域中, 这类附加条件与物理量和过程的本质无关. 因此, 这样的条件一般并不方便, 尽管在逻辑上是允许的. 例如, 火车的速度自然可以通过光速的分数来测量, 但这是不方便的, 虽然在铁路的信号灯中使用了光.

在天文学和地理学中, 天体或城市之间的距离精确到厘米是毫无意义的, 因此, 虽然把厘米用作天文距离或地理距离的单位标准完全可行, 但是从应用观点来看这没有任何意义. 这里应当指出, 为了在实验中得到表示所给长度的数值, 在本质上要把一定尺度的长度 (长度单位) 按一定方式不断与被测长度进行比对.

自然, 不同物理量所采用的尺度按照其意义应当与被测的量是可比的.

测量单位完全的标准化和统一所带来的好处在许多情况下根本得不偿失, 因为由此会产生种种不便, 例如, 这会导致对所研究的对象丧失感觉, 也会使既定的生活实践和传统遭到破坏. 即使从科学的观点来说仅使用一种测量单位——例如厘米或英寸——无疑是必要的, 这在实践中也会遇到一些困难.

把物理常量固定下来对于测量单位的选取毫无方便可言. 尽管光速在物理学中具有基本的意义, 然而在许多问题中, 这个量无关紧要, 或者可以认为等于无穷大. 在这些问题中引入与光速有关的限制是节外生枝, 是不必要的和反常的.

麦克斯韦方程的写法 (1.9) 和 (1.10) 是一种“规矩的形式”, 过去和现在的许多最著名的作者在大量教材、专著和学术论文中都采用这种形式.

我们在此不打算偏离主题而去讨论电磁学量的不同单位制, 这些单位制有很多种. 关于电动力学测量单位的问题在普通物理学和公共物理学课程中有详细的研究.

在求具体问题的数值解时, 绝对必须知道测量单位, 然而当方程 (1.9) 和 (1.10) 以及其他一些定律的方程已经固定之后, 连续介质力学一般理论的进一步发展已经不再与单位制的选择有什么联系.

真空中的麦克斯韦方程组的封闭性和无矛盾性 方程组 (1.9) 和 (1.10) 包含 8 个方程, 而待求的电磁场未知量仅有 6 个: $E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3$. 不过, 该方程组并不矛盾, 因为可以把关系式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$$

看作 (1.9) 和 (1.10) 中第一个方程的推论, 如果初始值是用相应方式给出的.

其实, 若 $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ 是对坐标可微的任意矢量场, 则 $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=0$, 所以从 (1.9) 中的第一个方程可知 $\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$, 即 $\operatorname{div}\boldsymbol{H}$ 与时间无关. 若在某初始时刻 $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$, 则在所有其他时刻 $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$. 只要初始条件满足无源性条件, 磁场永远都满足这个条件. 这样, 可以把方程 $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$ 看作对初始值的一个限制条件.

类似地, 从 (1.10) 中的第一个方程可知 $\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$, 即, 如果在某一确定的时刻 $\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$, 则它在所有其他时刻也等于零.

只要在某一"初始"时刻没有电荷, 条件 $\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$ 就可以视为在真空中不可能产生电荷的条件; 而 $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$ 可以视为没有"磁荷"的条件.

尽管方程 $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$ 和 $\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$ 不完全是第一个方程的推论, 它们也不与之矛盾. 这些条件是对那些使麦克斯韦方程的解有物理意义的附加条件的重要限制.

麦克斯韦方程 (1.9) 和 (1.10) 对物体的可用性 形如 (1.9) 和 (1.10) 的麦克斯韦方程不但能够描述真空中的电磁场, 而且能够描述物体中的电磁场, 只要物体对电和磁都是中性的, 这时在物体中没有宏观电荷, 并且在外部电磁场作用下不产生电流, 不发生宏观极化和磁化.

组成物体的每一个分子都会在其周围形成电磁场, 这些场的相互作用决定着内应力. 然而, 组成物体的粒子所带的电荷能够这样分布, 使得在物体每一点的平均内禀电磁场和物体中的平均宏观电荷等于零,

$$\boldsymbol{E}_{\text{mean}}=0,\quad \boldsymbol{H}_{\text{mean}}=0.$$

有时, $\boldsymbol{E}_{\text{mean}}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\text{mean}}$ 在有外部电磁场的情况下也等于零.

因此, 尽管在原子和分子中永远存在宏观场, 但是由于原子运动的随机性和其他一些原因, 这些场在宏观上不会表现出来.

与此同时, 作为一个非常重要的实验现象, 我们指出, 麦克斯韦方程 (1.9) 和 (1.10) 适用于描述直到原子尺度的微观场.

麦克斯韦方程的意义 在初步认识电的理论后, 一些基本的实验现象和定律在物理学中得以描述, 由此向与其等价的麦克斯韦方程的过渡是一种简单的转述.

在平常的学术生活中有一种根深蒂固的观点认为, 把已经确立的命题和概念用另外一种方式表述出来, 这在本质上不会有什么新意. 然而, 从电动力学定律过渡到麦克斯韦方程的综合表述是上述观点的一个反例. 这种转述是一项天才的成就, 它奠定了全部现代物理学的基础. 在麦克斯韦方程的这种表述提出之后, 对电磁场本质和麦克斯韦方程组性质的分析就成为相对论的源头, 对惯性参考系、空间和时间这些旧概念的相应的意义重大的重新思考同样也源于此.

§2. 闵可夫斯基空间中的麦克斯韦方程

麦克斯韦方程在四维空间中的表述 为了更加完整地阐明麦克斯韦方程的物理本质, 我们用新的记号改写这些方程. 首先, 仅仅作为一种记号, 我们按照以下矩阵等式引入反对称矩阵 $F_{ij}=-F_{ji}$:

$$(F_{ij})=\begin{pmatrix}0 & F_{12} & F_{13} & F_{14}\\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24}\\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34}\\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & H^3 & -H^2 & cE_1\\ -H^3 & 0 & H^1 & cE_2\\ H^2 & -H^1 & 0 & cE_3\\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0\end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

并考虑四维流形——坐标为 $x^1, x^2, x^3, x^4=t$ 的空间, 且 x^1, x^2, x^3 视为三维几何体中通常的笛卡儿正交坐标. 容易验证, (1.9) 中的 4 个方程在笛卡儿坐标轴上的投影此时可以写为

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j}+\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k}=0, \quad i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{2.2}$$

在引入矩阵 F_{ij} 的同时, 如果在这个坐标系中再按照等式[1)]

$$(F^{ij})=\begin{pmatrix}0 & H_3 & -H_2 & -E^1/c\\ -H_3 & 0 & H_1 & -E^2/c\\ H_2 & -H_1 & 0 & -E^3/c\\ E^1/c & E^2/c & E^3/c & 0\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

引入矩阵 F^{ij}, 则 (1.10) 中的 4 个方程可以写为

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j}=0, \quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{2.4}$$

量 c 的含义为光速 不难证明, 方程 (2.2) 的通解可以表示为

$$F_{ij}=\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^i}, \tag{2.5}$$

式中 A_1, A_2, A_3, A_4 是 x^1, x^2, x^3, x^4 的任意 4 个函数. 此时, F_{ij} 显然是反对称的.

[1)] 在 (2.1) 和 (2.3) 中, $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的分量的角标的位置仅在变换到曲线坐标系时才是重要的 (详见第四章 132—133 页).

我们注意到, 如果 A_1, A_2, A_3, A_4 分别加上四维梯度矢量的分量 $\partial\Psi/\partial x^1, \partial\Psi/\partial x^2, \partial\Psi/\partial x^3, \partial\Psi/\partial x^4$, 则 F_{ij} 的值不变. 利用这种任意性, 我们使用附加条件

$$\frac{\partial A_1}{\partial x^1}+\frac{\partial A_2}{\partial x^2}+\frac{\partial A_3}{\partial x^3}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial A_4}{\partial x^4}=0 \tag{2.6}$$

来进一步规范函数 A_i 的选取.

对于任何给定的 4 个函数 A_i 都可以求出这样的函数 Ψ, 使等式 (2.6) 成立. 等式 (2.6) 可以视为使函数 Ψ 的选取不再具有任意性的条件.

如果把 (2.4) 中的 F^{ij} 替换为[1)]

$$F_{ij}=\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^i},$$

则根据 (2.6) 得出, 4 个函数 A_i 满足同样的 4 个方程:

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial (x^1)^2}+\frac{\partial^2 A_i}{\partial (x^2)^2}+\frac{\partial^2 A_i}{\partial (x^3)^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2}=0,\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{2.7}$$

因此, 求解麦克斯韦方程可以归结为求解满足 (2.6) 式的 4 个函数 A_i, 并且每个函数都满足方程 (2.7). 方程 (2.7) 称为波动方程[2)].

我们将在第八章 (见第二卷) 更加全面地研究波动方程的解的一般性质, 这里只立刻指出解的一个典型性质. 令 $f(\xi)$ 是对其自变量二次可微的任意函数, 则容易看出, 函数

$$A=f(x^1-ct)$$

满足波动方程. 按照这个解, 某一固定值 $\xi=x^1-ct$ 所对应的给定值 $A=f(\xi)$ 以速度 c 沿 x^1 轴传播. 由此可见, c 的意义是光速.

闵可夫斯基空间 引入坐标为 $x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4=t$ 的四维伪欧几里得度规空间[3)]——闵可夫斯基空间, 其度规由以下公式定义[4)]:

$$\mathrm{d}s^2=-(\mathrm{d}x^1)^2-(\mathrm{d}x^2)^2-(\mathrm{d}x^3)^2+c^2\,\mathrm{d}t^2=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j. \tag{2.8}$$

1) 原文如此. 其实, 应将

$$F^{ij}=g^{pi}g^{qj}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q}-\frac{\partial A_q}{\partial x^p}\right)$$

代入 (2.4), 式中的度规张量 g^{ij} 由 (2.8) 定义. ——译注

2) 波动方程也可以从麦克斯韦方程 (1.9) 和 (1.10) 直接推导, 只要在三维空间中引入矢量势 $\boldsymbol{A}$, 使 $\boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{E}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$, 并要求 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$. 详见第二卷第八章 §26 中的相关讨论, 还可参阅: Л. Д. 朗道, E. M. 栗弗席兹. 场论. 鲁欣译. 北京: 高等教育出版社, 2009. 第六章 §46. ——译注

3) 伪欧几里得空间表示, 度规 (2.8) 不是正定的, 但是可以认为 g_{ij} 在整个空间中是常量.

4) 在这里和后面采用以下条件: 对时间分量 $g_{44}>0$, 对空间分量 $g_{\alpha\alpha}<0$, 此外, 四维空间中的角标用拉丁字母表示, 而在单独表示三维空间分量时采用希腊字母. 这些条件曾被 H. 外尔使用 (Weyl H. Space-Time-Matter. London: Methuen, 1922); 现在, 许多作者也采用这样的条件, 它们被广泛应用于许多普及的教材中. 另一方面, 对于 g_{44} 和 $g_{\alpha\alpha}$ 的符号以及角标的表示方法, 在许多书中和某些科学文献中使用的是正好相反的条件.

对于该度规的矩阵 (g_{ij}) 和 (g^{ij}), 我们有

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/c^2 \end{pmatrix}.$$

从定义 (2.1) 和 (2.3) 可见, F^{ij} 和 F_{ij} 之间的联系为

$$F^{ij} = F_{pq} g^{pi} g^{qj}.$$

任意曲线坐标系下的麦克斯韦方程 如果与坐标 $x^1, x^2, x^3, x^4 = t$ 一起再引入任意曲线坐标系 y^1, y^2, y^3, y^4, 它与 $x^1, x^2, x^3, x^4 = t$ 的关系由变换

$$y^i = f^i(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{2.9}$$

给出, 则 $\mathrm{d}s^2$ 的变换公式具有以下形式:

$$\mathrm{d}s^2 = g'_{ij}\,\mathrm{d}y^i\,\mathrm{d}y^j, \quad g'_{ij} = g_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^j}.$$

如果把量 F_{ij} 和 A_i 看作闵可夫斯基空间中的张量和矢量的分量, 即如果在新坐标系中 F'_{ij} 和 A'_i 由以下等式确定:

$$F'_{ij} = F_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^j}, \quad A'_i = A_p\frac{\partial x^p}{\partial y^i}, \tag{2.10}$$

则容易写出变换后的麦克斯韦方程 (2.2), (2.4) 和公式 (2.5). 四维张量 $\boldsymbol{F} = F_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$ 称为电磁场张量, 而四维矢量 $\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{e}^i$ 称为矢量势. 根据张量分析公式, 得

$$\nabla'_k F'_{ij} + \nabla'_j F'_{ki} + \nabla'_i F'_{jk} = 0, \tag{2.11}$$

$$\nabla'_j F'^{ij} = 0, \tag{2.12}$$

并且

$$F'_{ij} = \nabla'_j A'_i - \nabla'_i A'_j = \frac{\partial A'_i}{\partial y^j} - \frac{\partial A'_j}{\partial y^i},$$

而波动方程 (2.7) 在条件

$$\nabla'^i A'_i = 0$$

下变换为

$$\nabla'^q \nabla'_q A'_i = 0.$$

这些方程是从闵可夫斯基空间中的方程 (2.2), (2.4), (2.5) 和 (2.7) 的张量形式得出的. 显然, 在坐标系 x^1, x^2, x^3, t 中对坐标和时间的导数等于协变导数, 因为此坐标系中的克里斯托费尔符号等于零.

我们指出, 由于 F_{ij} 在任意坐标系中都是反对称的, 方程 (2.11) 中带有克里斯托费尔符号的项都会消去, 所以方程 (2.11) 在任意曲线坐标系中还可以写为

$$\frac{\partial F'_{ij}}{\partial y^k}+\frac{\partial F'_{ki}}{\partial y^j}+\frac{\partial F'_{jk}}{\partial y^i}=0. \tag{2.13}$$

方程 (2.12) 在展开后具有以下形式:

$$\nabla'_j F'^{ij}=\frac{\partial F'_{ij}}{\partial y^j}+F'^{pj}\Gamma^i_{pj}+F'^{ip}\Gamma^j_{jp}=0.$$

由 F^{pj} 的反对称性和 Γ^i_{pj} 对下标的对称性可知 $F'^{pj}\Gamma^i_{pj}=0$. 此外, 根据第四章公式 (3.6), 我们有

$$\Gamma^j_{pj}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial y^p},\quad g=\det(g_{ij}),$$

所以第二对麦克斯韦方程 (2.11) 还具有以下形式:

$$\nabla'_j F'^{ij}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial F'^{ij}\sqrt{-g}}{\partial y^j}=0. \tag{2.14}$$

因此, 在按照定义专门引入的四维闵可夫斯基空间中, 利用张量 F_{ij} 可以把麦克斯韦方程写为张量的形式.

从等式 (2.1), (2.3) 和变换公式 (2.10) 出发, 利用所得张量方程可以在不同参考系中研究关于麦克斯韦方程的形式以及磁场强度和电场强度矢量的分量 H^1, H^2, H^3 和 E_1, E_2, E_3 的问题.

闵可夫斯基度规空间是作为一个辅助的数学概念而被引入的, 引入此概念暂时只是因为, 在闵可夫斯基空间中 F_{ij} 在坐标变换时可以视为张量, 而麦克斯韦方程在该空间中可以视为张量方程.

只要再有一些附加的物理假设, 就可以把这样引入的闵可夫斯基空间解释为物理空间, 进而把电磁场张量也解释为物理对象. 这些假设的本质和意义将在下一节中加以阐述.

空间坐标的单独变换 我们在这里再指出下面一些结论, 它们都是从上述数学定义推导出来的. 取形如

$$y^\alpha=f^\alpha(x^1,\ x^2,\ x^3),\quad \alpha=1,\ 2,\ 3,\quad t'=y^4=x^4=t$$

的特殊变换, 其中只有空间坐标发生变换, 但时间所对应的坐标保持不变.

根据公式 (2.10) 和矩阵公式[1] (2.1) 容易检验, 量 E_α 和 H^α 的相应变换公式分别是三维空间中的极矢量和轴矢量的协变分量和逆变分量的变换公式. 对于一般形式的变换 (2.9), 也可以在不同坐标系下考虑 E_α 和 H^α, 但相应变换将不再是某些矢量的分量的变换.

[1] 在三维曲线坐标系中, 必须把矩阵 (2.1) 中的 H^γ 理解为 $H^\gamma\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}$, $\alpha,\beta=1,2,3$ (见第四章 §3 的公式 (3.23)).

洛伦兹变换 考虑保持闵可夫斯基度规空间中的二次型 (2.8) 的形式不变的最一般形式的变换 $y^i = f^i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$, 即满足以下等式的变换:

$$\mathrm{d}s^2 = -(\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 + c^2\,\mathrm{d}t^2 = -(\mathrm{d}y^1)^2 - (\mathrm{d}y^2)^2 - (\mathrm{d}y^3)^2 + c^2\,\mathrm{d}t'^2. \quad (2.15)$$

这样的变换称为洛伦兹变换. 在洛伦兹变换下, 就如同在任意坐标变换下那样, 张量方程 (2.11) 和 (2.12) 及相应的展开式 (2.13) 和 (2.14) 在变换前后的区别仅仅是坐标和分量 F_{ij} 的记号不同而已.

麦克斯韦方程在洛伦兹变换下的不变性 麦克斯韦矢量方程 (1.9) 和 (1.10) 的形式在洛伦兹变换下也保持不变. 不过, 从变换公式 (2.10) 可得, 坐标系 x^i 中的电场强度和磁场强度矢量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 与坐标系 y^i 中的矢量 $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ 是不同的矢量. 我们将在下一节中给出在洛伦兹变换下从 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 到 $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ 的变换公式.

因此, 当矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的变换满足相应条件时, 麦克斯韦方程在洛伦兹变换下不变. 从 (2.13) 和 (2.14) 可见, 除了洛伦兹变换, 还可以指出比它更一般的、也使麦克斯韦方程具有不变性的若干类变换. 然而, 后面将表明, 洛伦兹变换具有特别重要的物理意义.

伽利略变换 形如

$$\begin{aligned} y^\alpha &= x^\alpha + a_0^\alpha - v^\alpha t, \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3, \\ y^4 &= t' = t + t_0 = x^4 + t_0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

的变换称为伽利略变换, 式中 t_0, a_0^α 和 v^α 是常量. 在牛顿力学中, 与变换 (2.16) 相对应的是参考系 y^α 相对于参考系 x^α 的匀速直线平动, 并且 v^α 是该运动在参考系 x^α 中的速度分量.

显然, 伽利略变换不是洛伦兹变换, 因为伽利略变换不满足等式 (2.15). 如果进一步将参考系 y^α 绕某个任意的固定轴旋转有限的固定角, 再相对于各坐标平面进行镜面反射, 就可以把伽利略变换和公式 (2.16) 变得更加复杂. 我们顺便指出, 任何旋转都可以替换为一系列相对于某些平面的镜面反射.

闵可夫斯基空间中的张量和矢量 · 能量动量张量 在四维闵可夫斯基空间中, 根据麦克斯韦方程引入了电磁场张量 $\boldsymbol{F} = F_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$ 和矢量势 $\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{e}^i$. 随着理论的进一步发展, 还可以引入其他许多矢量和张量, 例如: 四维电流矢量 $\boldsymbol{J} = J^i\boldsymbol{e}_i$ (见 §4); 四维力矢量 $\boldsymbol{F}$ (见 §5); 四维速度矢量

$$\boldsymbol{u} = u^i\boldsymbol{e}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s},$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x^i\boldsymbol{e}_i$ 为物质点的四维位移, $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$; 电磁场的能量动量张量

$$\boldsymbol{S} = S_{i\cdot}^{\cdot k}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_k, \quad (2.17)$$

式中

$$S_{i\cdot}^{\cdot k} = -\frac{1}{4\pi}\left(F_{mi}F^{mk} - \frac{1}{4}\delta_i^k F_{mn}F^{mn}\right).$$

从方程 (2.11) 和 (2.12) 得出以下重要推论:

$$\nabla_k S_{i\cdot}^{\cdot k} = 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

这些方程可以解释为真空中电磁场的动量和能量方程.

§3. 洛伦兹变换和惯性参考系

物理学中的相对性原理 一个基本的物理前提——普适的伽利略相对性原理——在于以下论断: 对于任何惯性参考系中的观察者而言, 物质介质和场相互作用的所有物理定律都具有同样的表述, 而所有物理过程和现象都以同样的方式进行. 这里假定存在惯性坐标系集合, 这些坐标系能够彼此作相对运动. 然而, 这些惯性参考系在不同理论中可能有不同的定义方法.

牛顿力学中的惯性系 在牛顿物理学中假设物理空间是三维的 (三维欧几里得空间), 时间是绝对的, 并且在组成全部惯性参考系集合的、彼此作相对常速平动的所有坐标系中, 时间都被普适地定义为同样一种时间. 决定惯性参考系集合的条件是, 孤立质点在这些参考系中静止或常速运动.

伽利略–牛顿相对性原理断言: 所有物理方程和定律应当在伽利略变换 (2.16) 下不变, 该变换确定了从一个笛卡儿惯性坐标系 x^1, x^2, x^3, t 到另一个笛卡儿惯性坐标系 y^1, y^2, y^3, $t + t_0$ 的变换.

在牛顿物理学中, 由 (2.16) 和速度的运动学定义可得以下速度合成法则:

$$\boldsymbol{v}_x = \boldsymbol{v}_y + \boldsymbol{v}, \tag{3.1}$$

式中 $\boldsymbol{v}_y$ 是一个对象或点相对于惯性系 y 的速度, $\boldsymbol{v}_x$ 是该对象相对于惯性系 x 的速度, 而 $\boldsymbol{v}$ 是惯性系 y 相对于惯性系 x 的平动速度.

众所周知, 真空中的光速可以定义为电磁扰动前锋的速度, 或者更简单地定义为电磁场粒子——光子——在真空中的运动速度. 由 (3.1) 可得, 在牛顿物理学中, 光速对位于各自惯性坐标系进行测量的不同观察者而言是不同的. 此外, 由时间的绝对性可知, 在牛顿物理学中信号有可能以无穷大的速度传播.

光速不变假设 但是, 这些结果与实验有根本的矛盾. 实验表明, 光在真空中的传播速度对任何彼此作常速相对运动的观察者都是相同的, 并且这种传播对任何观察者都是各向同性的, 即在所有方向上的传播速度均相同. 著名的麦克尔孙实验和许多其他实验表明, 光速与惯性坐标系的选取无关.

对物理过程更深入的研究还表明, 物质对象的运动速度和能量的传播速度不可能大于光速, 光速可以视为物质对象的一切相对运动可能达到的极限速度.

所以, 光速在所有惯性坐标系中不变, 这一假设 (定律) 是现代物理学的基础. 如果保留伽利略相对性原理这一基本物理学原理, 光速不变假设就成为改变惯性系的概念和探寻两个惯性系之间的新的变换的基础, 这些新的变换应取代伽利略变换 (2.16).

此时, 伽利略变换 (2.16) 是不可接受的, 这些变换必须更复杂一些, 还必须否定绝对时间的存在.

狭义相对论中的惯性坐标系

现在, 我们开始考虑光速不变对两个惯性系之间的坐标变换有哪些限制条件. 惯性系集合可以从唯一一个惯性系通过一系列变换得出, 而选定此唯一惯性系的条件则基于实验数据.

为了探寻相应的变换公式, 除了光速在所有惯性系中不变的基本条件, 我们还使用以下两个自然的条件: 一是任何两个惯性系均等价的条件, 二是可逆对称性条件——均匀各向同性条件. 均匀性的概念关系到空间所有点的几何等价性和运动学等价性, 以后将在更具体的数学表述中加以阐明.

两个惯性系之间的坐标变换

作为基于实验数据选取的初始惯性系 K, 我们取坐标系 x^1, x^2, x^3, $x^4=t$, 其中空间坐标 x^1, x^2, x^3 视为三维欧几里得空间的笛卡儿坐标, 而变量 t 视为时间. 设 y^1, y^2, y^3, $y^4=t'$ 是另一个惯性坐标系 K', 其中 y^1, y^2, y^3 也是笛卡儿坐标, 而 t' 是该坐标系自己的时间. 我们所考虑的问题是: 研究用来决定变换

$$y^i = f^i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4), \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{3.2}$$

的这样一些条件, 使得该变换公式能够代替伽利略—牛顿变换公式 (2.16), 并确定此变换的性质.

设 $\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3$ 是某运动点 M 在惯性系 K 中在 $\mathrm{d}x^4=\mathrm{d}t$ 时间内的位移分量, 相应地, $\mathrm{d}y^1, \mathrm{d}y^2, \mathrm{d}y^3$ 是同一个点在惯性系 K' 中的位移分量, $\mathrm{d}y^4=\mathrm{d}t'$ 是在 K' 中的时间间隔.

对于点 M 在惯性系 K 和 K' 中的相应三维速度 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$, 我们有

$$v^2 = \frac{(\mathrm{d}x^1)^2+(\mathrm{d}x^2)^2+(\mathrm{d}x^3)^2}{\mathrm{d}t^2}, \quad v'^2 = \frac{(\mathrm{d}y^1)^2+(\mathrm{d}y^2)^2+(\mathrm{d}y^3)^2}{\mathrm{d}t'^2},$$

式中 y^α 和 x^β $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ 的对应关系由公式 (3.2) 给出.

引入量

$$\mathrm{d}s_x^2 = (c^2-v^2)\mathrm{d}t^2 = -(\mathrm{d}x^1)^2-(\mathrm{d}x^2)^2-(\mathrm{d}x^3)^2+c^2\,\mathrm{d}t^2,$$
$$\mathrm{d}s_y^2 = (c^2-v'^2)\mathrm{d}t'^2 = -(\mathrm{d}y^1)^2-(\mathrm{d}y^2)^2-(\mathrm{d}y^3)^2+c^2\,\mathrm{d}t'^2,$$

并考虑一个光子的运动. 我们知道, 不论参考系是 K 还是 K', 光子在真空中都以光速运动.

如果同时 $v = v' = c$, 则

$$\mathrm{d}s_y^2 = \mathrm{d}s_x^2 = 0.$$

如果认为 $\mathrm{d}s_x^2 = 0$, 则等式

$$\mathrm{d}s_y^2 = -\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^p}\mathrm{d}x^p\right)^2 - \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^p}\mathrm{d}x^p\right)^2 - \left(\frac{\partial f^3}{\partial x^p}\mathrm{d}x^p\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial f^4}{\partial x^p}\mathrm{d}x^p\right)^2 = 0$$

应当作为变换 (3.2) 所特有的形式的推论而成立, 所以在 $v \neq c$ 的一般情况下应当成立等式

$$\mathrm{d}s_y^2 = \varkappa(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)\,\mathrm{d}s_x^2,$$

式中 $\varkappa$ 可以是其自变量的任意函数.

由变换 $K \to K'$ 和 $K' \to K$ 的对称性可知

$$\mathrm{d}s_x^2 = \varkappa(y^1,\ y^2,\ y^3,\ y^4)\,\mathrm{d}s_y^2 = \varkappa(y^1,\ y^2,\ y^3,\ y^4)\varkappa(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)\,\mathrm{d}s_x^2,$$

所以

$$\varkappa(y^1,\ y^2,\ y^3,\ y^4)\varkappa(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4) = 1. \tag{3.3}$$

从空间的均匀性可得 $\varkappa$ 与空间点无关的条件, 即 $\varkappa$ 与坐标无关, 所以 $\varkappa$ 是常数. 再由 (3.3) 可知 $\varkappa = 1$.

因此, 在从一个惯性系 K 转换到另一个惯性系 K' 的时候, 量

$$\mathrm{d}s^2 = -(\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 + c^2\,\mathrm{d}t^2 \tag{3.4}$$

应当是不变的. 公式 (3.4) 可以视为四维空间度规的定义.

因此, 物理空间可以视为闵可夫斯基空间, 而惯性坐标系之间的变换可以视为洛伦兹变换.

现在已经清楚, 前面在研究麦克斯韦方程的变换时作为辅助的数学对象引入的闵可夫斯基空间和洛伦兹变换具有基本的物理意义.

显然, 麦克斯韦矢量方程在洛伦兹变换下的不变性在已经发展起来的理论中具有非常重要的意义. 上述假设和所得结论是现代物理学的基础.

在整个参考系中对有限物体作出的这一系列假设是狭义相对论, 而只在物质介质或场的局部微元中使用这些假设则是建立广义相对论的基础.

洛伦兹变换的性质　我们来更详细地研究洛伦兹变换的性质. 首先证明, 定义洛伦兹变换的公式 (3.2) 中的函数 $f^i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$ 是线性的.

我们来证明一个更一般的命题. 给定变换

$$y^i = f^i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4), \quad \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^k}\right) \neq 0,$$

并且设

$$\mathrm{d}s^2 = g'_{ij}\,\mathrm{d}y^i\,\mathrm{d}y^j = g_{pq}\,\mathrm{d}x^p\,\mathrm{d}x^q,$$

即

$$g'_{ij}\frac{\partial f^i}{\partial x^p}\frac{\partial f^j}{\partial x^q}=g_{pq}, \tag{3.5}$$

并且 $g'_{ij}=\text{const}$, $g_{pq}=\text{const}$, $\det(g'_{ij})\neq 0$. 我们将证明, 此时函数 $f^i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ 是其自变量的线性函数.

把等式 (3.5) 对 x^s 求导, 得

$$g'_{ij}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^p\partial x^s}\frac{\partial f^j}{\partial x^q}+g'_{ij}\frac{\partial f^i}{\partial x^p}\frac{\partial^2 f^j}{\partial x^q\partial x^s}=0, \tag{3.6}$$

式中 p, s, q 是值为 1, 2, 3, 4 的任意角标. 显然, 由对称性有 $\dfrac{\partial^2 f^k}{\partial x^s\partial x^p}=\dfrac{\partial^2 f^k}{\partial x^p\partial x^s}$ 和 $g'_{ij}=g'_{ji}$. (3.6) 中的角标经过轮换 $p\to q\to s\to p$ 后可以写出

$$g'_{ij}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^q\partial x^p}\frac{\partial f^j}{\partial x^s}+g'_{ij}\frac{\partial f^j}{\partial x^q}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^p\partial x^s}=0. \tag{3.7}$$

等式 (3.6) 与 (3.7) 相减, 得

$$g'_{ij}\frac{\partial f^i}{\partial x^p}\frac{\partial^2 f^j}{\partial x^q\partial x^s}-g'_{ij}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^q\partial x^p}\frac{\partial f^j}{\partial x^s}=0. \tag{3.8}$$

现在轮换 (3.8) 中的角标 $p\to s\to q\to p$, 再把结果与 (3.7) 相减, 得

$$g'_{ij}\frac{\partial f^j}{\partial x^q}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^p\partial x^s}=0 \quad \text{或} \quad A_{iq}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^p\partial x^s}=0, \tag{3.9}$$

式中 p, q, s 是值为 1, 2, 3, 4 的任意角标. 因为

$$(A_{iq})=(g'_{ij})\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^q}\right),\quad \det(g'_{ij})\neq 0,\quad \det\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^q}\right)\neq 0,$$

所以 $\det(A_{iq})\neq 0$, 进而从齐次方程组 (3.9) 得出

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^p\partial x^s}=0. \tag{3.10}$$

方程 (3.10) 对任意 i, p, 和 s 都成立, 所以其通解的形式为

$$y^i=f^i(x^k)=f^i_0+c^{i}_{\cdot k}x^k, \tag{3.11}$$

式中 f^i_0 和 $c^{i}_{\cdot k}$ 是常数.

显然, 已经证明的命题对任何 n 维空间都成立.

变换 (3.11) 对应着四维伪欧几里得空间的均匀变形, 这比洛伦兹变换更为一般. 为了从变换 (3.11) 中分离出洛伦兹变换, 必须把 (3.5) 替换为来自 (2.15) 的更强的条件

$$\begin{aligned}&g'_{11}=g_{11}=-1,\quad g'_{22}=g_{22}=-1,\\&g'_{33}=g_{33}=-1,\quad g'_{44}=g_{44}=c^2,\\&g'_{ij}=g_{ij}=0,\quad i\neq j.\end{aligned} \tag{3.12}$$

条件 (3.12) 对 16 个系数 $c^{i\,\cdot}_{\cdot\,k}$ 的限制是以下 10 个代数关系式:

$$g_{ij}c^{i\,\cdot}_{\cdot\,p}c^{j\,\cdot}_{\cdot\,q} = g_{pq} \quad 或 \quad c_{ip}c^{iq} = \delta^q_p. \tag{3.13}$$

因此, 一般的洛伦兹变换取决于 4 个常数 f^i_0 和 6 个独立参量, 前者确定了一个简单平移, 通过后者则可以按照 (3.13) 表示出 16 个量 $c^{i\,\cdot}_{\cdot\,k}$.

伽利略变换和洛伦兹变换都含有 10 个独立参量

伽利略变换组成群, 它依赖于 10 个参量, 其中 4 个参量确定平移, 3 个参量确定三维空间的旋转和镜面反射, 还有 3 个参量确定坐标系的平动速度. 洛伦兹变换也组成群, 它也依赖于 10 个参量, 其中 4 个参量确定平移, 6 个参量确定四维闵可夫斯基空间的镜面反射和旋转, 而系数 $c^{i\,\cdot}_{\cdot\,k}$ 就是通过这 6 个独立参量表示出来的.

对于任何维空间的任意度规, 满足条件 (3.13) 的变换称为正交变换. 正交变换组成群. 变换行列式 $\Delta = \det(c^{i\,\cdot}_{\cdot\,k}) > 0$ 的正交变换所组成的子群称为正常旋转群.

无穷小洛伦兹变换

对于正交变换群中的恒等变换, 有

$$c^{i\,\cdot}_{\cdot\,k} = \delta^i_k.$$

我们用公式

$$c^{i\,\cdot}_{\cdot\,k} = \delta^i_k + \Omega^{i\,\cdot}_{\cdot\,k}$$

引入量 $\Omega^{i\,\cdot}_{\cdot\,k}$ 来代替 $c^{i\,\cdot}_{\cdot\,k}$. 对于恒等变换, 有 $\Omega^{i\,\cdot}_{\cdot\,k} = 0$. 如果 $\Omega^{i\,\cdot}_{\cdot\,k}$ 无穷小, 则系数 $c^{i\,\cdot}_{\cdot\,k}$ 所定义的变换属于正常旋转群, 因为 $\Delta \approx 1$. 量 $c^{i\,\cdot}_{\cdot\,k}$ 和 $\Omega^{i\,\cdot}_{\cdot\,k}$ 可以视为参考系 K 或 K' 中的张量的分量, 或者 K 中以 i 为角标的一组矢量, 或者 K' 中以 k 为角标的一组矢量.

无穷小旋转的正交条件在忽略二阶小量后具有以下形式:

$$g_{iq}\Omega^{i\,\cdot}_{\cdot\,p} + g_{pj}\Omega^{j\,\cdot}_{\cdot\,q} = 0,$$

或

$$\Omega_{qp} = -\Omega_{pq}.$$

反对称矩阵 Ω_{pq} 可以视为闵可夫斯基空间中相应四维反对称张量的分量, 而该张量的 6 个独立分量可以视为确定四维闵可夫斯基空间中的无穷小旋转的独立参量. 在笛卡儿惯性系中, 四维反对称张量 Ω_{pq} 对应 2 个三维矢量 $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{U}$, 相应公式为

$$(\Omega_{pq}) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega^3 & \Omega^2 & -U_1 \\ \Omega^3 & 0 & -\Omega^1 & -U_2 \\ -\Omega^2 & \Omega^1 & 0 & -U_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega^{i\,\cdot}_{\cdot\,q} = g^{ip}\Omega_{pq}.$$

容易看出, 轴矢量 $\boldsymbol{\Omega}(\Omega^1,\ \Omega^2,\ \Omega^3)$ 表征三维空间的无穷小旋转, 极矢量 $\boldsymbol{U}(U_1,\ U_2,\ U_3)$ 则表征惯性系 K' 相对于惯性系 K 的无穷小平动速度.

惯性系 K' 相对于惯性系 K 平动时的洛伦兹变换

我们来研究洛伦兹变换 (3.11) 的一个重要特例, 其形式为

$$y^1 = c^{1}_{\cdot 1}x^1 + c^{1}_{\cdot 4}t,\quad y^2 = x^2,\quad y^3 = x^3,\quad y^4 = c^{4}_{\cdot 1}x^1 + c^{4}_{\cdot 4}t.$$

该变换对应着惯性系 K' 相对于惯性系 K 沿 x^1 轴以常速 $U = -c^{1}_{\cdot 4}/c^{1}_{\cdot 1}$ 的平动. 此时, 条件 (3.13) 容易求解; 因为没有额外的镜面反射, 所以 $\Delta > 0$, 在此条件下解得正变换和逆变换公式分别为:

$$\begin{aligned} y^1 &= \frac{x^1 - Ut}{\sqrt{1-\dfrac{U^2}{c^2}}},\quad t' = \frac{t - \dfrac{U}{c^2}x^1}{\sqrt{1-\dfrac{U^2}{c^2}}},\\ x^1 &= \frac{y^1 + Ut'}{\sqrt{1-\dfrac{U^2}{c^2}}},\quad t = \frac{t' + \dfrac{U}{c^2}y^1}{\sqrt{1-\dfrac{U^2}{c^2}}}. \end{aligned}\tag{3.14}$$

当 U/c 很小时, 洛伦兹变换 (3.14) 在忽略 $(U/c)^2$ 阶的量后就成为伽利略变换.

时间概念的相对性

按照一般公式 (3.11) 及其特例 (3.14), 在从 K 变换到 K' 时, "运动参考系"中的时间 t' 不同于原来的"静止"参考系中的时间 t. 此外, 几何坐标和时间在某种程度上成为平等的. 不过, 这里所说的不是要完全消除几何距离与时间间隔之间的区别. 例如, 在用 $\mathrm{d}s^2$ 定义度规时, $(\mathrm{d}x^\alpha)^2$ 和 $\mathrm{d}t^2$ 具有不同符号就是这种区别的一种表现. 由二次型理论已知, 在使二次型 $\mathrm{d}s^2$ 的形式保持不变的任何实变量变换下, 上述符号是不变的.

时间间隔的区别

我们来研究从 (3.14) 得出的一个关系式. 设点 M 在惯性系 K' 中静止 ($y^1 = \mathrm{const}$), 所以它在惯性系 K 中以速度 U 运动. 在点 M 的相应时间间隔 $\mathrm{d}t'$ 和 $\mathrm{d}t$ 之间的关系为

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\dfrac{U^2}{c^2}}},\quad 即\quad \mathrm{d}t > \mathrm{d}t'.\tag{3.15}$$

类似地, 设点 N 在惯性系 K 中静止 ($x^1 = \mathrm{const}$), 则有

$$\widetilde{\mathrm{d}t'} = \frac{\widetilde{\mathrm{d}t}}{\sqrt{1-\dfrac{U^2}{c^2}}},\quad 即\quad \widetilde{\mathrm{d}t'} > \widetilde{\mathrm{d}t}.\tag{3.16}$$

因此, 对 K 中的观察者而言, K' 中的观察者自己的时间过得较慢. 另一方面, 对 K' 中的观察者而言, K 自己的时间过得较慢. 这是惯性系 K 和 K' 完全等价的表现.

对于沿速度 $\boldsymbol{U}$ 的方向放置的线段, 其长度也满足类似的关系式. 对于与速度 $\boldsymbol{U}$ 的方向垂直的线段, 其长度在 K 和 K' 中相同.

固有参考系和固有时间 在应用中具有特别意义的是固有参考系, 这是在介质的给定点 M 这样选取的一种惯性参考系 K^*, 使得点 M 在给定时刻相对于参考系 K^* 的速度为零. 在这一参考系中, 相邻点的速度和点 M 在其他时刻的速度不等于零.

我们的感觉与使用固有参考系和固有时间[1] 有关. 固有时间是表征衰老和所有可能的内部过程及内部相互作用的不变量.

在基本粒子、原子和分子的运动过程中, 所有内部相互作用和所有特征时间, 例如被光波或无线电波辐射的周期, 放射性原子核的半衰期, 不稳定“基本”粒子的存在时间等, 只有在固有参考系中才是相同的.

在研究连续介质运动时, 可以在每一点和每一时刻考虑自己的固有坐标系, 并在这一坐标系中使用各种张量和矢量的分量值以及自己的固有时间间隔 $d\tau$, 它由以下等式定义:

$$d\tau = \frac{1}{c}\,ds = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (v^2 < c^2,\ ds > 0), \tag{3.17}$$

式中 dt 为相应的时间间隔, v 是在观察者的固定参考系中的速度.

固有坐标系和随体坐标系 显然, 固有坐标系一般不同于随体坐标系. 介质微元的速度在随体坐标系中永远为零; 固有坐标系是惯性系, 而随体坐标系当然一般不是惯性系.

时钟佯谬 在研究同一个点或不同点的各种运动时, 有限的固有时间间隔可以通过沿路径 (世界线) 的以下积分来计算:

$$\Delta\tau = \tau - \tau_0 = \frac{1}{c}\int ds = \int_{t_0}^{t}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt. \tag{3.18}$$

固有时间间隔 $\Delta\tau$ 是不变量, 所以表达式 (3.18) 给出的计算结果在观察者使用任何坐标系时都是相同的, 无论坐标系是惯性的还是非惯性的.

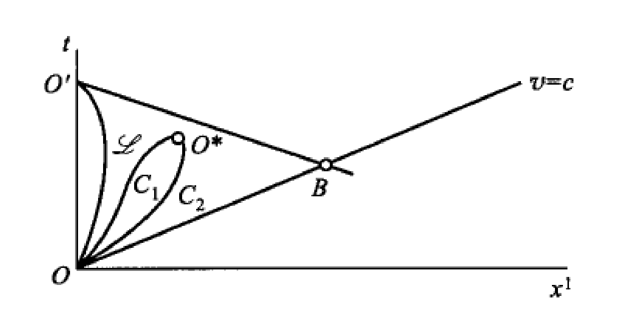


图 40. 固有时间间隔依赖于运动规律

在观察者的给定惯性坐标系中, 积分 (3.18) 依赖于闵可夫斯基空间中的曲线 $x^i = x^i(t)$. 例如, 对于沿 x^1 轴的直线运动, 固有时间间隔 $\Delta\tau$ 是 x^1, t 平面上积分路径的泛函 (图 40). 按照从点 O 到点 O^* 的不同路径 C_1 和 C_2 计算出的 $\Delta\tau$ 值是不同的.

如果认为地球是惯性参考系, 则对于地球上的静止物体来说, 积分路径与时间轴 t 重合. 如果一位宇航员乘坐火箭沿 x^1 轴先离开地球再返回, 则其运动规律表示为形如 $\mathscr{L}$ 的曲线.

[1] 固有时间是指固有参考系中的静止时钟所测量的时间. 在 (3.15) 和 (3.16) 中, t' 和 t 分别是点 M 和点 N 的固有时间. ——译注

在 (3.18) 的最后一个积分中, 被积函数在 $v \neq 0$ 时的值小于它在 $v = 0$ 时的值, 所以在宇航员返回点 O' 时, 地球上的观察者的固有时间间隔 $\Delta\tau_{\text{Earth}} = OO'$ 将不等于宇航员的固有时间间隔

$$\Delta\tau_{\text{cosm}} = \int\limits_{t(O)}^{t(O')} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \mathrm{d}t,$$

并且

$$\Delta\tau_{\text{cosm}} < \Delta\tau_{\text{Earth}}.$$

如果宇航员与一位地球上的居民是双生子, 则宇航员在返回地球后将比他在地球上的兄弟年轻[1].

光子以光速运动, 设线段 OB 和 BO' 对应其运动规律 $x^1 = ct$ 和 $x^1 = -ct + x_B$. 显然, 对光子总有 $\Delta\tau = 0$, 即光子的固有时间不会流逝.

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在从 K 变换到 K' 时的变换

现在就容易解释, 矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在从一个惯性坐标系 K 转换到另一个"运动的"惯性坐标系 K' 的时候如何变换, 其中包括转换到固有坐标系 $K' = K^*$ 的情况. 根据公式 (2.10), (3.14) 和 (2.1) 不难确定以下公式:

$$\boldsymbol{E}'_{\parallel} = \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right)_{\parallel}, \quad \boldsymbol{E}'_{\perp} = \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right)_{\perp} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{H}'_{\parallel} = \left(\boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E}\right)_{\parallel}, \quad \boldsymbol{H}'_{\perp} = \left(\boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E}\right)_{\perp} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.20}$$

这里用角标 $\parallel$ 表示矢量在平行于坐标系 K' 运动速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向上的分量, 用角标 $\perp$ 表示矢量在垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的方向上的分量. 容易看出, $(\boldsymbol{v}/c) \times \boldsymbol{H}$ 和 $(\boldsymbol{v}/c) \times \boldsymbol{E}$ 这两项对 $\boldsymbol{E}'_{\parallel}$ 和 $\boldsymbol{H}'_{\parallel}$ 并无贡献, 所以 $\boldsymbol{E}'_{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\parallel}$, $\boldsymbol{H}'_{\parallel} = \boldsymbol{H}_{\parallel}$. 不过, 为了公式的对称性, 它们仍被保留在公式 (3.19) 和 (3.20) 中, 这对于写出 v^2/c^2 很小时的近似公式是非常方便的.

公式 (3.19) 和 (3.20) 表明, 通常使用的电磁场基本特征量——矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$——与惯性坐标系的选取有重要关系, 所以它们的物理意义是非常有限的.

在牛顿力学中, 在使用加速运动的坐标系时必须引入惯性力, 所以非相对论力学中的外力场与运动坐标系的选取有关. 然而重要的是, 力场在各惯性系中是相同的, 仅在变换到相对于原坐标系加速运动的坐标系时才有变化. 电磁场特征量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 甚至在从一个惯性坐标系变换到另一个惯性坐标系时也有变化.

此外我们指出, 如果在某个坐标系 K 中只有电场, 则在转换到相对于 K 运动的坐标系时一定也会出现电磁场, 相反的结论也成立.

[1] 这就是双生子佯谬, 它和与之等价的时钟佯谬其实是正确的命题, 被称为佯谬的原因与历史上的争论有关. ——译注

例如, 考虑电子及其固有坐标系 K^*. 在此坐标系中没有磁场, $\boldsymbol{H}^* = 0$, 电场 $\boldsymbol{E}^*$ 是库仑场, 并且电子是静止的. 在相对于此坐标系以速度 $\boldsymbol{v}$ 作匀速直线运动的坐标系中, 矢量 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{H}'$ 作为麦克斯韦方程的解可由公式 (3.19) 和 (3.20) 求出, 其中应取 $\boldsymbol{H} = 0$, 并把矢量 $\boldsymbol{E}$ 按照以下公式通过 $\boldsymbol{r}$ 表示出来:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{e}{r^2}\,\mathrm{grad}\,r.$$

根据公式 (3.19) 和 (3.20) 可以对场 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{H}'$ 进行更完整的研究.

电磁场的不变量 单独每一个矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都与惯性坐标系的选取有关. 用矩阵 (2.1) 通过 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 定义的电磁场张量 $\boldsymbol{F} = F_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 是电磁场的一个物理不变量, 类似的量还有温度、力矢量、应变张量等. 张量 $\boldsymbol{F}$ 有 6 个独立分量和仅仅 2 个独立不变量

$$\frac{1}{2}F_{ij}F^{ij} = H^2 - E^2,$$

$$\frac{1}{4}\left[F^{ik}F^{lm}F_{il}F_{km} - \frac{1}{2}(F^{ik}F_{ik})^2\right] = (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H})^2.$$

要想利用洛伦兹变换完全去掉磁场或电场, 必须成立等式 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} = 0$, 即矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 必须互相垂直.

如果在某一个坐标系中 $H^2 = E^2$, 则此等式在另外任何一个惯性坐标系中都成立. 如果 $H^2 - E^2 = 0$ 且 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} = 0$, 则矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在所有坐标系中都会大小相等并且互相垂直.

实际常用的参考系中的矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 对实际常用的各种惯性坐标系来说, 相对速度与光速相比是小量, 所以矢量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ 之间的相应区别很小. 由公式 (3.19) 和 (3.20) 可见, 如果忽略 v/c 量级的量, 矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 就可以视为物理不变量.

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的近似变换公式 (考虑 v/c 量级的小量) 以后将研究考虑电磁效应的非相对论连续介质力学, 所以将仅仅使用相对速度 v 与光速 c 相比是小量 ($v^2/c^2 \ll 1$) 的坐标系. 设坐标系 K' 相对于坐标系 K 以常速度 $\boldsymbol{v}$ 运动. 这时, 如果忽略 v/c 的二阶小量但考虑一阶小量, 则伽利略变换

$$y^\alpha = x^\alpha - v^\alpha t, \quad t = t'$$

确定了从坐标系 K 向坐标系 K' 的变换, 而 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的变换公式简化为以下形式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}),\\ \boldsymbol{H}' &= \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})\end{aligned} \tag{3.21}$$

(带撇号 ′ 的量对应坐标系 K', 无撇号的量对应坐标系 K).

在个别问题中, 例如当矢量 $\boldsymbol{E}$ 很小时, 公式 (3.21) 可以进一步简化.

§4. 电磁场与导体的相互作用

在电磁场作用下, 在导体中一般会产生电流. 本节将不考虑与极化和磁化有关的现象. 金属物体如铜、铁等都是导体的例子, 等离子体——被电离的气体——则是导电介质的一个重要的例子.

三维和四维电流密度矢量 · 传导电流 在导体中出现的电流是带电粒子 (电子和离子) 的运动. 如果用 $\boldsymbol{v}_k$ 表示编号为 k 的粒子的微观速度, 用 e_k 表示其电荷, 则可以引入电流密度 $\boldsymbol{j}$, 它等于体微元 ΔV 中所有粒子的 $e_i\boldsymbol{v}_i$ 之和除以体积 ΔV,

$$\boldsymbol{j} = \frac{1}{\Delta V}\sum_i e_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{j}^* + \rho_e\boldsymbol{v}. \tag{4.1}$$

这里 $\boldsymbol{v}$ 是介质的宏观速度, 矢量 $\boldsymbol{j}^*$ 就是通常的“工程电流”, 称为传导电流. 这种电流出现于电磁场作用下的导体中, 不论导体是静止的还是运动的. 矢量 $\rho_e\boldsymbol{v}$ 是与宏观电荷输运有关的电流.

因为

$$\sum_i e_i\boldsymbol{v}_i = \sum_i e_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\Delta e, \quad \Delta e = \sum_i e_i,$$

所以传导电流矢量 $\boldsymbol{j}^*$ 可以按照公式

$$\boldsymbol{j}^* = \sum_i \frac{e_i}{m_i}\boldsymbol{I}_i$$

通过在第三章引入的扩散流矢量 $\boldsymbol{I}_i$ 表示出来, 并且比值 e_i/m_i 只依赖于带电粒子的种类.

除了在几何空间中定义的三维矢量 $\boldsymbol{j}$, 在闵可夫斯基空间中再引入一个四维电流密度矢量, 它在固有笛卡儿坐标系中由以下公式定义:

$$\boldsymbol{J} = J^i\boldsymbol{e}_i, \quad J^1 = j^1, \quad J^2 = j^2, \quad J^3 = j^3, \quad J^4 = \rho_e. \tag{4.2}$$

矢量 $\boldsymbol{J}$ 在任何其他坐标系中的分量可以按照闵可夫斯基空间中四维矢量的一般变换公式通过固有坐标系中的分量计算.

导体的麦克斯韦方程 当物体中有电流和电荷但没有极化和磁化时, 麦克斯韦方程的形式为

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{4.3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e. \tag{4.4}$$

在定常电磁场的特殊情况下,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0,$$

所以矢量 $\boldsymbol{E}$ 是有势的, 并且

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},$$

即电流总是导致产生磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的旋度场.

位移电流 量 $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ 也导致产生磁场, 它称为位移电流. 位移电流 $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ 在许多实际情况中很小. 在麦克斯韦方程中引入位移电流是由麦克斯韦依照实验提出的, 这是对之前存在的库仑定律、安培定律、法拉第定律等电动力学实验定律的补充.

总电荷守恒定律 如果对 (4.3) 中第二个方程的两侧取散度, 再应用方程 (4.4), 就可以得出麦克斯韦方程的一个重要推论:

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0. \tag{4.5}$$

这个方程可以视为电荷的连续性方程或者电荷守恒条件.

其实, 取方程 (4.5) 对导体作为一种连续介质所占据的某一静止几何体的积分, 得

$$\int\limits_V\frac{\partial\rho_e}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\rho_e\,\mathrm{d}\tau=-\int\limits_V\operatorname{div}\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\tau=-\int\limits_\Sigma j_n\,\mathrm{d}\sigma,$$

式中 Σ 为 V 的表面, $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的外法线. 矢量 $\boldsymbol{j}$ 输运电荷通过表面 Σ, 量 $-\int\limits_\Sigma j_n\,\mathrm{d}\sigma$ 是单位时间内通过表面 Σ 进入几何体 V 的电荷总量, 它等于几何体 V 内的电荷在单位时间内的变化量, 即量

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\rho_e\,\mathrm{d}\tau=\frac{\partial e}{\partial t},$$

式中 e 是 V 内的总电荷. 如果在表面 Σ 上 $j_n=0$, 则 $\partial e/\partial t=0$, V 内的电荷守恒.

总电荷守恒条件是麦克斯韦方程 (4.3) 和 (4.4) 的精确推论. 我们指出, 与质量守恒定律相反, 电荷守恒定律现在仍是永远成立的基本物理定律.

导体的麦克斯韦方程尚不封闭 麦克斯韦方程组 (4.3) 和 (4.4) 是不封闭的, 其方程数目为 7, 因为方程 $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$ 是 (4.3) 中第一个方程在相应一些初始条件下的直接推论, 而未知量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}$, ρ_e 的数目为 10.

电动力学问题与连续介质力学问题有关 此外, 因为在运动导体中 $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}^*+\rho_e\boldsymbol{v}$, 电荷密度分布与介质运动有关, 所以电动力学问题与连续介质力学问题有关.

静止导体的欧姆定律 使静止导电介质的方程组 (4.3) 和 (4.4) 得以封闭的矢量关系式可以是欧姆定律. 欧姆定律建立起传导电流密度 $\boldsymbol{j}^*$ 与电磁场特征量之间的关系, 此关系与导体的性质有关. 在静止导体的许多重要情况下, 由实验得出的欧姆定律具有以下形式:

$$\boldsymbol{j}^*=\sigma\boldsymbol{E}. \tag{4.6}$$

电导率 系数 σ 称为电导率. 对于各向同性导体, 电导率 σ 是标量, 并且

$$\sigma = \frac{1}{R},$$

式中 R 是电阻. 对于各向异性导体, 例如晶体, 电导率 σ 是二阶张量, 在方程 (4.6) 中张量 σ 与矢量 $\boldsymbol{E}$ 进行缩并.

电导率 σ 对不同导体是不同的, 而对给定导体而言, 它可能依赖于导体的温度和其他一些热力学参量. 气体的电导率随着温度的增加而增加. 例如, 空气在通常的条件下基本不被电离, 是不良导体, 但随着温度的增加或者被强烈辐射后, 空气的电离度增加, 其中的自由电子数目增加, 空气就成为良导体. 对于固体, σ 可能随着温度的增加而减小. 电导率在许多情况下被视为物质的物理常量, 这类似于黏度 μ 和 ζ 或者热导率 $\varkappa$.

固有坐标系中的欧姆定律 对于运动的导体, 假设在介质的每一点在固有坐标系 (定义见 §3) 中都成立形如 (4.6) 的欧姆定律. 在固有坐标系中, 欧姆定律具有以下形式:

$$\tilde{\boldsymbol{j}}^* = \sigma \tilde{\boldsymbol{E}},$$

其中波浪号 ˜ 表示相应的量是在固有坐标系中进行研究的. 从固有坐标系变换到用来研究介质运动的基本惯性参考系后, 根据电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 的变换公式 (3.21), 我们得到运动导体的欧姆定律, 其形式为

$$\boldsymbol{j}^* = \sigma \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} \right). \tag{4.7}$$

实验和更详细的理论分析表明, 形如 (4.7) 的欧姆定律并非总可以使用. 例如, 强磁场情况下的欧姆定律必须采用以下形式的关系式:

$$\boldsymbol{j}^* = \sigma \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} \right) + k(\boldsymbol{j}^* \times \boldsymbol{H}),$$

式中 k 为某个常量或介质热力学参量的相应函数. 附加项 $k(\boldsymbol{j}^* \times \boldsymbol{H})$ 称为霍尔电流.

电导率无穷大的介质 存在一些电导率非常大的介质 (例如铜或者被强烈电离的等离子体), 所以在实际应用中经常研究一些导电性能无穷好的介质, 其电导率 σ 为无穷大, 而电阻 R 等于零. 引入这样的介质在某种意义上类似于引入理想流体来代替黏性流体.

因为电流密度 $\boldsymbol{j}^*$ 按照条件应当是有限的, 所以从形如 (4.6) 和 (4.7) 的欧姆定律可知, 在电导率无穷大的静止介质内部应当成立条件

$$\boldsymbol{E} = 0,$$

而在电导率无穷大且运动速度为 $\boldsymbol{v}$ 的介质内部, 在观察者的坐标系中应当有

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}.$$

因此, 在电导率无穷大的介质中, 电场强度场 $\boldsymbol{E}$ 可以通过磁场强度场 $\boldsymbol{H}$ 和介质的宏观速度场 $\boldsymbol{v}$ 来确定. 此时, 2 个麦克斯韦方程 (4.3) 可用于确定 $\boldsymbol{H}$ 和电流密度 $\boldsymbol{j}$.

洛伦兹力 电磁场对介质的作用力称为有质动力. 如果介质静止, 则作用于携带电荷 $\mathrm{d}e$ 的介质微元的有质动力为

$$\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau = \rho_e \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau.$$

如果在微元 $\mathrm{d}\tau$ 中除电荷 $\mathrm{d}e$ 外还有电流 $\boldsymbol{j}$, 则作用于单位体积介质的有质动力为

$$\boldsymbol{F} = \rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}). \tag{4.8}$$

这个力称为洛伦兹力.

如果介质在运动, 则可以认为在固有坐标系中对有质动力成立类似的公式

$$\tilde{\boldsymbol{F}} = \rho_e \tilde{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{c}(\tilde{\boldsymbol{j}}\times\tilde{\boldsymbol{H}}),$$

式中所有矢量都定义于固有坐标系.

设固有坐标系 K' 以速度 $\boldsymbol{v}$ 相对于惯性坐标系 K 运动. 如果在从坐标系 K' 向坐标系 K 转换时使用近似的变换公式 (见 (3.21)), 则在忽略 v^2/c^2 阶小量后, 在惯性系 K 中得出

$$\boldsymbol{F} = \rho_e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right) + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j}^*\times\boldsymbol{H}), \tag{4.9}$$

这里已经认为 $\tilde{\boldsymbol{j}}^* = \boldsymbol{j}^*$. 对比 (4.9) 和 (4.8) 并利用 (4.1), 由此得出

$$\tilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F},$$

即在非相对论近似下, 洛伦兹力在参考系 K 中的表达式 (4.8) 与它在运动介质情况下的表达式相同. 确定作用于单位体积导电介质的有质动力的公式 (4.8) 是根据实验现象建立起来的, 它被看作是电动力学的基本假设之一, 或者是用来确定场和电流的电磁特征量的基础之一.

考虑有质动力的动量方程 电磁场作用在导电介质微元上的有质动力是体积力, 所以需要把它们像重力那样引入到物质介质的动量方程中:

$$\rho\boldsymbol{a} = \nabla_i \boldsymbol{p}^i + \boldsymbol{F}_{\text{Lorentz}} + \rho\boldsymbol{F}_{\text{gravitation}}.$$

确定导电连续介质运动的问题在一般情况下是一个综合问题, 在解决问题时必须一起求解连续介质力学方程和电动力学方程. 我们强调, 有质动力的表达式 (4.8) 仅仅考虑了在介质中有电荷和电流的情况, 而当介质被极化和磁化时, 其表达式还应当更加复杂.

电磁场中以及场与导电介质之间的能量相互作用 现在考虑电磁场与导电介质之间的能量相互作用. 我们知道, 例如, 静止导体在电流通过时会发热, 这与电磁场和导体之间的能量交换有关. 我们先从麦克斯韦方程得出用来确定电磁场能量变化的乌莫夫－坡印亭方程. 麦克斯韦方程 (4.3) 中

的第一个和第二个方程分别与 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 作标量乘后再相减, 得

$$\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=-\frac{1}{c}\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}. \tag{4.10}$$

在笛卡儿坐标系中, 此式左侧可以写为 2 个行列式之差的形式:

$$\begin{vmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix},$$

或者, 交换这些行列式中的行, 将其写为

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ E_1 & E_2 & E_3 \\ \boxed{H_1} & \boxed{H_2} & \boxed{H_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ \boxed{E_1} & \boxed{E_2} & \boxed{E_3} \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix},$$

式中用记号 □ 标出的量在展开行列式时不应被求导. 由此可见, 式 (4.10) 的左侧可以表示为 1 个行列式的形式:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ E_1 & E_2 & E_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix}.$$

乌莫夫－坡印亭矢量和乌莫夫－坡印亭方程

如果引入矢量

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}), \tag{4.11}$$

则式 (4.10) 可以写为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{8\pi}(H^2+E^2)+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=0. \tag{4.12}$$

这个方程称为乌莫夫－坡印亭方程, 而矢量 (4.11) 称为乌莫夫－坡印亭矢量. 把 (4.12) 对静止的有限几何体 V 积分, 得

$$\int\limits_{\Sigma}S_n\,\mathrm{d}\sigma+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{8\pi}\int\limits_{V}(H^2+E^2)\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_{V}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau=0, \tag{4.13}$$

式中 Σ 是几何体 V 的表面, $\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的外法线.

电磁场的能量

积分关系式 (4.13) 中的每一项都有物理意义. 三维空间中的标量

$$\frac{1}{8\pi}(H^2+E^2)$$

被定义为电磁场的体积能量; $\int\limits_V \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$ 可以视为电场 $\boldsymbol{E}$ 对带电粒子的元功, 这些粒子的运动包括由电流 $\boldsymbol{j}^*$ 导致的微观内部运动和由 $\rho_e\boldsymbol{v}$ 导致的宏观运动.

焦耳热　在导体静止时,

$$\int\limits_V \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \int\limits_V \boldsymbol{j}^*\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}Q_{\mathrm{J}}$$

是焦耳热, 所以方程 (4.13) 对静止导体可以写为

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\int\limits_\Sigma S_n\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{J}}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.14}$$

表面为 Σ 的静止导体中的电磁场总能量 $\mathscr{E}$ 的变化是由通过 Σ 的乌莫夫–坡印亭矢量流和进入介质的焦耳热导致的.

从电磁场进入静止介质的热流　从电磁场进入单位质量静止导电介质的热流 $\mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^{(\mathrm{e})}$ 等于

$$\mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^{(\mathrm{e})} = \frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{el}}^{(\mathrm{e})}}{\mathrm{d}m} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}t.$$

真空中电磁场能量的变化　我们强调, 区域 V 中电磁场能量的变化不只是由场与介质之间的相互作用导致的. 乌莫夫–坡印亭方程在真空中的麦克斯韦方程 (1.9), (1.10) 成立时也成立, 这时式 (4.14) 可写为

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\int\limits_\Sigma S_n\,\mathrm{d}\sigma,$$

即这时只有乌莫夫–坡印亭矢量流才会导致区域 V 中的电磁场总能量发生变化. 不过, 这种变化仅在电磁场非定常时才不为零. 在电磁场定常 $(\partial\boldsymbol{H}/\partial t = \partial\boldsymbol{E}/\partial t = 0)$ 的情况下, 通过真空中封闭曲面的乌莫夫–坡印亭矢量流因为麦克斯韦方程而永远为零. 在导体中, 通过封闭曲面 Σ 的乌莫夫–坡印亭矢量流即便在电磁场定常时也不等于零. 如果 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\neq 0$, 则通过曲面 Σ 非封闭部分的乌莫夫–坡印亭矢量流一般不为零. 乌莫夫–坡印亭矢量表征电磁场不同区域之间的能量交换, 换言之, 若曲面 Σ 将电磁场划分为不同区域, 则乌莫夫–坡印亭矢量表征通过 Σ 的能量流.

当介质有宏观运动时, 上述所有解释都可以应用于介质微元, 这时乌莫夫–坡印亭方程是在相应的固有惯性坐标系中写出的.

在相对于固有惯性坐标系运动的惯性坐标系中,

$$\int\limits_{\Delta V} \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \neq \int\limits_{\Delta V} \tilde{\boldsymbol{j}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t,$$

即量 $\int\limits_{\Delta V} \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$ 不等于焦耳热, 它们的差别等于有质动力 (4.8) 的功.

导电介质的热流方程　对于运动的导电介质微元, 固有坐标系中的热流方程在一般情况下可以写为以下形式:

$$\mathrm{d}U = \frac{p^{\alpha\beta}\,\mathrm{d}\varepsilon_{\alpha\beta}}{\rho} + \mathrm{d}q_{\mathrm{nonel}}^{(\mathrm{e})} + \frac{1}{\rho}\tilde{\boldsymbol{j}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}q^{**},$$

式中的波浪号 ~ 表示相应量取自固有坐标系. 能量流 $\tilde{\boldsymbol{j}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}t/\rho=\mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^{(\mathrm{e})}$ 表示焦耳热, 即从电磁场的能量转化而来并进入介质微元的热量. 在所考虑的情况下, 电磁场对 $\mathrm{d}q^{**}$ 的贡献被认为等于零. 我们将在下一节中看到, 如果极化和磁化效应非常重要, 一般而言就必须考虑 $\mathrm{d}q^{**}$.

在这一节中, 我们引入了有质动力的关系式和电磁场与介质之间能量交换的关系式, 磁流体力学就是在这些关系式的范围内建立起来的. 我们稍后再研究磁流体力学的基本原理, 现在转而研究在极化和磁化效应非常重要的时候关于有质动力和电磁场能量流的问题.

§5. 电磁场与物体在考虑极化和磁化时的相互作用

在外部电磁场的影响下, 在某些物体中会发生极化和磁化, 在物体内部则会产生一种改变外部场的宏观电磁场.

考虑极化和磁化时的麦克斯韦方程 · 电通量密度和磁通量密度 · 极化强度和磁化强度

在这样的物体中, 麦克斯韦方程的形式为

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho_e, \tag{5.2}$$

式中 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为电通量密度矢量和磁通量密度矢量[1]. 可以用磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 来代替磁通量密度矢量 $\boldsymbol{B}$, 它们之间的关系由以下公式给出:

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}+4\pi\boldsymbol{M}. \tag{5.3}$$

矢量 $\boldsymbol{M}$ 在宏观上表征磁偶极子在物体中的有序分布. 类似地, 可以用极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$ 来代替电通量密度矢量 $\boldsymbol{D}$, 它们之间的关系由以下公式给出:

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}.$$

矢量 $\boldsymbol{P}$ 表征电偶极子在物体中的分布.

如前所述, 若在初始时刻 $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$, 则 (5.1) 中的第二个方程得自第一个方程.

积分形式的麦克斯韦方程

方程组 (5.1), (5.2) 可以写为积分的形式:

$$\oint\limits_{\mathscr{L}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\frac{1}{c}\int\limits_{\Sigma_1}\frac{\partial B_n}{\partial t}\,\mathrm{d}\sigma,\quad \int\limits_{\Sigma}B_n\,\mathrm{d}\sigma=0, \tag{5.4}$$

$$\oint\limits_{\mathscr{L}}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{4\pi}{c}\int\limits_{\Sigma_1}j_n\,\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{c}\int\limits_{\Sigma_1}\frac{\partial D_n}{\partial t}\,\mathrm{d}\sigma,\quad \int\limits_{\Sigma}D_n\,\mathrm{d}\sigma=4\pi\int\limits_{V}\rho_e\,\mathrm{d}\tau, \tag{5.5}$$

[1] 原文把 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别称作电感应矢量 (вектор электрической индукции) 和磁感应矢量 (вектор магнитной индукции), 译文按照国家标准进行了调整. ——译注

方程组的推论——总电荷守恒条件——也可以写为积分的形式:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho_e\,\mathrm{d}\tau = \int_\Sigma j_n\,\mathrm{d}\sigma,$$

式中 $\mathscr{L}$ 是所选惯性坐标系中的静止封闭围线, Σ_1 是张于此围线的曲面; Σ 是所选惯性坐标系中的静止封闭曲面, 它包围的几何体是 V; 矢量在曲面 Σ_1 和 Σ 的法线方向的分量用下标 n 表示, 并且曲面 Σ_1 的法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向这样选取, 使得在沿围线 $\mathscr{L}$ 积分时的环绕方向与 $\boldsymbol{n}$ 的方向组成右手系.

考虑电流、极化和磁化时的麦克斯韦方程的张量形式

在 §2 中, 我们按照矩阵 (2.1) 和 (2.3) 引入了电磁场张量的协变分量 F_{ij} 和逆变分量 F^{ij}, 并把真空中的麦克斯韦方程写为张量形式. 同样, 物质介质的麦克斯韦方程也可以在闵可夫斯基空间中写为张量形式. 为此, 必须按照 (4.2) 引入四维电流矢量 $\boldsymbol{J}=J^i\boldsymbol{e}_i$, 并利用"笛卡儿坐标系"($\mathrm{d}s^2=-(\mathrm{d}x^1)^2-(\mathrm{d}x^2)^2-(\mathrm{d}x^3)^2+c^2\,\mathrm{d}t^2$) 中的矩阵

$$(F_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & cE_1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & cE_2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & cE_3 \\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

和

$$(H^{ij})=\begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -D^1/c \\ -H_3 & 0 & H_1 & -D^2/c \\ H_2 & -H_1 & 0 & -D^3/c \\ D^1/c & D^2/c & D^3/c & 0 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

引入两个反对称张量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的分量, 用来代替前面的 F_{ij} 和 F^{ij}. 显然, 在没有极化和磁化时, 即在 $\boldsymbol{P}=0$ 和 $\boldsymbol{M}=0$ 时, 矩阵 (2.1) 中的 F_{ij} 与矩阵 (5.6) 中的 F_{ij} 相同, 矩阵 (2.3) 中的 F^{ij} 与矩阵 (5.7) 中的 H^{ij} 相同.

还可以用等式

$$\mathscr{P}_{ij}=\frac{1}{4\pi}(F_{ij}-H_{ij})$$

引入分量为 $\mathscr{P}_{ij}$ 的极化强度张量 $\boldsymbol{\mathscr{P}}$, 用以取代张量 $\boldsymbol{H}$.

容易直接验证, 方程 (5.1) 和 (5.2) 在四维闵可夫斯基空间中的任何曲线坐标系中具有张量形式如下:

$$\nabla_i F_{jk}+\nabla_j F_{ki}+\nabla_k F_{ij}=0, \tag{5.8}$$

$$\nabla_k H^{ik}=\frac{4\pi}{c}J^i. \tag{5.9}$$

从这些方程的张量形式可以直接看出, 它们在洛伦兹变换下不变.

电磁场的基本矢量在惯性参考系变换为另一个惯性参考系时的变换 在从一个“静止的”惯性坐标系 K 变换为另一个“运动的”惯性坐标系 K' 时, 矢量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 按照 (3.19) 类型的公式进行变换, 矢量 $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 按照 (3.20) 类型的公式进行变换, 而四维电流密度矢量的分量 J^i 按照矢量分量的通常的变换公式进行变换. 例如, 如果惯性系 K' 相对于 K 以速度 v 沿 x^1 轴平动, 则根据公式 (3.14) 得出

$$J'^1 = j'^1 = \frac{j^1 - v\rho_e}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad J'^2 = j^2, \quad J'^3 = j^3, \quad J'^4 = \rho'_e = \frac{\rho_e - \dfrac{v}{c^2}j^1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{5.10}$$

三维电流密度矢量的分量和大小以及电荷密度同惯性坐标系的选取有关.

矢量势 同真空中的电磁场一样, 对介质中的电磁场也可以引入矢量势 $\boldsymbol{A} = A_i e^i$, 只要令

$$F_{ij} = \nabla_j A_i - \nabla_i A_j.$$

由此可知, 方程 (5.8) 恒成立. 在没有极化和磁化, 并且 $J^i \neq 0$, $\nabla^i A_i \neq 0$ 的时候, 方程 (5.9) 归结为波动方程, 它在笛卡儿坐标系中具有形式

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial (x^3)^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}.$$

闵可夫斯基张量 在有极化和磁化时, 可以取定义为

$$S_{i\cdot}^{\cdot k} = -\frac{1}{4\pi}\left(F_{mi}H^{mk} - \frac{1}{4}\delta_i^k F_{mn}H^{mn}\right) \tag{5.11}$$

的闵可夫斯基张量作为电磁场的能量动量张量. 这个公式是真空中的电磁场的能量动量张量公式 (2.17) 的直接推广. 容易验算, 闵可夫斯基张量一般不对称:

$$S^{ij} \neq S^{ji}.$$

四维有质动力矢量 此时, 动量方程和能量方程的形式为

$$\nabla_k S^{ik} = -F^i, \tag{5.12}$$

式中 F^i 是四维有质动力矢量[1], 它是体积力.

下面列出的三维有质动力公式和场与介质之间的能量交换公式都是在有极化和磁化时利用公式 (5.12) 得出的一些一般公式. 在 F^1, F^2, F^3 的表达式中含有洛伦兹力的分量. 当介质中没有极化和磁化但有电流的时候, 四维有质动力 $\boldsymbol{F}$ 的三维部分

[1] 在具有四维度规 $ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2 dt^2$ 的笛卡儿坐标系中, 四维力的空间分量满足 $F^\alpha_{\text{four}} = -F_{\alpha\,\text{four}}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, 而通常的三维力的分量满足 $F^\alpha_{\text{four}} = F^\alpha_{\text{three}} = F_{\alpha\,\text{three}}$. 在从伪欧几里得空间中的任何四维矢量变换到三维欧几里得空间中的相应三维矢量时, 这些关系式也成立.

给出普通的洛伦兹力, 而第四个分量等于 $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}$, 这个量在固有坐标系中等于单位体积的介质在单位时间内释放出的焦耳热.

在引入电磁场的能量动量张量 $\boldsymbol{S}=S^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 之后, 公式 (5.12) 定义了一个四维矢量 $\boldsymbol{F}=F^i\boldsymbol{e}_i$ ——物体所受外体积力. 电磁场作用于物体的四维体积力, 即体积有质动力, 是由电磁场特征量的分布决定的, 并且引入该力的这种方法适用于物质介质 (物体) 进行任意运动的一般情况 [1].

为了建立分量 F^i 与电磁场的通常的三维矢量特征量之间的关系, 必须使用一个惯性坐标系并写出麦克斯韦方程 (5.1) 和 (5.2). 为了达到这个目的, 可以选取不同的坐标系作为惯性系. 例如, 可以选取观察者用来确定介质运动的固定参考系, 也可以使用取自物质介质每一点和每一时刻的一系列固有惯性坐标系.

在固有坐标系中用上述方法定义的电磁场三维矢量特征量的分量, 也可以在一般不是惯性系的随体坐标系中进行计算. 作为特例, 如果随体坐标系是惯性系, 则随体坐标系和固有坐标系在每一点都是相同的, 所以此时电磁场与物质介质之间的相互作用可以视为随体坐标系中的场与静止物体之间的相互作用.

在每个坐标系中, 3 个分量 F^α $(\alpha=1,\,2,\,3)$ 和第四个分量 F^4 在形如

$$y^\alpha=y^\alpha(x^1,\ x^2,\ x^3),\quad \alpha=1,\ 2,\ 3;\quad y^4=x^4$$

的空间坐标变换下相应组成三维矢量的分量和三维标量.

如前所述, 这些矢量和标量与原始坐标系 x^i 有关. 在狭义相对论的范畴内, 上述三维矢量和三维标量甚至对于以常速作相对运动的惯性系来说也不是不变的 [2].

然而, 当相对运动速度与光速相比很小时, 这些特征量在那些彼此作相对运动的惯性参考系中的差别也很小, 这些差别对于非相对论力学范畴内的实际应用是可以忽略的.

在一般情况下, 作为表征物质介质内部物理过程的自然而方便的物理量, 可以在固有坐标系中使用三维的体积有质动力矢量和三维标量 $F_4=c^2F^4$.

用来封闭麦克斯韦方程 (5.1), (5.2) 的附加关系式

麦克斯韦方程组 (5.1), (5.2) 不是封闭的, 其中包括 7 个独立方程和 16 个未知量: $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{j}$, ρ_e. 为了求解电磁场的上述特征量, 仅有这些方程是不够的. 要想使方程组成为封闭的, 至少还必须给出把矢量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}^*=\boldsymbol{j}-\rho_e\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 联系起来 3 个矢量关系式.

欧姆定律和物体的极化定律和磁化定律就是这样的关系式. 这些附加关系式不是普适的, 从本质上讲, 它们对不同的物体和过程是不同的. 在许多情况下可以使用

[1] 公式 (5.12) 和 (5.31) 是库仑定律、洛伦兹定律、焦耳定律这些电动力学基本实验定律向被磁化和极化的运动物体的一般情况的推广. 以后将得出, 这种推广与能量动量张量和电磁场内禀动量矩的选取条件有关, 而这些条件可能各不相同.

[2] 这是狭义相对论中任何三维矢量的一般性质. 例如, 电流密度矢量就满足这一性质 (见 (3.14) 和 (5.10)).

以下形式的欧姆定律、极化定律和磁化定律:

$$\boldsymbol{j}^* = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right), \tag{5.13}$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \mu\tilde{\boldsymbol{H}}, \tag{5.14}$$

$$\tilde{\boldsymbol{D}} = \varepsilon\tilde{\boldsymbol{E}}, \tag{5.15}$$

式中 σ 同前面一样表示电导率, μ 是磁导率, ε 是介电常数. 在许多实际情况下可以认为 σ, μ 和 ε 是常数. 在真空中 $\sigma = 0$, $\mu = \varepsilon = 1$. 可以把 σ, μ 和 ε 看作像黏度和热导率一样的表征一种介质的物理量, 它们可能与温度有关 (物体的磁化和极化在低温下表现得更加显著), 也可能是张量, 例如各向异性物体的情况.

张量形式的磁化定律和极化定律 在固有坐标系中写出的三维矢量关系式 (5.14) 和 (5.15) 等价于一个相对于坐标系的选择不变的四维张量关系式, 其分量形式的写法为

$$F_{ij} = C_{ijkl}H^{kl}, \quad C_{jikl} = -C_{ijkl} = C_{ijlk},$$

其中张量的分量 C_{ijkl} 依赖于度规张量的分量 g_{ij} 和介质点的四维速度矢量的分量 $u^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$, 一般还依赖于表征介质微元物理状态的其他一些物理参量, 例如温度、应变张量的分量等.

在各向同性的情况下, (5.14) 和 (5.15) 中的系数 μ 和 ε 是标量, 这时可以验算, 张量的分量 C_{ijkl} 满足以下公式:

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2}\left[\mu(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) + \frac{1}{\varepsilon}(g_{ik}u_ju_l - g_{jk}u_iu_l + g_{jl}u_iu_k - g_{il}u_ju_k)\right],$$

式中 $\gamma_{ij} = g_{ij} - u_iu_j$, 而 u_i 是四维速度矢量的协变分量. 对静止物体在与其固连的笛卡儿惯性坐标系中进行上述验算较为方便, 这时

$$u^\alpha = u_\alpha = 0, \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3; \quad u^4 = \frac{1}{c}, \quad u_4 = c.$$

我们指出, 磁化定律 (5.14) 对非常强的磁场是不成立的, 这时磁化强度矢量 $\boldsymbol{M} = (\mu - 1)\boldsymbol{H}/4\pi$ 在完全饱和时达到最大值, 然而矢量 $\boldsymbol{H}$ 的值可以因为外部电流而增加. 还存在一些介质, 其中的偶极子电荷 (物体极化所致) 在没有外部电场 $\boldsymbol{E}$ 时仍保持不变. 对这样的物体不成立极化定律 (5.15). 只要电磁场不是非常强, 就可以使用上述极化定律 (5.14) 和磁化定律 (5.15) 来解决许多介质的一大类问题.

有质动力 现在我们来给出体积有质动力的表达式, 这个力就是电磁场对被极化和磁化的物体的作用力. 有质动力的这个表达式只与麦克斯韦方程 (5.1), (5.2) 有关, 它对任何欧姆定律、极化定律和磁化定律都成立.

单位体积上的三维有质动力在考虑极化和磁化时不同于洛仑兹力. 如果取闵可

夫斯基张量作为能量动量张量, 则有质动力在任何惯性曲线坐标系中具有以下形式:

$$\boldsymbol{F}=\rho_e\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})+\frac{1}{8\pi}(D_\alpha\nabla E^\alpha-E^\alpha\nabla D_\alpha+B_\alpha\nabla H^\alpha-H^\alpha\nabla B_\alpha), \qquad (5.16)$$

式中 $\nabla=\boldsymbol{e}^k\nabla_k$ 是三维梯度算子, 在笛卡儿正交坐标系中

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

容易看出, 在有质动力公式 (5.16) 的最后一项中, 电通量密度矢量 $\boldsymbol{D}$ 和磁通量密度矢量 $\boldsymbol{B}$ 可以分别替换为矢量 $4\pi\boldsymbol{P}$ 和 $4\pi\boldsymbol{M}$. 按照 (5.16), 力 $\boldsymbol{F}$ 不同于洛仑兹力

$$\boldsymbol{F}_{\text{Lorentz}}=\rho_e\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}).$$

不难看出, 若成立定律 (5.14) 和 (5.15), 并且标量 ε 和 μ 对介质的不同微元是相同的 (与坐标无关), 则 (5.16) 的后一对括号中的最后一项等于零. 一般而言, 这一项不为零的情况是: 或者介质是各向异性的, 此时 ε 和 μ 是张量, 或者介质虽然是各向同性的, 但是定律 (5.14) 和 (5.15) 并不成立, 或者 ε 和 μ 是依赖于坐标的参量 (例如温度和密度) 的函数.

在研究物质介质的三维动量方程时, 在每一个惯性坐标系中由公式 (5.16) 定义的三维有质动力对介质而言是外体积力. 作为四维矢量的力的概念在坐标变换下具有不变性, 而三维有质动力矢量以及狭义相对论中的其他任何三维矢量在作相对运动的不同惯性坐标系中有一定区别 (不具有不变性), 这就是相对论效应. 在实际应用中, 正如在 §4 中关于洛仑兹力的讨论那样, 当惯性坐标系的相对平动速度与光速相比很小时, 三维有质动力矢量的分量在坐标变换下因为不具有不变性而产生的区别与它们本身的值相比是很小的[1].

如前所述, 在建立相对于非惯性坐标系的运动方程时和在研究介质微元相对于惯性坐标系的加速运动时, 都可以在局部引入固有惯性坐标系. 在这些坐标系中, 按照基本的物理假设, 电磁场与介质之间因为作用与反作用定律而产生相互作用力, 其四维和三维情况可以分别用公式 (5.12) 和 (5.16) 来定义. 用这种方法即可将电磁场与静止物体之间的相互作用定律推广到相对于惯性观察者发生任意运动的物质介质的情况.

对于基本的三维动量方程, 还应注意以下说明. 按照电磁场能量动量张量的定义, 电磁场所具有的动量和能量可以通过表征场的物理量表示出来, 例如通过极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$ 和磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 表示.

在牛顿力学中, 质点或进行平动的有限物体的动量和动能仅仅通过质量和速度即可表示出来. 在一般情况下, 若物体 (物质介质) 被极化和磁化, 则进行平动的物体, 其动量和动能按照相对论的观点不仅与质量和速度有关, 而且与极化强度矢量

[1] 在从一个惯性坐标系变换到另一个"运动的"惯性坐标系时, 矢量 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的变换公式类似于矢量 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的变换公式.

$\boldsymbol{P}$ 和磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 这样一些“内部参量”有关.

矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 影响物体微元的动量是一种相对论效应. 在牛顿力学的范畴内, 有时也可以考虑这种效应, 这时要把介质的能量动量张量的相应部分列入电磁场的能量动量张量之中. 换言之, 就是利用介质的给定模型来重新定义电磁场的能量动量张量. 因此, 可以对电磁场引入其他一些张量来代替闵可夫斯基张量, 从而得出形式上有所变化的有质动力公式, 其中将含有一些附加项. 如果对同样一些运动方程使用电磁场的闵可夫斯基张量, 则被极化和磁化的物质介质将具有更加复杂的动力学性质, 附加项就是这样出现的.

上述思考能够说明, 为了建立极化和磁化介质模型的理论, 在本质上需要使用相对论力学.

从电磁场进入物体的能量流

除了力的相互作用, 电磁场与物质介质之间还有能量交换. 笛卡儿惯性坐标系中的方程 (5.12) 和闵可夫斯基能量动量张量公式 (5.11) 在 $i=4$ 时给出

$$F^4c^2 = F_4 = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} + E_\beta\frac{\partial P^\beta}{\partial t} + H_\beta\frac{\partial M^\beta}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E_\beta P^\beta + H_\beta M^\beta). \tag{5.17}$$

其实, 根据 (5.6), (5.7) 和 (5.11), 我们有

$$S_{4\cdot}^{\cdot 4} = -\frac{1}{4\pi}\left(F_{m4}H^{m4} - \frac{1}{4}F_{mn}H^{mn}\right) = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}}{8\pi}. \tag{5.18}$$

此外,

$$\boldsymbol{S} = S_{4\cdot}^{\cdot\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}).$$

依照定义,

$$F_4 = -\left(\frac{\partial S_{4\cdot}^{\cdot 4}}{\partial t} + \frac{\partial S_{4\cdot}^{\cdot 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial S_{4\cdot}^{\cdot 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial S_{4\cdot}^{\cdot 3}}{\partial x^3}\right) = -\frac{\partial S_{4\cdot}^{\cdot 4}}{\partial t} - \operatorname{div}\boldsymbol{S}. \tag{5.19}$$

在所研究的有磁化和极化的情况下, 根据麦克斯韦方程 (5.1) 和 (5.2), 乌莫夫—坡印亭方程的形式有所变化:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S} + \frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right) + \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} = 0. \tag{5.20}$$

把 (5.18) 中的 $S_{4\cdot}^{\cdot 4}$ 和 (5.20) 中的 $\operatorname{div}\boldsymbol{S}$ 代入 (5.19), 经过简单的计算就可得到 (5.17). 直接可以看出 (见 (5.3)), 如果把公式 (5.17) 中的矢量 $\boldsymbol{H}$ 的分量 H_β 替换为矢量 $\boldsymbol{B}$ 的分量 B_β, 则 F_4 的值不会改变.

电流、极化和磁化导致能量从电磁场流入物质介质, 在时间 $\mathrm{d}t$ 内流入物质体微元 $\mathrm{d}\tau$ 的能量为

$$F_4\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t. \tag{5.21}$$

对于连续的运动, 这个量将作为宏观外部能量流的一部分包含在第五章的能量方程 (2.17) 中. 由物质介质与电磁场的相互作用导致的这部分能量流记为 $\mathrm{d}Q_{\mathrm{el}} = \mathrm{d}q_{\mathrm{el}}\,\mathrm{d}m$,

式中 $\mathrm{d}q_{\mathrm{el}}$ 是进入单位质量介质的这种能量流. 按照 (5.17) 和 (5.21), 在惯性坐标系中可以写出

$$\begin{aligned} F_4\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t &= \mathrm{d}Q_{\mathrm{el}} = \mathrm{d}q_{\mathrm{el}}\,\mathrm{d}m \\ &= \left[\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}t + E_\alpha \mathrm{d}P^\alpha + H_\alpha \mathrm{d}M^\alpha - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(E_\alpha P^\alpha + H_\alpha M^\alpha)\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \left[\frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}t + E_\alpha \mathrm{d}\pi^\alpha + H_\alpha \mathrm{d}m^\alpha - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(E_\alpha \pi^\alpha + H_\alpha m^\alpha)\right. \\ &\qquad \left. -\frac{1}{2}\,(E_\alpha \pi^\alpha + H_\alpha m^\alpha)\nabla_\beta v^\beta \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}m, \end{aligned} \tag{5.22}$$

式中 $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\tau$ 是微元的质量,

$$\pi^\alpha = \frac{P^\alpha}{\rho} = \frac{P^\alpha \mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}m}, \quad m^\alpha = \frac{M^\alpha}{\rho} = \frac{M^\alpha \mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}m}$$

分别是质量极化强度矢量和质量磁化强度矢量的分量. 质量是表征介质微元的一个基本物理量. 矢量的分量 π^α 和 m^α 经过时间 $\mathrm{d}t$ 的增量 $\mathrm{d}\pi^\alpha$ 和 $\mathrm{d}m^\alpha$ 取自惯性坐标系, 例如, 对于给定的点这也可以是固有坐标系. 在公式 (5.22) 中已经把微元密度对时间的物质导数 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t$ 按照第三章的连续性方程 (1.3) 替换为 $-\rho\nabla_\beta v^\beta = -\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$, 式中 v^β 是介质物质点速度矢量的分量.

电磁场的能量流公式 (5.22) 与乌莫夫—坡印亭方程 (5.20) 有密切的关系. 根据 (5.18) 和 (5.19), 公式 (5.22) 还可以改写为

$$\mathrm{d}q_{\mathrm{el}} = -\frac{1}{\rho}\left(\mathrm{d}\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{8\pi} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{S}\,\mathrm{d}t\right).$$

对于静止介质, 我们有

$$\mathrm{d}q_{\mathrm{el}} = \mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^* = \mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^{(e)} + \mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^{**}.$$

对运动介质而言, 这个公式在固有坐标系中才成立. 电磁场的有质动力相对于介质是外力, 在任意惯性坐标系中计算出来的 $\mathrm{d}q_{\mathrm{el}}$ 与 $\mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^*$ 相差的量就是有质动力的元功. 在热流方程中没有外力的功, 所以热流方程应包含 $\mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^*$.

根据 (5.22), 第五章的热流方程 (2.19) 在物质介质被极化和磁化时的形式为:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= \left[\frac{1}{\rho}\,p^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}(E_\gamma \pi^\gamma + H_\gamma m^\gamma)\right]\nabla_\beta v_\alpha \mathrm{d}t \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}t + E_\alpha \mathrm{d}\pi^\alpha + H_\alpha \mathrm{d}m^\alpha - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(E_\alpha \pi^\alpha + H_\alpha m^\alpha) + \mathrm{d}q_1^*. \end{aligned} \tag{5.23}$$

这里所有电磁场本质的矢量及其增量都取自固有坐标系, 而进入介质微元的总的附加能量流 $\mathrm{d}q_1^* = \mathrm{d}q_1^{(e)} + \mathrm{d}q_1^{**}$ 补充了宏观力的功和来自电磁场的能量流, 这部分能量流也是对单位质量介质而言的. 例如, 量 $\mathrm{d}q_1^{(e)}$ 可以是因为热传导而出现的热流, $\mathrm{d}q_1^{**}$ 在一些具有复杂性质的介质模型中可以是由于所研究的介质微元与其他一些微元发生相互作用而导致的.

在理论上建立一个物质介质模型关系到如何给出方程 (5.23) 中的质量内能 U, 所以可以把出现于 (5.23) 右侧的全微分 $\mathrm{d}(E_\alpha\pi^\alpha + H_\alpha m^\alpha)/2$ 移至左侧, 并按照等式

$$U_1 = U + \frac{1}{2}\left(E_\alpha\pi^\alpha + H_\alpha m^\alpha\right)$$

重新定义介质的内能. 从函数 U 转换为 U_1 类似于在能量方程或热流方程中从内能转换为自由能或吉布斯热力学势等参量 (见第五章 §6). 省略函数 U_1 的下标 "1", 可以使用热流方程 (5.23) 的以下形式:

$$\mathrm{d}U = \left[\frac{1}{\rho}p^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(E_\gamma\pi^\gamma + H_\gamma m^\gamma)\right]\nabla_\beta v_\alpha \mathrm{d}t + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}t + E_\alpha \mathrm{d}\pi^\alpha + H_\alpha \mathrm{d}m^\alpha + \mathrm{d}q_1^*. \tag{5.24}$$

若介质静止, 则 $v^\alpha = 0$, 这时方程 (5.24) 的形式得到简化:

$$\mathrm{d}(\rho U) = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}t + E_\alpha \mathrm{d}P^\alpha + H_\alpha \mathrm{d}M^\alpha + \rho \mathrm{d}q_1^*. \tag{5.25}$$

热流方程的这种形式经常出现于物理学的静力学问题中. 至为重要的是, 在考虑介质的运动时, 我们用方程 (5.24) 来代替方程 (5.25), 并且方程 (5.24) 在能够写出麦克斯韦方程的运动的固有坐标系中才成立.

在所研究的物质点, 公式 (5.22) 中各项的物理意义在使用固有坐标系时是特别明显的. 在固有坐标系中,

$$\frac{1}{\rho}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^{(\mathrm{e})}, \tag{5.26}$$

式中 $\mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^{(\mathrm{e})}$ 是焦耳热; 如果极化和磁化过程可逆, 则

$$\frac{1}{\rho}(\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{M}) = \mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^{**}. \tag{5.27}$$

我们强调, 把 $\mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^*$ 这样分为 $\mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^{(\mathrm{e})}$ 和 $\mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^{**}$ 的做法对静止介质是成立的, 但如果介质相对于参考系运动, 则公式 (5.26) 和 (5.27) 仅在每一点的固有参考系中才成立[1].

当磁化定律 (5.14) 和极化定律 (5.15) 成立时, 磁化和极化过程是可逆的, 电磁场因物体的磁化和极化而消耗的宏观能量不等于零:

$$\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{M} \neq 0.$$

固有坐标系中的量 $\mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^{(\mathrm{e})}$, $\mathrm{d}q_{\mathrm{el}}^{**}$ 和矢量 $\tilde{\boldsymbol{E}}$, $\tilde{\boldsymbol{H}}$, $\tilde{\boldsymbol{P}}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的分量及其增量可以通过随体坐标系中的相应分量和增量表示出来, 这时要考虑随体坐标系相对于给定的惯性参考系的运动[2].

[1] 参见 246 页.

[2] 相应理论在以下论文中得到发展: Седов Л.И. О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций. ПММ, 1965, 29(1): 4—17 (Sedov L.I. On the ponderomotive forces of interaction of an electromagnetic field and an accelerating material continuum, taking into account finite deformations. J. Appl. Math. Mech., 1965, 29(1): 2—17).

有质动力和依赖于电磁场特征量的力 在前面给出的理论中, 无论是物质介质受到的外力——有质动力, 还是从电磁场进入介质的外部能量流, 都与物质连续介质具体模型的性质无关. 在一般情况下, 内应力的状态方程和介质微元的内能不仅依赖于其他一些量, 还依赖于矢量 π 和 m. 动量方程中的 $\nabla_\beta p^{\alpha\beta}$ 这一项和热流方程中的 $p^{\alpha\beta}\nabla_\beta v_\alpha/\rho$ 这一项不仅依赖于表征介质微元的运动和状态的宏观的力学量和热力学量, 而且还依赖于矢量 π 和 m 的分量. 但是在所给情况下, 这些项是因为物质介质的内部相互作用而产生的, 所以矢量 π 和 m 是介质的状态参量, 它们也出现在尚不封闭的麦克斯韦方程组之中.

观察者坐标系 · 固有坐标系 · 随体坐标系 当介质任意运动时, 在每一点和每一时刻都可以确定固有坐标系. 显然, 四维时空中的固有坐标系集合是坐标系的一个非完整集合, 换言之, 不存在一个这样的坐标变换, 它能把观察者坐标系立刻变换到所有固有坐标系. 另一方面, 却存在一个这样的四维坐标变换 (这就是介质的运动规律), 它能把观察者坐标系变换为随体坐标系, 不过随体坐标系不是惯性系. 因此, 在建立物理定律时使用一个运动的随体坐标系是方便的. 在随体坐标系中, 介质所有点的速度都等于零, 而在每一个固有坐标系中, 只有所研究的点的速度在给定时刻才等于零.

因为究竟选取什么样的空间坐标系作为随体坐标系和固有坐标系具有任意性, 所以, 不失一般性, 在 (欧几里得空间和伪欧几里得空间的) 一般理论中可以认为, 在任何给定的固定时刻 t' 和介质的每一点, 随体坐标系和固有坐标系的坐标线和基矢量 $\hat{e}_\alpha$ 和 $\tilde{e}_\alpha$ 都是相同的, 即在固定时刻 t' (在观察者的惯性坐标系中) 成立 $\hat{e}_\alpha = \tilde{e}_\alpha$.

我们指出, 用任意方式引入的"理想介质"的各个物质点可以通过随体坐标系的坐标来区分, 而作为随体坐标的一个实例, 可以在观察者的一个惯性系中取这些物质点在某一个具有全局意义的固定时刻 t' 的坐标值[1]. 从观察者的观点来看, 介质

[1] 这里所用的方法在相对论的范畴内也是适用的, 因为对于具有非各向同性世界线的任何参考系 (例如观察者坐标系或随体坐标系) 来说, 一般形式的度规

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}y^i\,\mathrm{d}y^j$$

总是可以被全局地变换为以下形式:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 + 2\hat{g}_{\alpha 4}\,\mathrm{d}\xi^\alpha \mathrm{d}t + \hat{g}_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}\xi^\alpha \mathrm{d}\xi^\beta,$$

式中 c 为光速, 而相应的坐标变换为

$$y^4 = f(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t), \quad y^\alpha = g^\alpha(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3), \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3,$$

并且世界线集合在这个变换下保持不变, 参考系 (见 12, 13 页) 因而也保持不变. 我们通过这样的变换得到的结果是, 在每一个参考系中经过求解计算出的变量 t 在全局的作用就是狭义相对论的惯性参考系中的时间变量 t. 在不同的参考系中, 就像在狭义相对论中那样, 变量 t 在同一个点是不同的. 参见: Седов Л. И. О глобальном времени в общей теории относительности. ДАН СССР, 1983, 272(4): 44—48. (Sedov L. I. Global time in the general theory of relativity. Sov. Phys. Dokl., 1983, 28(9): 727—729).

的运动规律在三维形式下总可以表示为

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t),\quad \alpha = 1,\ 2,\ 3,$$

式中 ξ^β 为拉格朗日坐标, 并且在 $t = t'$ 时可以取

$$x^\alpha = x_0^\alpha = \xi^\alpha.$$

显然, 对于这样定义的拉格朗日坐标 ξ^β 和用任何方式确定的空间坐标系 x^α, 我们在 $t = t'$ 时有

$$\hat{e}_\alpha = \tilde{e}_\alpha.$$

这样的坐标系一经选定, 我们就可以得出, 坐标线在时刻 $t' + \mathrm{d}t$ 将发生分离. 在基矢量 $\tilde{e}_\alpha$ 是常矢量的观察者的惯性参考系中, 介质不同点的固有坐标系将像刚体那样以不同的平动速度 $\boldsymbol{v}$ 移动, 这个速度等于所研究的介质点的速度.

随体坐标系在 $\mathrm{d}t$ 时间内的运动使得在介质每一点由基矢量 $\hat{e}_\alpha$ 组成的三面体在一般情况下会发生变形和旋转, 并以速度 $\boldsymbol{v}$ 平动. 在时刻 $t' + \mathrm{d}t$, 对于介质或空间的每一点, 一般可得 $\hat{e}_\alpha \neq \tilde{e}_\alpha$.

矢量和张量对时间的各种导数 若在固有坐标系中确定了表征电磁场和介质的一些张量和矢量以及它们对坐标和时间的导数或增量, 则在随体坐标系中也可以对它们进行计算. 我们总可以认为, 在给定时刻, 随体坐标系和固有坐标系的空间三面体在介质每一点都是相同的, 所有三维的张量和矢量的分量因而也是相同的. 因为固有坐标系和随体坐标系相对于观察者的参考系以不同方式运动, 所以张量的分量对时间的导数和增量在固有坐标系和随体坐标系中是不同的, 但是它们之间的关系由一些简单的公式给出.

例如, 对于任何矢量 $\boldsymbol{A} = \tilde{A}^\alpha \tilde{e}_\alpha = \hat{A}^\alpha \hat{e}_\alpha = \tilde{A}_\alpha \tilde{e}^\alpha = \hat{A}_\alpha \hat{e}^\alpha$ 都成立公式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tilde{A}^\alpha}{\mathrm{d}t}\tilde{e}_\alpha = \frac{\mathrm{d}\hat{A}^\alpha}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\alpha + \hat{A}^\beta \frac{\mathrm{d}\hat{e}_\beta}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\hat{A}^\alpha}{\mathrm{d}t} + \hat{A}^\beta \hat{\nabla}_\beta \hat{v}^\alpha\right)\hat{e}_\alpha,$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tilde{A}_\alpha}{\mathrm{d}t}\tilde{e}^\alpha = \left(\frac{\mathrm{d}\hat{A}_\alpha}{\mathrm{d}t} - \hat{A}_\beta \hat{\nabla}_\alpha \hat{v}^\beta\right)\hat{e}^\alpha,$$

这是因为

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\beta}{\mathrm{d}t} = \hat{\nabla}_\beta \hat{v}^\alpha \hat{e}_\alpha,\quad \frac{\mathrm{d}\hat{e}^\beta}{\mathrm{d}t} = -\hat{\nabla}_\alpha \hat{v}^\beta \hat{e}^\alpha.$$

如果在所研究的时刻 $\tilde{e}_\alpha = \hat{e}_\alpha$, $\tilde{e}^\alpha = \hat{e}^\alpha$, 则成立等式

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{A}^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{A}^\alpha}{\mathrm{d}t} + \hat{A}^\beta \hat{\nabla}_\beta \hat{v}^\alpha,\quad \frac{\mathrm{d}\tilde{A}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{A}_\alpha}{\mathrm{d}t} - \hat{A}_\beta \hat{\nabla}_\alpha \hat{v}^\beta.$$

在刚体运动学中有一个著名的欧拉公式, 它给出在刚性静止坐标系和刚性旋转坐标系中矢量的分量对时间的导数之间的关系. 曲线坐标系中的上述公式就是这个欧拉

公式向可变形运动坐标系情况的推广. 对于具有任意角标结构的任意阶张量的分量对时间的任意阶导数, 用类似的方法容易写出相应公式来表达固有坐标系和随体坐标系中的这些导数之间的关系. 公式 (5.22) 及其推论也可以在全局性的随体坐标系中重新写出.

四维形式的动量矩方程 在磁场中对小磁针进行的实验表明, 物体和场之间的相互作用并非只归结为有质动力. 实验指出, 这种相互作用还会因为按照体积分布的力偶矩而产生. 我们来引入并分析电磁场的动量矩微分方程. 可以考虑通常的三维动量矩方程, 其中只包括通常的三维力矩. 然而在狭义相对论的范畴内, 也就是在麦克斯韦方程所描述的电磁场理论中, 力是四维矢量, 所以需要研究四维形式的动量矩方程, 而这就关系到物质介质和场的力矩和动量矩概念的推广.

从四维能量动量张量在笛卡儿惯性坐标系中的分量 S^{ij} 的表达式可以得出以下等式:

$$x^j \nabla_k S^{ik} - x^i \nabla_k S^{jk} = -(x^j F^i - x^i F^j), \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{5.28}$$

式中 x^i 是物体所占区域内的点的坐标. 反对称张量 $x^j F^i - x^i F^j$ 具有 6 个独立的分量, 它可以视为通常的三维反对称张量的概念向四维情况的推广. 与这里的三维反对称张量相对应的是一个轴矢量——体积有质动力对坐标原点的力矩, 并且它对电磁场取负号, 对介质取正号.

必须强调, 狭义相对论中的矩是具有 6 个独立分量的二阶反对称张量, 它在一般情况下可以归结为笛卡儿坐标系中的 2 个三维矢量 (1 个轴矢量和 1 个极矢量).

关系式 (5.28) 可以改写为

$$\nabla_k (S^{ik} x^j - S^{jk} x^i) - (S^{ij} - S^{ji}) = -(x^j F^i - x^i F^j). \tag{5.29}$$

三阶张量的分量 $S^{ik}x^j - S^{jk}x^i$ 可以视为电磁场的广义体积能量动量矩张量的部分分量. 关系式 (5.29) 是有质动力的定义的简单推论 (类似于动能定理), 因而恒成立.

热力学中的能量方程一般是独立于动能定理的一个方程. 类似地, 为了提出动量矩方程, 可以引入电磁场的一些新特征量: 分量为 $Q^{ijk} = -Q^{jik}$ 的体积内禀动量矩张量和分量为 $\mathscr{H}^{ij} = h^{ij} + x^j F^i - x^i F^j$ 的体积有质动力矩张量. 这里的有质动力矩张量对应着电磁场对介质的作用, 它能够通过电磁场的动量矩方程和介质的动量矩方程来定义, 并且这些方程独立于方程 (5.29).

对电磁场而言, 可以取以下方程作为这样的独立的动量矩方程:

$$\nabla_k (S^{ik} x^j - S^{jk} x^i + Q^{ijk}) = -\mathscr{H}^{ij} = -h^{ij} - (x^j F^i - x^i F^j). \tag{5.30}$$

有质动力是物体受到的外体积力, 相应有质动力矩张量的分量 $\mathscr{H}^{ij}$ 不但包括有质动力矩的分量, 而且还包括一个附加的二阶反对称张量的分量 h^{ij}, 该张量是按照物体

体积分布的由外部电磁场引起的有质动力矩张量.

在写出方程 (5.30) 时认为, 从外部作用于电磁场的按照体积分布的力矩仅仅是由物体引起的.

对于物质介质也可以单独写出类似于方程 (5.30) 的动量矩方程. 在物质介质动量矩方程的右侧会出现电磁场对介质的体积有质动力矩张量的分量 $\mathscr{H}^{ij}$, 其符号为正. 与此同时, 在介质动量矩方程的右侧还会出现其他一些力矩, 它们是由介质本身的微元之间的内部相互作用以及其他一些外部对象 (其他物体和不同于电磁场的其他场) 引起的.

从 (5.30) 和恒等式 (5.29) 可得等式

$$h^{ij} = -(S^{ij} - S^{ji} + \nabla_k Q^{ijk}). \tag{5.31}$$

这些关系式可以视为电磁场的内禀动量矩方程 (第三章方程 (3.4) 在四维情况下的类似方程).

电磁场作为一种宏观的物理对象, 其模型的建立要求引入分量 h^{ij}, S^{ij} 和 Q^{ijk}, 而方程 (5.31) 和物质介质的相应方程以及用来建立介质模型的那些基本结果就是用来确定这些分量的有关资料.

如果一种物质介质模型已经固定, 并且附加的有质动力矩张量的分量 h^{ij} 也已经在实验中确定下来 (例如, 可以通过测量电磁场对小磁针的力矩来确定), 则 (5.31) 可以视为分量 S^{ij} 和 Q^{ijk} 之间的关系式. 如果在电磁场的定义中有一个额外条件表明这些量与电磁场的任何重要的新特征量无关, 则关系式 (5.31) 应像 (5.29) 那样恒成立.

依照实验数据, 可以利用各种条件把关系式 (5.31) 变为恒等式. 例如, 作为最简单而且自然的条件, 可以取:

(1) 电磁场能量动量张量是闵可夫斯基张量, 其分量由公式 (5.11) 定义;

(2) 对于电磁场给定区域内的点, 体积内禀动量矩张量的分量 Q^{ijk} 等于零, 或者用更一般的形式将其表述为等式

$$\nabla_k Q^{ijk} = 0. \tag{5.32}$$

此等式恒成立, 或者因动量方程而成立. 这两个基本条件可以列入一种电磁场模型的定义中, 它们与实验相符 (见 (5.36)).

电磁场的有质动力矩张量

根据 (5.11) 和 (5.32), 即条件 (1) 和 (2), 我们从 (5.31) 得出

$$h^{ij} = \frac{1}{4\pi}(F_{m\cdot}^{\cdot i} H^{mj} - F_{m\cdot}^{\cdot j} H^{mi}). \tag{5.33}$$

现在对公式 (5.33) 进行计算. 在笛卡儿惯性坐标系中, 矩阵 (H^{ij}) 由公式 (5.7) 定义, 矩阵 (F_{ij}) 由公式 (5.6) 定义. 因为 $F_{m\cdot}^{\cdot l} = g^{lk} F_{mk}$, $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$, $g^{44} = 1/c^2$,

且当 $i \neq j$ 时 $g^{ij} = 0$, 所以矩阵 $(F_{m\cdot}^{\cdot l})$ 满足公式

$$(F_{m\cdot}^{\cdot l}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^3 & B^2 & E_1/c \\ B^3 & 0 & -B^1 & E_2/c \\ -B^2 & B^1 & 0 & E_3/c \\ cE_1 & cE_2 & cE_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

根据公式 (5.33), 利用矩阵 (5.7) 和 (5.34) 容易写出矩阵 (h^{ij}).

三维空间中的有质动力矩矢量

四维有质动力矩矢量是二阶反对称张量, 其分量 h^{ij} 在笛卡儿坐标系中可以归结为 $\mathscr{M}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3)$ 和 $\mathscr{L}(\mathscr{L}^1, \mathscr{L}^2, \mathscr{L}^3)$ 这 2 个三维矢量, 其分量按照以下方式组成矩阵 (h^{ij}) (见第四章 (3.23)):

$$(h^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathscr{M}_3 & -\mathscr{M}_2 & -\mathscr{L}^1/c \\ -\mathscr{M}_3 & 0 & \mathscr{M}_1 & -\mathscr{L}^2/c \\ \mathscr{M}_2 & -\mathscr{M}_1 & 0 & -\mathscr{L}^3/c \\ \mathscr{L}^1/c & \mathscr{L}^2/c & \mathscr{L}^3/c & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.35}$$

利用 (5.7) 和 (5.34), 经过不复杂的计算求出下面的简单公式[1]:

$$\boldsymbol{\mathscr{M}} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{H}) + \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{E}, \tag{5.36}$$

$$\boldsymbol{\mathscr{L}} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \frac{1}{c}(\boldsymbol{S}^* - \boldsymbol{S}), \tag{5.37}$$

式中 $\boldsymbol{S}$ 是乌莫夫一坡印亭矢量, 矢量 $\boldsymbol{S}^* = (c/4\pi)(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B})$ 则具有类似的本质. 在闵可夫斯基张量的矩阵 (S^{ij}) 中, 矢量 $\boldsymbol{S}/c^2$ 的分量组成第四行, 而矢量 $\boldsymbol{S}^*/c^2$ 的分量组成第四列.

三维矢量 $\boldsymbol{\mathscr{M}}$ 不是别的, 就是通常的体积有质动力矩. 对于实际应用的那些物质介质模型, $\boldsymbol{\mathscr{M}}$ 的公式 (5.36) 与实验测量符合得很好. 公式 (5.36) 是公式 (1.2) 在有极化时的一个自然的推广. 显然, 当磁化定律 (5.14) 和极化定律 (5.15) 成立时, 如果 ε 和 μ 是标量, 则 $\boldsymbol{\mathscr{M}} = 0$, 但在各向异性介质的一般情况下 $\boldsymbol{\mathscr{M}} \neq 0$.

在狭义相对论中, 物质介质的动量矩方程在用分量表示时包含 6 个方程: 矢量 $\boldsymbol{\mathscr{M}}$ 的分量所对应的 3 个动量矩方程和矢量 $\boldsymbol{\mathscr{L}}$ 的分量所对应的 3 个动量矩方程. 介质的前 3 个方程就是"通常的"三维表述, 而后 3 个方程根据可磁化和极化的物质介质模型的定义可能是恒等式, 或者是用来确定介质某些特征量的重要关系式.

我们在惯性坐标系中 (三维空间坐标可以是任意曲线坐标) 建立了公式 (5.36) 和 (5.37). 公式 (5.36) 的实验检验是对静止物体进行的.

---

[1] 这里需要考虑 249 页的脚注.

电磁场的能量动量张量和动量矩张量的不同定义 电磁场和物质介质共同组成的系统具有各种力学和电磁学特征量, 在研究这样的整体对象时可以引入系统整体的能量动量张量和动量矩张量, 它们是电磁场和介质的相应张量之和. 这些张量的分量可以写为

$$S^{ij}+T^{ij}, \quad Q^{ijk}_{\text{field}}+Q^{ijk}_{\text{medium}},$$

式中 T^{ij} 和 Q^{ijk}_{medium} 是介质的相应张量的分量.

介质和场的动量方程、能量方程和动量矩方程可以写为

$$\nabla_j(S^{ij}+T^{ij})=\mathscr{F}^i, \quad \nabla_k(Q^{ijk}_{\text{field}}+Q^{ijk}_{\text{medium}})+S^{ij}+T^{ij}-S^{ji}-T^{ji}=M^{ij},$$
$$i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

式中 $\mathscr{F}^i$ 和 M^{ij} 是从外部作用于介质和场的四维质量力和质量力矩. 在许多情况下可以认为 $\mathscr{F}^i=0$ 和 $M^{ij}=0$. 建立场和具体介质模型的问题关系到如何把上述张量通过给定的或者待求的特征量表示出来.

一般而言, 可以根据条件按照不同方式将系统整体的、具有共同电磁学本质的能量动量张量和动量矩张量分解为单独场和单独介质的相应张量. 在一定的条件下, 只要把介质的这些量固定下来, 就能唯一确定电磁场的相应量, 反过来也成立. 因此, 在处理各种物质介质时, 最好总是用同样一种方法来定义电磁场的动量、能量和动量矩.

然而, 在根据基本条件对所有情况引入电磁场诸多动力学性质的定义时, 可以采用不同的方法. 前面在描述电磁场动力学性质时只用到了一个非对称的闵可夫斯基能量动量张量, 其分量由公式 (5.11) 定义, 并由此建立了有质动力和有质动力矩的公式.

电磁场的亚伯拉罕能量动量张量 为了取代闵可夫斯基张量, 许多作者引入了一个对称的亚伯拉罕张量作为电磁场的能量动量张量, 其分量 A^{ij} 的空间坐标部分在固有坐标系中可由闵可夫斯基张量的相应分量经过对称化运算得出:

$$A^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(S^{\alpha\beta}+S^{\beta\alpha}),$$

而时间坐标部分中的矢量的逆变分量等于乌莫夫–坡印亭矢量的相应分量除以 c^2, 即

$$A^{4\alpha}=A^{\alpha 4}=\frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})^{\alpha},$$

最后还定义

$$A^{44}=S^{44}.$$

除了用作能量动量张量的闵可夫斯基张量和亚伯拉罕张量, 对电磁场还可以引入其他一些张量. 值得注意的是, 只有在被场占据的空间中的一些点有物质介质, 并

且极化强度张量 $\mathscr{P}^{ij} \neq 0$ 时, 闵可夫斯基张量、亚伯拉罕张量和其他一些张量才有区别. 在真空或者导电介质中没有极化和磁化, 所以用不同方法定义的电磁场能量动量张量是相同的.

在固有坐标系中, 利用闵可夫斯基张量的定义可以把上述公式改写为

$$A^{ij} - S^{ij} = \Omega^{ij},$$

并且

$$\Omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h^{\alpha\beta}, \quad \Omega^{\alpha 4} = h^{\alpha 4}, \quad \Omega^{4i} = 0, \tag{5.38}$$

式中

$$\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

而张量的分量 h^{ij} 由公式 (5.35), (5.36) 和 (5.37) 定义.

有质动力在闵可夫斯基近似和亚伯拉罕近似下的区别

在闵可夫斯基近似和亚伯拉罕近似下, 对于四维有质动力的分量, 我们有

$$F^i_{\text{Abr}} = -\nabla_j A^{ij}, \quad F^i_{\text{Min}} = -\nabla_j S^{ij}.$$

从公式 (5.38) 容易得出, 在固有坐标系中

$$F^i_{\text{Abr}} = F^i_{\text{Min}} - \frac{1}{2}\nabla_\beta h^{\alpha\beta} - \frac{\partial h^{\alpha 4}}{\partial t}. \tag{5.39}$$

根据 (5.35), 这些等式的三维矢量形式为

$$\boldsymbol{F}_{\text{Abr}} = \boldsymbol{F}_{\text{Min}} - \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathscr{M} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}. \tag{5.40}$$

对质量能量流可得

$$F^4_{\text{Abr}} = F^4_{\text{Min}}. \tag{5.41}$$

如果对各向同性介质成立磁化定律 (5.14) 和极化定律 (5.15), 则 $\mathscr{M} = 0$, 所以等式 (5.40) 此时的形式为

$$\boldsymbol{F}_{\text{Abr}} = \boldsymbol{F}_{\text{Min}} + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}).$$

如果介质的能量动量张量是固定的, 并且与电磁场能量动量张量的定义无关, 则由 (5.39) 可知, 在不同近似下得到的介质运动方程 (动量方程) 也是不同的, 因为 $F^\alpha_{\text{Abr}} \neq F^\alpha_{\text{Min}}$. 不过, 如果用不同方法定义介质的能量动量张量, 就可以保持介质的运动方程不变.

从 (5.41) 可知, 无论对电磁场使用闵可夫斯基能量动量张量还是亚伯拉罕张量, 进入介质的电磁能量流都是相同的, 这部分能量流出现于热流方程中.

电磁场的有质动力矩和能量动量张量

前面在研究四维动量矩方程时已经指出, 如果作为一个实验事实认为电磁场对被磁化和极化的介质有分布式四维力矩的作用, 并且表征这种力矩的张量的分量 h^{ij} 由公式 (5.35),

(5.36) 和 (5.37) 确定, 则根据得自系统 (介质和场) 动量守恒定律的作用与反作用定律可知, 在使用闵可夫斯基张量作为场的能量动量张量时, 场的体积内禀动量矩的分量满足等式

$$\nabla_k Q^{ijk}_{\text{Min}} = 0.$$

例如, 可以认为 $Q^{ijk}_{\text{Min}} = 0$. 另一方面, 在使用亚伯拉罕张量作为场的能量动量张量时, 因为 $A^{ij} = A^{ji}$, 所以

$$h^{ij} = -\nabla_k Q^{ijk}_{\text{Min}} \neq 0. \tag{5.42}$$

因此, 在使用亚伯拉罕能量动量张量时, 必须给电磁场额外增加一个特征量——张量 $Q^{ijk} = -Q^{jik}$, 它在 $i = 4$ 和 $j = \alpha$ 时是内禀动量矩张量, 在 $i = \alpha$ 和 $j = \beta$ 时是内禀力偶矩张量. 该张量的散度由等式 (5.42) 确定, 如果场对介质的体积有质动力矩满足公式 (5.35), (5.36) 和 (5.37).

在四维空间中, 三维曲面是四维几何体的截面, 而二维曲面是三维几何体的截面. 所以, 如果不使用闵可夫斯基张量来定义场的能量动量张量, 就需要在电磁场中的三维或二维曲面上引入相互作用的面力和面力偶矩. 如果使用闵可夫斯基能量动量张量, 就不需要引入分布于电磁场内部截面上的力偶矩.

在定义电磁场的动力学性质时有可能提出不同的条件, 而上述那些一般的可能性在本质上是等价的. 有鉴于此, 此外还为了分析电磁场的动量矩方程和有质动力矩公式, 作为一个普适而且自然的条件可以选取闵可夫斯基张量当作能量动量张量. 如果采用这个条件, 则在描述电磁场的动力学性质和建立物质介质模型时都需要遵守这个条件.

介质的能量动量张量在电磁场的能量动量张量不一样时的性质

我们还指出, 如果把介质和场的能量动量张量之和 N^{ij} 取为

$$N^{ij} = T^{ij}_{\text{Abr}} + A^{ij} = T^{ij}_{\text{Min}} + S^{ij},$$

则对介质的能量动量张量的逆变分量一般可以得出不等式

$$T^{ij}_{\text{Abr}} \neq T^{ij}_{\text{Min}}, \quad T^{(ij)}_{\text{Abr}} \neq T^{(ij)}_{\text{Min}},$$

式中 $T^{(ij)} = (T^{ij} + T^{ji})/2$. 由此可知, 介质的两种能量动量张量的分量 T^{ij}_{Abr} 和 T^{ij}_{Min} 并不相等, 其对称部分也不相等. 容易检验, 此结论在张量之和 N^{ij} 对称时也成立.

引入对称的能量动量张量的理由

下述理由促使我们尽量为电磁场引入一个对称的能量动量张量. 在广义相对论中出现的能量动量张量, 或者真空中的电磁场的微观能量动量张量, 对其进行平均化运算后, 所得能量动量张量自然而然就是对称的, 但这或者属于场和介质整体的情况 (我们记得, 介质内部的微观相互作用具有电磁学本质), 或者属于真空中或未被磁化和极化的物质介质中的电磁场的情况. 在所有这些情况下, 或者闵可夫斯基张量是对称的, 因为 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} = 0$, 或者只是介质和场的能量动量张量之和是对称的, 所以仅对这些张量才会在广义相对论和平均化运算中出现自然而然的对称性.

另一方面, 显然, 如果把分量为 S^{ij} 的任何能量动量张量替换为另一个分量为 S^{*ij} 的张量:

$$S^{*ij} = S^{ij} + \Omega^{ij},$$

并且附加张量的分量 Ω^{ij} 恒满足等式

$$\nabla_j \Omega^{ij} = 0, \tag{5.43}$$

则四维有质动力分量的值 (三维力和能量流) 保持不变.

在条件 (5.43) 下, 增加分量为 Ω^{ij} 的张量不会对有质动力公式产生影响. 在许多情况下, 可以在条件 (5.43) 下这样选取分量 Ω^{ij}, 使得张量 S^{*ij} 是对称的. 这样就可以使能量动量张量 S^{ij} 成为对称的, 同时保持四维有质动力矢量不变. 然而在这样的对称化之后, 为了使作用在物质介质上的体积有质动力公式是可以接受的, 对电磁场仍然需要引入内禀矩, $\nabla_k Q^{ijk} \neq 0$.

最后, 物质介质的能量动量张量在所有经典模型中其实都是对称的, 所以在一般情况下尽量保持这一性质似乎是很自然的事情. 不过, 物质介质的非对称能量动量张量只会出现在一些复杂的模型中, 对这些模型的理论和实验研究尚未足够详细和广泛地开展.

§6. 导电流体动力学

导电液体或气体可以作为考虑电磁效应的连续介质模型的一个实例, 其中没有极化和磁化, 但是有电流, 即 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P} = 0$, $\boldsymbol{j}^* \neq 0$. 我们还取 $\mathrm{d}q^{**} = 0$, 即认为在所研究的模型中, 连续介质物质微元与相邻微元和其他外部对象之间仅有机械能和热量的交换.

为简单起见, 下面将研究理想介质模型:

$$p^{ij} = -pg^{ij}.$$

在更一般的情况下可以考虑介质的黏性.

下面研究的方程组是牛顿力学范畴内的近似方程组, 包括以下方程:

连续性方程 (标量方程)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0; \tag{6.1}$$

动量方程 (矢量方程)

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right] = -\operatorname{grad} p + \rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}) + \rho \boldsymbol{F}_{\text{sup}}, \tag{6.2}$$

式中 $\boldsymbol{F}_{\text{sup}}$ 表示与流体和电磁场之间的相互作用无关的通常的质量力, 例如重力;

热流方程 (标量方程)

$$dU + p\,d\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}(\tilde{\boldsymbol{j}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}})dt + dq_{\text{sup}}^{(e)}, \tag{6.3}$$

式中 $dq_{\text{sup}}^{(e)}$ 表示因为热传导或辐射等因素而从外部进入单位质量流体的热流;

表示热力学第二定律的标量关系式

$$T\,ds = \frac{1}{\rho}(\tilde{\boldsymbol{j}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}})dt + dq_{\text{sup}}^{(e)}, \tag{6.4}$$

其中假设 $dq' = 0$.

如果介质的定义是通过内能 U 对 ρ 和 s 的函数关系给出的, 则从关系式

$$dU = T\,ds - p\,d\frac{1}{\rho}$$

还可得出 2 个标量状态方程:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho, \quad -p = \left[\frac{\partial U}{\partial(1/\rho)}\right]_s. \tag{6.5}$$

除了动力学和热力学方程 (6.1)—(6.5), 还需要增加电动力学方程, 即麦克斯韦方程

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad && \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,\\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad && \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e\end{aligned} \tag{6.6}$$

和欧姆定律

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right) + \rho_e\boldsymbol{v}. \tag{6.7}$$

在磁流体力学中通常使用这种形式的欧姆定律. 如果给定 $dq_{\text{sup}}^{(e)}$ 和 $\boldsymbol{F}_{\text{sup}}$, 方程组 (6.1)—(6.7) 就是封闭的.

当介质的电导率很大或很小时 (更准确地说, 当参量 $\sigma L/c$ 的值很大或很小时, 式中 L 是现象的特征长度), 上述方程组在简化后给出磁流体力学方程和电流体力学方程. 为了得到这些方程, 需要估计麦克斯韦方程以及洛仑兹力和焦耳热的表达式中各项取值的量级, 然后忽略掉比其他项量级更小的那些项.

我们分别用 E, H, v, L, T 来表示电场强度、磁场强度、速度、长度和时间的特征尺度值. 磁流体力学方程和电流体力学方程是在非相对论近似下得出的, 这时

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1, \quad \left(\frac{L}{cT}\right)^2 \ll 1. \tag{6.8}$$

如果特征时间 T 具有量级 L/v, 则 (6.8) 中的第二个条件就是第一个条件的推论. 这在力学问题中通常是满足的, 并且 v 或者是介质的特征速度, 或者是波的特征传播速度.

考虑方程

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

由欧姆定律 (6.7), 把 $\boldsymbol{j}$ 的表达式代入此方程, 然后估计所得方程中各项的量级. 这时还要用到从方程 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=4\pi\rho_e$ 得出的一个估计 $\rho_e\sim E/L$. 我们有 (在方程各项之下写出了其值的最大量级)

$$\underset{\frac{H}{L}}{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}}=\underset{\frac{v}{c}\frac{E}{L}}{\frac{4\pi}{c}\rho_e\boldsymbol{v}}+\underset{\frac{\sigma L}{c}\frac{E}{L}}{\frac{4\pi\sigma}{c}\boldsymbol{E}}+\underset{\frac{v}{c}\frac{\sigma L}{c}\frac{H}{L}}{\frac{4\pi\sigma}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}}+\underset{\frac{L}{cT}\frac{E}{L}}{\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}}.\tag{6.9}$$

根据这些估计可以证明, 一般在

$$\left(\frac{\sigma L}{c}\right)^2\gg 1\tag{6.10}$$

时的结果是 $H^2\gg E^2$, 相应方程称为磁流体力学方程, 而在

$$\left(\frac{\sigma L}{c}\right)^2\ll 1$$

时能够得出满足 $E^2\gg H^2$ 的解, 这样的解是在电流体力学中进行研究的.

磁流体力学方程 条件 $\sigma L/c\gg 1$ 对于下述情况是成立的: 液态金属 (汞的电导率 $\sigma\sim 6\times 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$) 和强电离气体 (等离子体, $\sigma\sim 10^{13}$—$10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$) 的多种运动, 天体物理学中研究的大多数现象 (σ 或 L 很大都可以使条件满足). 所以, 磁流体力学的应用范围很广 (磁流体发电机, 等离子体发动机, 热核反应装置等).

由估计 (6.9) 可知, 在条件 (6.10) 下, 方程 (6.9) 中的 $\frac{4\pi}{c}\rho_e\boldsymbol{v}$ 和 $\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ 这两项相对于 $\frac{4\pi\sigma}{c}\boldsymbol{E}$ 是可以忽略的. 于是 (6.9) 的形式成为

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right)$$

或

$$\boldsymbol{E}=\frac{c}{4\pi\sigma}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}.\tag{6.11}$$

由此可见, 在条件 (6.8), (6.10) 下

$$E^2\ll H^2.$$

由估计 (6.9) 和条件 (6.8), (6.10) 进一步可知, 在电流的表达式中一般可以忽略 $\rho_e\boldsymbol{v}$ 而保留传导电流

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}^*=\tilde{\boldsymbol{j}},$$

并且

$$\boldsymbol{j}=\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}.$$

此外, 在相对运动速度远小于光速的所有坐标系中, 磁场强度可以认为是相同的:

$$\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E} \approx \boldsymbol{H},$$

因为 $E^2 \ll H^2$.

现在研究洛仑兹力在磁流体力学中的表达式

$$\boldsymbol{F}_{\text{Lorentz}} = \rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H} = \rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}.$$

因为第一项的量级为 E^2/L, 第二项的量级为 H^2/L, 而 $E^2 \ll H^2$, 所以

$$\boldsymbol{F}_{\text{Lorentz}} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}.$$

最后再写出焦耳热的表达式

$$\tilde{\boldsymbol{j}} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{\sigma}\tilde{\boldsymbol{j}}^2 = \frac{1}{\sigma}\boldsymbol{j}^2 = \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}(\operatorname{rot} \boldsymbol{H})^2,$$

因为 $\tilde{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{j}$.

因此, 介质的方程组中只包括磁场强度 $\boldsymbol{H}$, 但不包括量 $\boldsymbol{E}$, ρ_e, $\boldsymbol{j}$. 由麦克斯韦方程可以得到只含有 $\boldsymbol{H}$ 的方程. 考虑方程

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{6.12}$$

根据方程 (6.11), 我们有

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{c}\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right). \tag{6.13}$$

参量 $c^2/4\pi\sigma$ 具有运动学黏度的量纲, 因而被称为磁黏度 ν_{m},

$$\nu_{\text{m}} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}.$$

把 (6.13) 代入 (6.12), 得到 $\boldsymbol{H}$ 的方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) - \operatorname{rot}(\nu_{\text{m}} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}), \tag{6.14}$$

它被称为感应方程. 可以给这个方程再补充一个方程 (见 §1)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0.$$

如果 $(vH/L)^2 \ll (\nu_{\text{m}}H/L^2)^2$, 即如果 $(vL/\nu_{\text{m}})^2 \ll 1$, 则感应方程右侧第一项相对于第二项是可以忽略的. 此时, $\boldsymbol{H}$ 的方程与介质的运动无关 (如果同时 σ 不依赖于温度, 因为温度是由介质的运动决定的). 然而, 介质的运动当然与 $\boldsymbol{H}$ 有关. 无量纲参量 vL/ν_{m} 称为磁雷诺数,

$$Re_{\text{m}} = \frac{vL}{\nu_{\text{m}}}.$$

相反, 如果 $Re_{\rm m} \gg 1$, 就可以忽略感应方程 (6.14) 右侧第二项, 这时磁场满足方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}), \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{H} = 0. \tag{6.15}$$

结果是, 磁场被冻结在介质中 (见下一节).

这样, 磁流体力学方程组最简单的一种形式为 (不考虑介质的黏性和热传导)

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0, \\
&\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \rho \boldsymbol{F}_{\rm sup} - \mathrm{grad}\, p + \frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}, \\
&\rho T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H})^2, \\
&U = U(\rho,\ s), \quad p = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial s}, \\
&\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) - \mathrm{rot}(\nu_{\rm m}\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{H}), \\
&\mathrm{div}\, \boldsymbol{H} = 0.
\end{aligned}$$

此方程组不包括量 $\boldsymbol{E}$, ρ_e, $\boldsymbol{j}$. 如果需要, 可以在求解后按照以下公式计算这些量:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{H}, \\
&\boldsymbol{E} = \frac{1}{c} \left(\nu_{\rm m}\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right), \\
&\rho_e = \frac{1}{4\pi} \mathrm{div}\, \boldsymbol{E}.
\end{aligned}$$

电流体力学 现在研究 $\sigma L/c \ll 1$ 的现象, 例如包含某一数目 (少量) 带电粒子的弱导电介质的流动. 流动与被绕流物体的相互作用经常导致介质流中出现带电粒子, 或者也可以人为地在流动中添加带电粒子, 以便有可能利用电磁场来控制流动.

这里考虑最简单的一种情况: 在介质中只有电中性分子 (单位体积中的数目为 n) 和一种电荷为 e 的带电粒子 (单位体积中的数目为 n_1). 如果用 $\boldsymbol{v}_{\rm rel}$ 表示带电粒子相对于介质的平均速度,

$$\boldsymbol{v}_{\rm rel} = \frac{1}{n_1} \sum \boldsymbol{v}_{i\,\rm rel},$$

则传导电流 (在介质相对速度为零的坐标系中的电流) 显然可以表示为

$$\boldsymbol{j}' = \rho_e \boldsymbol{v}_{\rm rel},$$

而静止坐标系中的电流为

$$\boldsymbol{j} = \rho_e \boldsymbol{v} + \rho_e \boldsymbol{v}_{\rm rel}.$$

通常按照以下公式引入带电粒子的迁移率 b:

$$\boldsymbol{v}_{\rm rel} = b\boldsymbol{E},$$

那么

$$j' = \rho_e b\boldsymbol{E}.$$

因此, 在所研究的情况下可以引入记号

$$\sigma = \rho_e b.$$

迁移率 b 正比于带电粒子数目, 反比于介质密度.

我们从方程 (6.9) 看到, 如果 $\sigma L/c \ll 1$, $v^2/c^2 \ll 1$, $L/cT \ll 1$, 则该方程具有满足 $H^2 \ll H^2$ 的一类解. 这正是在电流体力学中研究的情况. 这时, $\boldsymbol{E}$ 的麦克斯韦方程组可以简化, 因为方程

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0$$

的第二项与第一项相比是高阶小量 $(E/L \ll LH/cTL)$. 所以, 这个方程可以替换为方程 $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0$. 因此, 电流体力学中的电场满足静电学方程

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e.$$

我们指出, $\boldsymbol{E}$ 可能与时间有关.

此外, 因为 $H^2 \ll E^2$, 所以还可以认为, 电流体力学中的电场强度在所有作相对低速运动的惯性系中都是相同的:

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} \approx \boldsymbol{E}.$$

因此, 欧姆定律可以写为

$$\boldsymbol{j} = \rho_e\boldsymbol{v} + \sigma\boldsymbol{E},$$

或者, 在所研究的简单情况下,

$$\boldsymbol{j} = \rho_e\boldsymbol{v} + \rho_e b\boldsymbol{E}.$$

我们来研究洛伦兹力:

$$\boldsymbol{F}_{\text{Lorentz}} = \rho_e\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H} = \rho_e\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\rho_e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} + \frac{\sigma}{c}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}.$$

因为第一项的量级为 E^2/L, 第二项的量级为 vEH/cL, 第三项的量级为 $\sigma LEH/cL$, 并且 $H^2 \ll E^2$, $v^2/c^2 \ll 1$, $\sigma L/c \ll 1$, 所以第二项和第三项与第一项相比可以忽略, 即

$$\boldsymbol{F}_{\text{Lorentz}} = \rho_e\boldsymbol{E}.$$

我们再写出焦耳热的表达式:

$$\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{E}' = \sigma\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} = \sigma\boldsymbol{E}^2,$$

因为在电流体力学中 $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}$. 对于只包含一种带电粒子的介质,

$$\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{E}' = \rho_e b\boldsymbol{E}^2.$$

现在写出形式最简单的封闭的电流体力学方程组 (不考虑介质的黏性和热传导):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0,\\
&\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{sup}}-\mathrm{grad}\,p+\rho_e\boldsymbol{E},\\
&\rho T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sigma\boldsymbol{E}^2=\rho_e b\boldsymbol{E}^2,\\
&U=U(\rho,\ s),\quad p=\rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho},\quad T=\frac{\partial U}{\partial s},\\
&\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=0,\\
&\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=4\pi\rho_e,\\
&\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0,\\
&\boldsymbol{j}=\rho_e\boldsymbol{v}+\rho_e b\boldsymbol{E}.
\end{aligned}
$$

倒数第二个方程是麦克斯韦方程的精确推论, 见 §4. 这个方程组不包括磁场强度 $\boldsymbol{H}$. 如果需要, 可以在问题解决后从以下方程确定这个量:

$$
\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0.
$$

在电流体力学中可以引入电雷诺数

$$
Re_{\mathrm{el}}=\frac{v}{bE}.
$$

如果 $Re_{\mathrm{el}}\to 0$ (电荷的迁移率很大), 则决定电场的方程与介质的参量无关 (如果同时 b 与这些参量无关). 因此, 在电雷诺数很小时, 介质的运动不影响电场的值. 如果 $Re_{\mathrm{el}}\to\infty$, $b\to 0$, 则电荷与介质一起运动, 它们被冻结在介质中.

除了磁流体力学和电流体力学, 研究与电磁场发生相互作用的连续介质运动的其他一些科学领域也得到发展. 例如, 一种被称为铁磁液体的物质 (悬浮着铁粉的液体) 具有越来越广泛的应用, 铁流体力学因而得以产生和发展. 还有极化流体力学, 磁致弹性, 压电弹性, 等等.

§7. 磁力线和涡线冻结定律

我们现在阐述满足关系式

$$
\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{A}),\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0 \tag{7.1}
$$

的矢量场 $\boldsymbol{A}(x,\ y,\ z,\ t)$ 的一般性质.

前面 (见 (6.15)) 已经证明, 磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 在 $Re_{\mathrm{m}}\gg 1$ 时满足这些条件, 例如电导率无穷大的情况. 对于理想流体在有势质量力场中的正压运动, 速度的涡量场 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}/2$ 也满足上述方程. 其实, 考虑葛罗麦卡－兰姆形式的不导电理想流体的

动量方程:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\operatorname{grad}\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\boldsymbol{F}. \tag{7.2}$$

假设 $\boldsymbol{F}=\operatorname{grad}U$, $p=f(\rho)$. 这时可以引入压强函数

$$\mathscr{P}=\int\limits_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)},$$

并且容易验证, 成立等式

$$\operatorname{grad}\mathscr{P}=\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p.$$

在这些假设下, 动量方程 (7.2) 的形式成为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\operatorname{grad}\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=-\operatorname{grad}\mathscr{P}+\operatorname{grad}U.$$

现在对此方程的两侧取旋度, 得

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}=\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}). \tag{7.3}$$

此外,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}=0.$$

这些方程与方程 (7.1) 和 (6.15) 相同. 我们指出, 方程 (7.3) 中只包括运动学量, 但是它是作为动量方程这一动力学方程的推论得出的.

因此, 只要证明了满足条件 (7.1) 的矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的一般性质, 我们就能得到相关场的一些非常重要的性质, 例如电导率无穷大时的磁场强度场 $\boldsymbol{H}$, 以及理想流体在有势质量力场中的正压运动过程中的涡量场 ω.

无源矢量经过物质面的通量对时间的求导公式

物质面就是与连续介质的物质微元一起运动的曲面. 取某个不封闭的物质面 Σ, 其边界是围线 C. 我们先来推导无源矢量 $\boldsymbol{A}(x,\ y,\ z,\ t)$ 经过物质面 Σ 的通量对时间的求导公式. 我们知道, 所谓矢量经过曲面 Σ 的通量, 是指积分

$$\int\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{\Sigma}A_n\,\mathrm{d}\sigma,$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 表示曲面 Σ 的微元 $\mathrm{d}\sigma$ 上的单位法线矢量. 法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向和围线 C 的环绕方向之间的关系同前面一样, 从 $\boldsymbol{n}$ 所指方向来看, 围线 C 的环绕方向是逆时针的.

如果上述物质面在时刻 t 位于 Σ, 而在时刻 $t+\Delta t$ 位于 Σ_1 (图 41), 则按照导数的定义, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Sigma}A_n\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int\limits_{\Sigma_1}A_n(x,\ y,\ z,\ t+\Delta t)\,\mathrm{d}\sigma-\int\limits_{\Sigma}A_n(x,\ y,\ z,\ t)\,\mathrm{d}\sigma\right]. \tag{7.4}$$

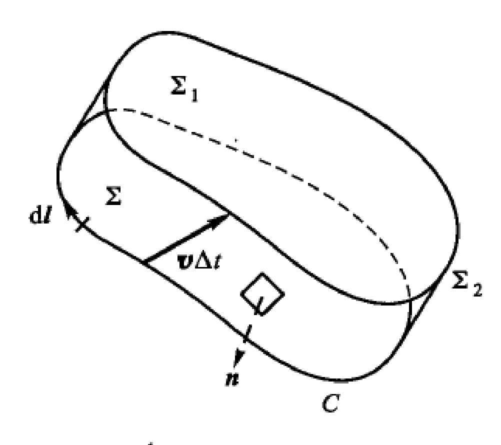


图 41. 用于推导无源矢量经过物质面的通量对时间的求导公式

现在证明, 此导数根据方程 (7.1) 等于零, 所以上述矢量满足

$$\int_{\Sigma} A_n \,\mathrm{d}\sigma = \text{const}. \tag{7.5}$$

其实, 用 Σ_2 表示围线 C 在 Δt 时间内发生移动时由围线的点的轨迹组成的曲面, 并考虑由曲面 Σ, Σ_1 和 Σ_2 组成的封闭曲面. 利用奥-高定理和 (7.1) 中的第二个条件, 我们有

$$\int_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} A_n(x,\ y,\ z,\ t)\,\mathrm{d}\sigma = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\tau = 0, \tag{7.6}$$

式中 V 是封闭曲面 $\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2$ 所包围的物质体, $\boldsymbol{n}$ 是 V 的外法线. 如果把曲面 Σ_1 上的法线改为相反方向的法线, 并在等式 (7.6) 的两侧加上 $\int_{\Sigma_1} A_n(x,\ y,\ z,\ t+\Delta t)\,\mathrm{d}\sigma$, 则由此容易得出

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma_1} A_n(x,\ y,\ z,\ t+\Delta t)\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\Sigma} A_n(x,\ y,\ z,\ t)\,\mathrm{d}\sigma\\ &\qquad = \int_{\Sigma_1} A_n(x,\ y,\ z,\ t+\Delta t)\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\Sigma_1} A_n(x,\ y,\ z,\ t)\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\Sigma_2} A_n(x,\ y,\ z,\ t)\,\mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

从而对导数 (7.4) 得出以下表达式[1]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma} A_n(x,\ y,\ z,\ t)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)_n \mathrm{d}\sigma + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{\Sigma_2} A_n(x,\ y,\ z,\ t)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{7.7}$$

侧面 Σ_2 的矢量面微元 $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$ 显然等于

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \boldsymbol{v}\Delta t \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是曲面 Σ 的边界 C 的线微元 (见图 41). 所以, 积分 $\int_{\Sigma_2} A_n \,\mathrm{d}\sigma$ 可以转换为沿曲线 C 的积分:

$$\int_{\Sigma_2} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = -\int_C \boldsymbol{A}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{v})\Delta t = -\int_C \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{A})\Delta t,$$

或者利用斯托克斯定理转换为沿张于围线 C 的初始曲面 Σ 的积分:

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{\Sigma_2} A_n\,\mathrm{d}\sigma = -\int_C (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{\Sigma} [\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{A})]_n\,\mathrm{d}\sigma.$$

[1] 原书误将 (7.7) 右侧第一个积分中的被积函数 $(\partial \boldsymbol{A}/\partial t)_n$ 写为 $\partial A_n/\partial t$. ——译注

现在, 所求导数的表达式 (7.7) 的形式成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Sigma} A_n\,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\Sigma}\left[\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{A})\right]_n \mathrm{d}\sigma. \tag{7.8}$$

这就是矢量分析的一个一般公式——无源矢量 $\boldsymbol{A}$ 经过运动的物质面 Σ 的通量对时间的求导公式.

显然, 为了使公式 (7.8) 成立, 需要矢量 $\boldsymbol{v}$ 仅仅在曲面 Σ 和其边界 C 上的点的取值是确定的.

矢量面、矢量管和矢量线的保持性

如果矢量场 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 (7.1), 则由 (7.8) 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Sigma} A_n\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

这样, 我们证明了上述命题: 在矢量场 $\boldsymbol{A}(x,\ y,\ z,\ t)$ 满足条件 (7.1) 的区域中成立等式 (7.5), 其中 Σ 是与连续介质微元一起运动的曲面.

从已经被证明的性质 (7.5) 可以得到关于所研究的矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的一系列非常重要的推论.

推论一: 该矢量场的矢量面在运动过程中还是矢量面. 其实, 在某一时刻 t 考虑该矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的某一矢量面 Π, 即这样的曲面, 矢量 $\boldsymbol{A}$ 在该曲面的每一点都位于其切平面内. 由于运动的连续性, 曲面 Π 在时刻 $t+\Delta t$ 移动至另外某一曲面 Π'. 不难看出, 这个曲面 Π' 也是矢量面. 因为曲面 Π 根据条件是矢量面, 所以矢量 $\boldsymbol{A}$ 经过属于曲面 Π 的任何曲面 Σ 的通量等于零. 设曲面 Σ 经过 Δt 时间后移动至曲面 Σ', 则根据运动的连续性, 曲面 Σ' 属于 Π'. 按照性质 (7.5), 矢量 $\boldsymbol{A}$ 经过曲面 Σ' 的通量也等于零, 即矢量 $\boldsymbol{A}$ 在时刻 $t+\Delta t$ 位于 Π' 的切平面内. 这时, Σ 可以取作任意小的曲面, 它在曲面 Π 上的位置也是任意的, 所以曲面 Σ' 也同样如此, 于是必然在 Π' 的所有的点都有 $A_n=0$, 而这就表示曲面 Π' 也是矢量面.

例如, 矢量管侧面在运动过程中还是矢量管侧面, 矢量管还是矢量管.

推论二: 满足条件 (7.1) 的矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的矢量线在运动过程中永远是矢量线. 其实, 在时刻 t 经过矢量线 l 可以取两个矢量面 Π_1 和 Π_2, 其交线就是 l. 设矢量面 Π_1 和 Π_2 在时刻 $t+\Delta t$ 分别移动至曲面 Π_1' 和 Π_2'. 根据运动的连续性, 矢量线 l 在时刻 $t+\Delta t$ 移动至曲面 Π_1' 和 Π_2' 的交线 l'. 按照 (7.5) 的推论一, 曲面 Π_1' 和 Π_2' 中的每一个都是矢量面, 所以 l' 也是矢量线.

推论三: 该矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的任何矢量管的强度在整个运动过程中保持不变. 其实, 我们知道 (见第二章 §8), 矢量管强度是通过矢量 $\boldsymbol{A}$ 经过矢量管横截面的通量 (在无源场中它沿矢量管不变) 定义的. 因此, 上述命题是该量场 $\boldsymbol{A}$ 的性质 (7.5) 的直接推论. 对于满足条件 (7.1) 的矢量场 $\boldsymbol{A}$, 有

$$\int\limits_{\Sigma} A_n\,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\Sigma'} A_n\,\mathrm{d}\sigma,$$

式中 Σ 和 Σ' 分别是矢量管在时刻 t 和 t' 的任意横截面.

因此, 在满足条件 (7.1) 的矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中, 矢量面、矢量管和矢量线在运动过程中是保持的. 保持的含义在于, 它们在空间中与连续介质微元一起运动. 矢量面、矢量管和矢量线被冻结在介质中.

如上所述, 介质电导率无穷大时的磁场强度场 $\boldsymbol{H}$ 和理想流体在有势质量力场中的正压过程中的涡量场 $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}/2$ 都满足条件 (7.1). 因此, 这些情况下的磁场强度场 $\boldsymbol{H}$ 和涡量场 $\boldsymbol{\omega}$ 在上述含义下被冻结在介质中.

例如, 在电导率无穷大的介质中, 如果在初始时刻 t_0 在某个区域 $\mathscr{D}$ 中没有磁场 $\boldsymbol{H}$, 则在在任意时刻 t, 当区域 $\mathscr{D}$ 移动至区域 $\mathscr{D}'$ 时, 其中也不会有磁场.

磁场与连续介质微元一起运动. 如果在太阳上发生等离子体爆发, 即电导率无穷大的高温气团的猛烈喷发, 则磁场会与等离子体一起运动并延伸至星际空间.

因为涡量场 $\boldsymbol{\omega}$ 在上述条件下的性质对实际应用非常重要, 我们再来更详细地研究这些性质.

汤姆孙定理

若 Σ 是流体物质面, 则矢量场 $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}/2$ 的性质 (7.5) 可以写为以下形式:

$$\int_{\Sigma} \omega_n \,\mathrm{d}\sigma = \text{const}, \tag{7.9}$$

即涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 经过与连续介质微元一起运动的任何曲面 Σ 的通量是不变的. 利用斯托克斯定理, 性质 (7.9) 可以写为

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \text{const}$$

(式中 C 是一直由同样一些流体物质点组成的任意封闭围线) 或

$$\Gamma = \text{const},$$

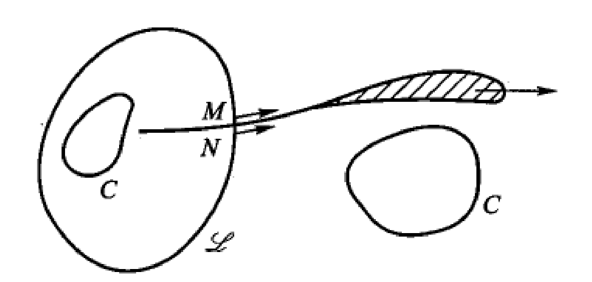


图 42. 沿围线 C 的环量等于零, 沿曲线 $\mathscr{L}$ 的环量可能不等于零

即: 如果理想流体所受外质量力是有势的, 其运动是正压的, 则沿任何封闭物质线的速度环量 Γ 在整个运动过程中保持不变. 这个命题称为汤姆孙定理.

在具有速度间断面的势流中可能出现 $\Gamma \neq 0$ 的封闭围线

必须记住的是, 环量不变的结论只对彼此能够通过连续变形得到的围线才成立, 这是从汤姆孙定理的证明中得出的结论. 如果流体在某一时刻静止, 则这时沿所有围线的环量都等于零. 然而在以后的运动中, 如果在流动中有速度间断, 则一般能够出现形如 $\mathscr{L}$ 的封闭围线, 沿该围线的环量不等于零 (图 42).

其实, 如果围线 $\mathscr{L}$ 与速度间断线相交, 则沿围线 $\mathscr{L}$ 的环量一般不等于零, 因为在间断线上, 点 M 和 N 的速度不同, 于是在所研究的时刻封闭的围线 $\mathscr{L}$ 在下一时刻不再封闭, 它在以前的时刻一般也不封闭, 包括流体在初始时刻静止的情况. 汤姆

孙定理对不封闭的物质线无法应用, 所以沿这样的物质线的环量是不保持的[1].

拉格朗日定理 汤姆孙定理的一个直接推论是拉格朗日定理: 在汤姆孙定理的条件下, 如果流体的某一部分在某个给定时刻 t_0 是无旋的, 则这部分流体在 $t < t_0$ 和 $t > t_0$ 时也是无旋的. 我们强调, 在拉格朗日定理的表述中讨论的不是确定的一部分空间, 而是确定的一部分连续运动的流体.

我们来证明拉格朗日定理. 依条件, 在 $t = t_0$ 时在区域 $\mathscr{D}$ 内无旋, 于是在该区域中的每一点 $\boldsymbol{\omega} = 0$. 因此, 根据斯托克斯定理, 沿属于区域 $\mathscr{D}$ 的任何封闭围线的环量 $\Gamma = 2\int\limits_{\Sigma} \omega_n \,\mathrm{d}\sigma$ 都等于零,

$$\oint\limits_{C} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

按照汤姆孙定理, 沿任何封闭物质线的环量 Γ 在所有其他时刻都等于零. 那么, 再次利用斯托克斯定理可知, 对于完全属于流体区域 $\mathscr{D}$ 的任何曲面 Σ 都有

$$\int\limits_{\Sigma} \omega_n \,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

这只有在 $\mathscr{D}$ 的任何点对任何方向 $\boldsymbol{n}$ 都成立 $\omega_n = 0$ 才是可能的, 所以在任何时刻对流体的任何物质点都有 $\boldsymbol{\omega} = 0$.

众所周知, 无旋等价于存在速度势, 所以拉格朗日定理还可以这样来表述: 如果流体的运动在某个时刻 t_0 是有势的, 则在汤姆孙定理的条件下, 流体的运动在此之前和之后的所有其他时刻都是有势的. (在一般情况下, 势函数和相应速度场的间断面有可能在势流中形成并发展, 这些间断面会延伸到流体的边界.) 于是, 这时存在速度势 $\varphi(x,\ y,\ z,\ t)$, 并且

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi(x,\ y,\ z,\ t).$$

由汤姆孙定理可见, 理想流体的有势运动具有重要的物理意义, 这极大地简化了求解速度场的问题.

可以说, 只有在汤姆孙定理的假设不成立时, 涡旋才可能在流体中产生或消失. 换言之, 涡旋产生或消失的原因包括: 或者流体是黏性的, 或者运动不是正压的, 或者外质量力不是有势的, 或者速度场的连续性遭到破坏.

涡旋的亥姆霍兹动力学定理 我们已经证明了理想流体正压运动的涡量场的矢量面、矢量线以及矢量管强度的守恒性, 这些性质被称为亥姆霍兹动力学定理, 其表述如下.

亥姆霍兹动力学定理一: 在汤姆孙定理的假设下, 在某个时刻组成涡面、涡管或涡线的流体物质点在整个运动过程中仍然分别组成涡面、涡管或涡线.

[1] 实验和理论在很多情况下都表明, 为了描述流体的真实运动, 必须研究含有间断面的速度场.

亥姆霍兹动力学定理二: 在汤姆孙定理的假设下, 涡管强度在整个运动过程中保持不变, 即

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{const}$$

式中 C 是环绕所给涡管 1 周的任何封闭围线.

亥姆霍兹定理在求解流体力学的许多基本问题时具有重要的意义 (见第八章).



第七章 连续介质力学问题的提法

§1. 提出具体问题的一般原理

模型和参考系 在对连续介质力学中的具体问题进行理论研究的时候, 为了描述所研究的介质的运动和状态, 必须显式地或隐式地[1] 选取观察者的参考系. 在牛顿力学中, 可以选取任何"静止的"或运动的参考系当作观察者的参考系. 然而, 总要指出一个惯性参考系, 因为只有这样才能够使用惯性力的有关结果.

在需要时还要注意拉格朗日坐标系的存在, 因为实际上正是利用这种坐标系才有可能区别连续介质的物质点, 并且就本质而言, 它是定义介质微元的运动和状态特征量的基础.

在前面各章中已经建立和描述了力学、热力学和电动力学的一些普适方程. 这些方程是创立任何具体的连续介质模型理论的基本关系式, 它们适用于所有模型, 也适用于一个确定的模型中关于运动和物理过程的各种单独的情况. 如前所述, 这些普适方程对于光滑的连续分布可以写为偏微分方程的形式.

除了微分方程, 同样的物理定律还被表述为积分的形式: 积分形式的连续性方程 (第三章 (1.2))、动量方程 (第三章 (2.2))、热力学第一定律——能量方程 (第五章 (8.1))、热力学第二定律 (第五章 (8.2)) 和一般的麦克斯韦方程 (第六章 (5.4), (5.5)).

若运动特征量的分布是连续的和光滑的, 则微分表述等价于积分表述. 然而, 有时还必须研究表征现象的特征量对空间或时间变量有间断的分布. 在有间断的时候, 积分表述表现出更一般的本质, 因为它们在这时仍然有意义. 微分表述在现象连续的区域有意义, 但在有间断的地方需要一些附加条件, 而积分表述已经包含了这些附加

[1] 为了清晰而明确地提出问题, 最好把所有假设和条件用显式的方法表述出来.

条件. 我们在后面几节中将从普适的积分关系式出发引入相应的间断条件.

前面已经指出, 为了得到能够对给定连续介质的运动进行详细研究的方程组, 总是需要引入一些附加的假设, 这些假设把所研究的模型的特别性质和物理本质固定下来. 选取一个模型是必须的. 选取模型的问题可以成为专门的和广泛的研究对象; 在许多情况下, 这是物理学的一个基本问题, 它关系到用理想化和概括的方法进行描述并引入各种类型的概念和特征量. 为了描述新发现的效应和现象, 必须选取和建立新的模型, 不论这些新效应和新现象的本质是已知的还是才开始在正在发展的科技领域中显现出来.

我们已经在前面几章中介绍了许多重要的经典连续介质模型: 理想流体模型、弹性体模型、黏性流体模型、磁流体力学中的导电流体模型, 等等. 这个名单远远没有列举完所有已知的模型, 还有其他许多模型, 其中某些模型将在后面进行介绍. 现在, 由于新材料的应用和已有材料使用范围的扩展, 由于在力学中必须考虑电磁性质和电磁效应, 由于高真空条件或与之相反的高压条件的应用, 由于超低温或与之相反的超高温的应用, 由于需要对生物体中的复杂现象进行研究, 还由于其他诸多原因, 建立新模型的问题是迫切的. 目前, 在物理学和力学中建立新模型的理论正在飞速发展.

可以在每一个固定模型的范围内用附加的方式引入关于外部作用的假设, 例如关于外质量力 $\boldsymbol{F}^{(e)}$ 以及元能量流 $dq^{(e)}$ 和 dq^{**} 的假设. 在一个给定模型的范围内, 还可以提出这样的问题: 根据假定的运动或实验观察的结果求出上述那些量.

用来区别不同运动的附加条件的必要性

在选定一个模型之后, 为了区别一种或一类确定的现象和运动, 还需要提出一些附加条件. 这是显而易见的! 其实, 在不可压缩理想流体的理论模型的范围内可以研究水、石油和许多其他液体的多种运动, 甚至可以研究空气和其他一些气体的运动, 只要可压缩性是可以忽略的. 例如: 海水的各种流动和波浪运动, 水从容器中流出时形成的射流运动, 水通过堤坝溢洪道的流动, 由船和潜水艇的运动引起的海水运动, 由亚声速低速飞行的飞艇引起的空气运动, 以及大量其他问题. 在上述所有情况下, 都可以使用同一个封闭的微分方程组. 因此, 尽管这些微分方程在流体所占区域中的每一点都成立并且组成封闭的方程组, 但是要想解决确定流体所占区域中的速度场和压强场的数学问题, 这些方程是完全不够的. 众所周知, 运动微分方程的通解中含有一些任意的函数和常数, 它们需要借助于专门的条件来确定.

我们现在开始研究用来区别各种运动的各种典型的附加条件.

连续介质所占区域和运动进行的时间间隔

数学问题的解表示为函数的形式, 这些函数在所研究的运动进行的时间间隔内定义于介质所占区域中的各个点. 时间间隔可能是有限的, 可能开始于某个“初始的”特征时刻 $t = t_0$ 或者与它“联系在一起”; 可以在任何 $t > t_0$ 或 $t < t_0$ 或所有 $t \leqslant t_0$ 的时刻研究连续介质的运动和状态. 按照问题的意义, 可能需要求出各种各样的特征时刻.

运动介质所占区域 $\mathscr{D}$ 在一些情况下可能是给定的, 而在另外一些情况下可能是事先未知的. 例如, 当流体充满给定容器并在其中运动时, 或者当流体充满各种事先给定的固定障碍物之外的整个空间并绕障碍物运动时, 可以认为区域 $\mathscr{D}$ 是已知的. 区域 $\mathscr{D}$ 在许多情况下又是事先未知的, 例如, 在解决从容器中向外倒水的问题时, 在研究给定外载荷系作用下的弹性体变形时, 区域 $\mathscr{D}$ 应当在求解过程中加以确定.

在某些情况下, 区域 $\mathscr{D}$ 的边界可能由已知的和未知的部分共同组成, 例如, 海底表面、船体表面或一般而言物体的运动表面在流体内的部分是已知的边界, 而波动的海面或者在流体从容器中流出时形成的射流的边界等是事先未知的边界, 它们需要在问题的求解过程中加以确定.

连续介质所占区域 $\mathscr{D}$ 可能是有界的, 例如容器或管道内的流体, 或杆、梁、机器零件这些可变形"固体". 在概括问题的提法时, 经常遇到含有无穷远点的区域 $\mathscr{D}$. 这时, 或者流体、变形"固体"或电磁场占据整个空间或占据某一组给定物体的外部, 或者有延伸至无穷远的射流或带状区.

无穷远条件 在求解问题时, 对于包含无穷远点的区域 $\mathscr{D}$, 必须根据基于物理特性的假设给出无穷远处的附加条件.

作为这样的条件, 在许多情况下可以假设所研究的现象具有局部扰动的特点, 并且介质在无穷远处的状态和运动是给定的. 例如, 若一个有限大小的固体位于无界的流体中, 则在研究由固体运动引起的流体的绝对运动时可以认为, 无穷远处的流体速度趋于零, 压强趋于给定值, 电磁场具有事先给定的性质; 类似地可以假设, 可变形固体在无穷远的地方处于由附加物理条件决定的自然状态, 等等.

在静止物体绕流问题中必须认为, 来流在上游无穷远处——而在某些情况下在任何方向的无穷远处——具有给定的性质: 速度、压强和温度等都是给定的.

不过, 无穷远条件有时可能具有更复杂的性质. 例如, 有时在不同方向的无穷远处有某种有规律的过程, 甚至可能有周期过程; 一般而言, 在不同方向上还有各种给定类型的波, 等等.

无穷远附加条件的表述问题往往关系到一些不太明显的效应, 产生这些效应的原因是有或者没有来自无穷远处或来自某种辐射的能量流.

介质内部的奇点 无穷远条件可以视为无穷远奇点处的附加条件. 为了考虑对介质或场的各种作用, 在区域 $\mathscr{D}$ 的有限部分也可以引入奇点. 例如, 可以引入基于质量流量的流体点源或点汇、偶极子和多极子, 电磁场中的点电荷、偶极子和多极子, 集中作用的外力和外部能量源所形成的各种确定类型的奇点. 这些奇异性能够模拟距离我们根据问题的含义所关心的场的区域或介质的运动区域很远的其他物体的作用和存在.

因此, 可以在区域 $\mathscr{D}$ 中引入奇点, 并给定某些函数在这些奇点的渐近行为; 这些奇点还可能是因为存在某些外部作用而出现的, 并且在运动方程中并未考虑这些外部作用.

初始条件 在常微分方程和偏微分方程理论中，柯西问题具有重大意义. 例如，二阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=f\left(t,\ x,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) \tag{1.1}$$

的柯西问题表述如下: 求出方程 (1.1) 的解 $x(t)$, 使它在 $t=t_0$ 时满足条件

$$(x)_{t=t_0}=x_0,\quad \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0}=x_0', \tag{1.2}$$

式中 t_0, x_0 和 x_0' 是给定的数. 由微分方程理论可知, 柯西问题在许多重要情况下具有唯一的解. 附加条件 (1.2) 称为初始条件或柯西条件.

用类似的方式可以引入偏微分方程的柯西问题，而对于非定常运动，可以依照方程的形式给出所求函数及其某些导数在 $t=t_0$ 时的表达式作为附加条件. 例如，在利用拉梅方程 (第四章 (2.16)) 求解弹性体动力学问题时，需要给出弹性体所有点的初始位移和初始速度；而在求解关于均匀不可压缩理想流体非定常运动 (第四章方程组 (1.6)) 的问题时，只要给出速度在初始时刻在整个区域 $\mathscr{D}$ 内的分布即可.

如果区域 $\mathscr{D}$ 是无界空间，则初始条件在许多情况下足以区别一种确定的解. 初始条件的数目和形式依赖于方程组的阶数. 不过，柯西条件的表述问题以及解的存在性和唯一性问题需要在每一种具体情况下专门解决.

边界条件 如果有界的或无界的区域 $\mathscr{D}$ 具有边界 S, 则除了初始条件，还必须提出并使用边界上的一些专门条件才能得到确定的解. 这些条件称为边界条件. 边界条件可能具有各种各样的形式，它们是根据一些额外的物理思考提出的. 下面列出边界条件的某些典型的和重要的实例.

位移和速度在边界上的无滑移条件 我们假设所有边界面 S 或它的任何一部分 S_1 都是已知的. 按照定义，当从介质一侧向边界面 S_1 靠近时，介质与它的边界 S_1 有一个接触面，所以介质物质点在 S_1 上的位移和边界面 S_1 本身的位移应当通过接触面保持的条件关联起来. 当介质的物质点不沿边界面 S_1 的切平面滑移时，介质物质点的位移矢量 $\boldsymbol{w}_{\text{medium}}$ 将等于边界面上的点的位移矢量 $\boldsymbol{w}_{\text{boundary}}$.

例如，当弹性体固定于一种给定类型的支架时，当外部物体进入可变形“固体”时，或者当黏性流体绕给定形状的固体流动时，以及在许多其他情况下，都能够应用上述条件.

显然，这时在边界面 S_1 上成立条件

$$\boldsymbol{w}_{\text{medium}}=\boldsymbol{w}_{\text{boundary}},\quad \boldsymbol{v}_{\text{medium}}=\boldsymbol{v}_{\text{boundary}}. \tag{1.3}$$

如果边界 S_1 的运动是给定的，则在沿 S_1 没有滑移时，在此边界上成立条件 (1.3), 其中位移矢量 $\boldsymbol{w}_{\text{boundary}}(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t)$ 和速度矢量 $\boldsymbol{v}_{\text{boundary}}=\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{w}_{\text{boundary}}}{\partial t}\right)_{\xi^i}$ 是拉格

朗日坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3, t 的已知函数. 在可变形"固体"力学中经常出现这类条件. 在黏性流体运动理论中也采用条件 (1.3), 它被称为无滑移条件.

位移条件主要用于弹性力学, 因为应变张量和应力张量可由位移计算. 而在流体运动理论中, 流体微元的位移并不直接包含在运动方程中, 其中包含的是速度分量, 所以速度的边界条件 (1.3) 主要用于流体力学.

显然, 当运动连续时, 如果位移条件成立, 则速度条件 (1.3) 自动成立.

如果边界 S_1 从某个初始位置移动到给定位置, 则 $\boldsymbol{w}_{\text{boundary}}(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t) \neq 0$; 如果最初发生移动的边界 S_1 此后保持静止, 则速度 $\boldsymbol{v}_{\text{boundary}}$ 在 S_1 移动之后等于零.

位移或速度的每个矢量条件 (1.3) 都等价于 3 个标量等式.

初始条件和边界条件的数目取决于方程的阶数, 所以边界条件及其数目对不同模型是不同的.

理想流体绕流条件 例如, 理想流体的动力学运动方程是欧拉方程, 其中速度分量对坐标的偏导数只有一阶的, 而黏性流体的纳维－斯托克斯方程含有速度分量对坐标的二阶偏导数. 对于这两种情况, 考虑速度边界条件 (1.3) 是自然的和方便的.

然而, 3 个无滑移条件 (1.3) 对理想流体来说是太强的条件. 在壁面完全无滑移的条件下, 欧拉方程的解是不存在的, 所以必须允许理想流体微元能够在与外部固体或可变形体接触的边界上发生滑移.

对于理想流体, S_1 上的条件 (1.3) 减弱为一个标量的绕流条件

$$\text{在 } S_1 \text{ 上} \quad v_{n\,\text{fluid}} = v_{n\,\text{boundary}}, \tag{1.4}$$

式中 $v_{n\,\text{fluid}}$ 和 $v_{n\,\text{boundary}}$ 分别是流体微元和边界面的速度在 S_1 上的法向分量. 条件 (1.4) 表示流体同给定边界面 S_1 保持接触, 所以流体既不能通过边界面 S_1 流入物体内部, 也不能离开边界面 S_1.

在理想流体与某些物体的边界面 S_1 上通常成立不等式

$$\boldsymbol{v}_{\tau\,\text{fluid}} \neq \boldsymbol{v}_{\tau\,\text{body}}, \tag{1.5}$$

式中的角标 τ 表示速度在边界面 S_1 上的切向分量. 根据不等式 (1.5), 理想流体在运动方式给定的边界面 S_1 上是有滑移的.

如果理想流体的运动是有势的, $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$, 则条件 (1.4) 可以写为以下形式:

$$\text{在 } S_1 \text{ 上} \quad v_{n\,\text{fluid}} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = v_{n\,\text{boundary}}.$$

因此, 根据绕流条件, 在边界 S_1 上可以给出势函数 φ 的法向导数的值. 如果边界 S_1 静止, 则条件 (1.4) 的形式为

$$\text{在 } S_1 \text{ 上} \quad v_{n\,\text{fluid}} = 0$$

或

$$\text{在 } S_1 \text{ 上} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

在给定的边界上，除了条件 (1.3) 或 (1.4)，对不同模型还可以提出许多其他条件. 例如，在 S_1 上可以给出温度或热流. 如果封闭方程组中的方程包含电磁场特征量，就可以在 S_1 上给出诸如矢量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 的条件.

边界条件的表述应当以一般的间断面条件为基础，这些条件将在后面几节中进行讨论. 不过，我们在这里先详细地研究一些适用面很广的、可以通过间断面条件表述的边界条件.

自由面条件 在许多问题中，连续介质连续运动区域的边界 S 或它的某一部分 S_2 因为事先未知而应当在解决问题时求出. 在未知边界 S_2 上通常给出外部载荷. 在弹性力学和其他一些理论中，在边界面 S_2 上可能已知面力密度

$$\boldsymbol{p}_n = p_{nn}\boldsymbol{n} + p_{n\tau}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{f}(M,\ t), \tag{1.6}$$

式中 M 是边界面 S_2 上的点. 条件 (1.6) 给出 S_2 上的 3 个关系式，这类边界条件在各种机器零件的实际工程计算中非常典型. 在研究弹性波或地震波传播的问题时，可以考虑被称为自由面的曲面. 在自由面上的应力能够简单地归结为沿法线 $\boldsymbol{n}$ 作用在该曲面上的大气压，于是得到条件

$$p_{nn} = -p_0, \quad \boldsymbol{p}_{n\tau} = 0, \tag{1.7}$$

式中 p_0 为大气压的值.

形如 (1.6) 或 (1.7) 的边界条件也出现在黏性流体的运动问题中，这时流体的自由面是它与另外一种黏性流体或理想流体的接触面，而后者的所有运动特征量可以认为是已知的.

理想流体中的自由面条件 在理想流体的运动问题中也经常考虑自由面. 按照定义，理想流体条件总是表示 $\boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$，所以条件 (1.7) 对于理想流体中的自由面归结为 1 个等式

$$p = p_0,$$

式中 p_0 为外部介质中的给定压强值. 例如，虽然水面的扰动事先是未知的，但水面上的压强值可以取为大气压. 在实际应用中还有这样的情况，这时自由面上给定的压强不等于大气压，例如，若封闭容器内盛有部分液体，则液体自由面上的压强 p_0 可能是任意的.

要想通过待求的速度分量或位移分量确定边界 S_2 的运动和形状，还需要使用形如 (1.3) 的等式. 这时应当注意，等式 (1.3) 只是把速度沿自由面 S_2 的法向分量联系起来，因为自由面的速度通常定义为自由面沿其法线移动的速度.

在一般情况下需要求解具有混合边界条件的问题, 这时运动介质所占区域的部分边界是给定的外部静止壁面或由固定条件给出的壁面, 部分边界是自由面. 此外, 还可能有部分边界具有其他形式的边界条件, 这时仅仅给出部分边界, 或者所给边界具有更复杂的边界条件, 它们是待求函数之间的某些线性的或非线性的、普通的或微分形式的关系式. 我们将在下面几节和本书第二卷中了解某些复杂的边界条件.

我们在此仅仅指出把边界条件用某些形式表述出来的必要性并阐明其意义, 后面将在流体力学、弹性力学和塑性力学中研究一些具体问题的表述和它们的解 (见第二卷).

§2. 在某些问题的提法中减少独立变量数目的典型简化方法

在欧拉观点下, 求解用来描述运动和其他物理过程的方程的数学问题归结为寻找 x^1, x^2, x^3, t 这 4 个变量的未知函数, 例如速度、压强、温度、密度、电场强度和磁场强度等. 为了解决这个在许多情况下非常困难的数学问题, 需要引入一些与具体物理问题的提法有关的附加假设, 以便在允许的范围内简化其数学提法.

独立自变量的数目较大 (这时是 4 个) 使问题变得非常复杂. 在许多问题中, 保障成功解决问题的重要简化假设关系到如何减少独立自变量的数目, 或者关系到这样的假设: 待求函数对某些变量有完全确定的依赖关系, 并且这些变量取自专门选取出来的具有个别形式的相应坐标系.

定常运动 显然, 尽管不是永远如此, 但是在某些实际允许的情况下, 所研究的那些运动和许多过程在相应坐标系中可以认为是定常的. 在使用欧拉观点时, 这使得独立变量的数目减少 1 个, 因为时间 t 可以被去掉. 定常运动不需要对时间 t 的初始条件, 因为在定常运动的所有方程中都没有对时间的偏导数, 而这通常给数学问题的求解带来简化.

平面运动 如果能够选取这样的笛卡儿坐标系 x, y, z, 使得所有连续介质微元的速度都平行于平面 (x, y), 并且运动和状态的所有特征量都是 x, y 这两个坐标的函数 (还可能是时间 t 的函数), 则连续介质的这种运动称为平面运动. 这时, 介质微元的运动和状态不依赖于坐标 z, 介质平行于平面 (x, y) 运动, 并且在所有平行于平面 (x, y) 的平面中的运动都是相同的.

平面运动假设仅在个别问题中才是可以接受的, 例如, 关于无穷长柱状翼型在流体中沿垂直于母线的方向运动的空气动力学问题, 关于流体表面重力波的某些问题, 等等. 在许多弹性力学问题中可以采用平面运动假设. 例如, 在研究一根长的柱状梁在外载荷作用下的平衡问题时, 如果梁的横截面受到在其平面上任意分布且静力学合力为零的外载荷的作用, 并且该载荷不依赖于纵向坐标, 而固定条件又不允许有纵向位移, 我们就可以采用平面运动假设.

平面运动有效解法的数学理论得到了深入的发展. 即使待求场的平面假设在整

体上不成立, 求解平面运动的数学理论也是许多近似方法的基础.

不可压缩流体的平面有势运动 不可压缩流体的平面运动理论之所以取得了巨大的成功, 是因为有势运动中的速度势 $\varphi(x, y, t)$ 是调和函数:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{2.1}$$

对于调和函数 $\varphi(x, y, t)$, 可以按照柯西一黎曼方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{2.2}$$

定义共轭调和函数 $\psi(x, y, t)$, 即

$$\mathrm{d}\psi(x, y, t)=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}y. \tag{2.3}$$

方程 (2.1) 确保了 (2.3) 的可积条件. 函数 $\psi(x, y, t)$ 称为流函数, 因为按照 (2.3) 和流线方程, 沿任何一条流线都有 $\psi=\mathrm{const.}$

众所周知, 根据柯西一黎曼方程 (2.2) 可以引入复变量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的解析函数

$$w(z, t)=\varphi(x, y, t)+\mathrm{i}\psi(x, y, t),$$

式中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 复变量 z 的函数 w 称为复势[1]. 因此, 求速度势 $\varphi(x, y)$ 的问题可以归结为求复势的问题.

为了解决这个问题, 可以采用一个强大的工具——复变函数论方法. 用这种方法可以解决许多难题, 并进一步深入发展不可压缩流体的平面有势运动理论.

对于定常的平面运动, 只剩下 1 个独立的自变量——复变量 $z=x+\mathrm{i}y$. 这是整个理论的一个非常强的附加假设.

在弹性力学中也发展出了基于复变函数论方法求解平面问题的一些类似方法, 其形式更复杂一些 (见第二卷第十一章).

轴对称运动 具有轴对称性的问题是一类重要问题. 在轴对称问题中假设可以选取圆柱坐标系, 使得待求函数的自变量仅为 r, z 和 t, 而极角坐标 φ 是无关紧要的. 给出解的所有方程和公式在绕 z 轴旋转任意角度后保持不变.

例如, 许多旋转体的强度问题, 诸如关于管道、容器和专用外壳等的问题, 或者关于旋转体在流体中沿对称轴平动或绕对称轴转动的问题, 以及其他许多问题, 就是在连续介质轴对称运动理论的范围内进行研究的.

平面运动和轴对称运动是只有 2 个几何坐标起重要作用的实例.

一维非定常运动 只有 1 个几何坐标 η 起重要作用的运动或过程称为一维运动或一维过程. 当时间 t 也重要时, 上面的术语中就要再加上“非定

[1] 原书将函数 w 称作特征函数 (характеристическая функция). ——译注

常”一词. 可以证明[1], 位移方向垂直于坐标面 $\eta = \text{const}$ 的一维非定常流动只可能有以下 3 种情况.

平面波运动 (1) 平面波运动. 这时可以选取一个笛卡儿坐标系, 使得重要的独立自变量仅为坐标 x (后面可能使用记号 $x = r$) 和时间 t. 在这种运动中, 所有运动特征量在平面 $x = \text{const}$ (波的相平面) 上都相同, 即待求的运动和过程特征量对 y 和 z 的所有导数都等于零.

柱面波运动 (2) 柱面波运动. 这时可以选取一个圆柱坐标系, 使得重要的独立自变量仅为到对称轴的距离 r 和时间 t. 在这种运动中, 所有运动特征量在柱面 $r = \text{const}$ (波的相曲面) 上都相同, 即待求量对 z 和极角 φ 的所有导数都为零.

球面波运动 (3) 球面波运动. 这时可以选取一个圆球坐标系, 使得重要的独立自变量仅为到对称中心的距离 r 和时间 t. 在这种运动中, 所有运动特征量在球面 $r = \text{const}$ (波的相曲面) 上都相同, 即待求量对极角 θ 和经度 λ 的所有导数都等于零.

许多重要的理论和应用问题是在一维运动的范围内进行研究的, 例如光波和声波传播理论, 爆炸波理论和爆轰理论.

这样, 上述简化可以减少 1 个、2 个甚至 3 个独立的自变量 (在一维定常运动中只有 1 个自变量 r 是重要的, 而在零维非定常运动中只有 1 个自变量 t 是重要的).

自相似运动 在一些解中, 只有独立自变量的某些组合是重要的, 而这就相当于减少了待求函数自变量的数目. 这样的解具有重要意义, 例如自相似运动. 在自相似运动中, 可以只引入 3 个重要的独立自变量

$$\frac{x}{t^\alpha},\ \frac{y}{t^\alpha},\ \frac{z}{t^\alpha},$$

式中 α 为某个常数.

在一维非定常自相似运动中, 可以引入仅仅 1 个自变量

$$\lambda = \frac{r}{t^\alpha}$$

来代替 r 和 t 这 2 个变量. 显然, 对 r 和 t 的偏微分方程这时变换为常微分方程, 其中只有 1 个独立的自变量 λ.

我们将在后面看到, 利用量纲分析可以从问题的提法出发直接证明待求函数具有自相似性. 为此甚至不需要写出运动方程和边界条件, 只要知道这些方程和边界条件所包含的参量和特征量即可. 如果采用这种方法, 在某些情况下可以预先概括现象并使用上述简化提出问题, 例如, 可以把待求的解表示为自相似解. 自相似性是一个解的很有价值的性质, 因为单从偏微分方程化为常微分方程的理论来说, 这已经是巨大的成就, 它使问题的数值解能够用一些更简单的方法得出.

---

[1] 参见: Lipshcitz. Z. reine angew. Math. 1887, 100: 89. 还参见: Любимов Г. А. О возможных видах одномерных неустановившихся движений вязкого газа. Теоретическая гидромеханика: Сборник статей No. 19, вып. 7. Москва: Оборонгиз, 1956. С. 132.

§3. 连续介质力学方程和问题的线性化

连续介质力学问题的非线性性质　连续介质力学的基本方程一般是非线性方程. 连续介质力学问题之所以是非线性的, 是因为待求函数一般以非线性的方式出现在方程和边界条件中. 例如, 在欧拉方程中含有乘积 $u^i\dfrac{\partial u^k}{\partial x^i}$ (在加速度的表达式中), 而在可压缩介质的运动中, 上述方程在密度和压强变化较大时还含有非线性项 $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x^k}$.

麦克斯韦方程对真空中的场是线性的; 当电磁场与介质发生相互作用时, 非线性会因为考虑复杂情况下的欧姆定律、极化定律和磁化定律而出现.

基本方程的非线性还关系到许多特殊的物理效应, 这些效应一般具有重大的应用价值. 非线性给所关心的问题的数学研究方法和解决带来极大的困难.

平衡状态或基本运动的小扰动　在某些连续介质力学问题中, 所研究的运动和过程是某些平衡状态或基本运动的小扰动. 例如, 弹性体 (各种机器和结构的零件) 中的变形经常很小, 应变张量的分量在笛卡儿坐标系中是无量纲的数, 其量级不到百分之一. 因此, 无穷小变形的线性理论得到了大范围的推广. 在线性理论中, 小量的乘积均被忽略.

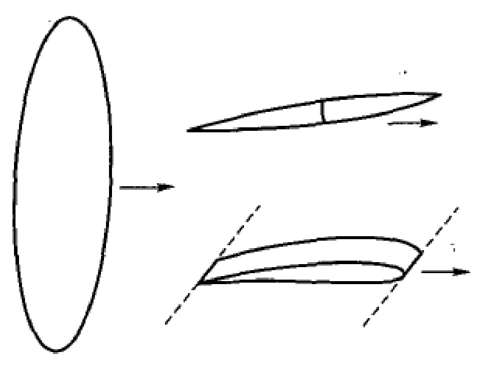


图 43. 薄翼和旋转体的运动

在液体表面重力波理论中经常研究小振幅水波运动, 这时自由面与静止时的水平面相差很小, 物质点的绝对速度和相应位移值也很小.

在空气动力学中经常研究各种各样的细长体 (薄翼、导弹等) 在空气中沿其基本尺度方向的运动 (图 43). 当飞行速度与细长体表面的夹角很小时, 这种运动在空气主体中引起的扰动速度也很小, 扰动速度正比于飞行速度与上述夹角的乘积.

还可以列出许多类似的例子. 一般而言, 关于位移、速度、密度、压强、温度、电磁场特征量等待求函数的扰动值很小的上述结论并不严格, 在流动区域中个别小的部位甚至是错误的. 不过, 在对应用重要的主要流动区域中, 这些假设在许多情况下被证明是正确的.

当然, 也存在一些重要的情况, 这时假设待求函数很小是完全不能接受的, 必须考虑极为重要的非线性效应.

问题的线性化　如果假设待求函数很小是可以接受的, 在连续介质力学问题的提法中就能够进行线性化, 从而带来以下重要简化.

方程的线性化　(1) 因为只保留待求函数的一阶小量, 所以所有的方程, 包括动力学方程、诸如状态方程的附加关系式以及表示初始条件和边界条件的关系式等, 都在忽略高于一阶的小量之后写为线性方程的形式.

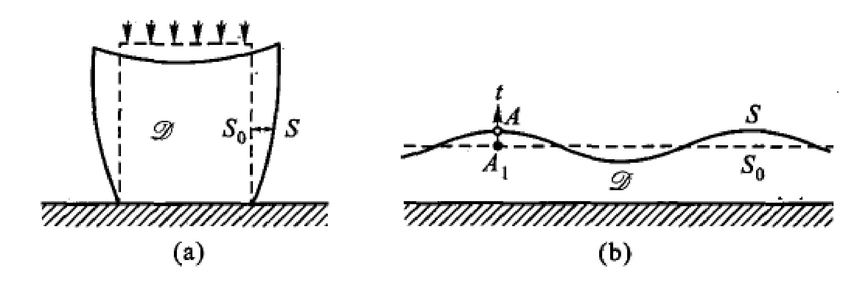


图 44. 边界条件的线性化. (a) 受分布力作用的底部固定的弹性柱. (b) 小振幅波理论

边界条件的线性化 (2) 假设区域 $\mathscr{D}$ 的边界 S 相对于未变形区域 $\mathscr{D}_0$ 的边界 S_0 只有很小的变形, 于是变形后的边界 S 上的条件可以沿 S_0 的法线方向转换为未变形边界 S_0 上的条件.

因此, 待求函数就是已知区域 $\mathscr{D}_0$ 中的线性方程组的解, 其边界条件也是已知边界面 S_0 上的线性条件. 在扰动的一阶近似边值问题的解求出之后, 按照所得函数就可以确定发生变形的边界 S.

例如, 要想求出弹性体物质点的位移对坐标的函数, 就要求解未变形状态所对应的区域中的线性方程, 其边界条件是未变形边界上的线性条件; 在求出位移之后即可计算出小应变, 进而在一阶近似下确定发生变形的边界的形状. 作为一个个别的例子, 考虑底部固定的弹性柱在分布力作用下的小变形问题, 此时边界条件可以通过弹性柱的未变形边界面 S_0 写出 (图 44(a)).

在小振幅液体表面重力波理论中, 自由面 S 上的条件 (压强不变条件) 可以转换为液体静止时的水平液面 S_0 上的条件 (图 44(b)). 在求出线性化的速度场后, 按照速度在水平面 S_0 上的值可以计算出自由面上的点的位移, 从而精确到到一阶小量求出波动自由面的形状.

在线性空气动力学中, 扰动气流所占据的复杂区域 $\mathscr{D}$ 的边界是薄翼表面, 此边界可以替换为假设与薄翼形状接近的一块平板的外表面, 而薄翼表面的绕流边界条件在只保留一阶小量的条件下可以转移到平板的不同侧面上. 此后即可研究流体在无界空间中的运动, 平板边界则表示为压强和速度的间断面. 压强间断与薄翼作用于流体的外面力平衡, 该面力在近似表述中是平板对流体的作用力. 因此, 薄翼对应着间断面; 在研究具有速度间断面的无界流体的运动时, 必须引入外面力.

在问题的精确的非线性提法中, 也可以通过引入间断面和作用于翼型表面的外面力的方法将翼型内部替换为流体.

线性提法是弹性力学小变形理论的基础, 该理论为工程问题中的大量计算方法奠定了基础.

在空气动力学中, 除了线性理论, 非线性理论也得到了广泛的发展, 因为气流中的扰动在许多情况下不能认为是小量.

液体表面重力波理论、许多电动力学问题以及其他一些物理学领域是在问题的

线性提法范围内发展起来的. 对于有限振幅的液体表面重力波, 在待求的自由面上应当成立非线性边界条件, 所以在这种复杂的数学理论中仅有不多的问题被研究过.

解的可加性 线性微分方程具有一个极好的性质: 解具有可加性, 即若干个特解之和也是方程的解. 显然, 非线性方程的特解之和不是方程的解. 如果把特解组成有限和、级数或积分, 就可以构造出线性连续介质力学方程的解, 其中含有一些任意的函数和常数; 适当选取这些函数和常数, 即可满足所提问题中的初始条件和其他一些条件. 下面用实例来说明这种方法.

驻波 若在线性方程组中含有待求函数对时间 t 的偏导数, 并且其系数不依赖于 t, 则以下形式的特解具有重要价值:

$$F = \text{Real}\left[g(x,\ y,\ z,\ \omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right], \tag{3.1}$$

式中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, 常数 $\omega=\omega_1+\mathrm{i}\omega_2$ 一般是复数, F 是待求函数. 公式 (3.1) 给出了函数 F 的值对时间的依赖关系, 复函数 $g(x,\ y,\ z,\ \omega)$ 表征振幅和相位对空间点的分布.

这些函数与“频率” ω 有关. 曲面 $\arg(g)=\text{const}$ 称为相曲面. $|g|=0$ 的曲面称为波节, $|g|$ 取极大值的曲面称为波腹. 振动 (3.1) 称为驻波. 对于驻波振动, 通常认为在区域 $\mathscr{D}$ 中有波节.

在应用中通常研究相位在空间中的所有点都相同的驻波振动.

在某些情况下, 例如在边界 S 的一些点被固定时, 边界条件归结为要求边界等同于波节; 在其他一些情况下, 自由面条件可能归结为要求边界各部分等同于波腹. 一般而言, 边界条件对频率 ω 的可能取值是有限制的. 如果 $\omega=\omega_1$ 是实数, 则待求函数对时间的依赖关系 (3.1) 是不同振幅的简谐振动, 其相位对不同点和不同值一般会发生移动. 当等式 (3.1) 成立时, 问题化为求解函数 $g(x,\ y,\ z,\ \omega)$ 和频率 ω. 在 $\omega_2<0$ 时振幅增长, 在 $\omega_2>0$ 时振幅衰减.

对于线性方程, 利用傅里叶方法可以构造出更一般的通解, 它们是由形如 (3.1) 的驻波振动叠加起来组成的, 其中的 ω 各不相同, 并且 ω 在一些问题中取某些离散值, 而在另一些问题中组成连续的集合.

行波 线性方程的另一类特解是不衰减的行波, 其形式如下:

$$F(x,\ y,\ z,\ k,\ \omega,\ t) = \text{Real}\left[g(x,\ y,\ z,\ \omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\right], \tag{3.2}$$

式中 k 和 ω 是实常数, g 是某个复函数. 在一般情况下允许 ω 和 k 在某一范围内取值, 并且量 k 能够通过 ω 求出. 解 (3.2) 对应着待求函数对坐标 x 和时间 t 的周期分布——具有各种相位的正弦波.

函数 F 的固定值以速度 $a=\omega/k$ 沿 x 轴传播, 这就是行波, 在所给情况下是正弦波, 而量 a 称为波速.

如果量 a 对不同 ω 和 k 是不同的, 即 $a(k)\neq\text{const}$, 波就会发生色散: 不同波长

的波以不同波速传播.

对于沿矢量 $\boldsymbol{\varkappa} = \varkappa_1 \boldsymbol{i} + \varkappa_2 \boldsymbol{j} + \varkappa_3 \boldsymbol{k}$ 的方向传播的平面正弦行波, 成立公式

$$F = \text{Real}\left[A e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}\right],$$

式中 A 是常数, $\boldsymbol{r}$ 是径矢. 此时, 波速由公式 $a = \omega/|\boldsymbol{\varkappa}|$ 确定.

在一般情况下, 相曲面是平面的非正弦行波解具有以下形式:

$$F = f(\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t).$$

如果 $\boldsymbol{\varkappa}$ 和 ω 分别是常矢量和常数, 则平面波沿矢量 $\boldsymbol{\varkappa}$ 的方向像刚体一样传播; 如果 $\boldsymbol{\varkappa}$ 和 ω 是物质微元状态的函数, 则不同状态以不同速度传播, 所以在 f 对坐标的关系图中, 波的形状会发生变化.

利用特殊变量进行线性化 在某些个别情况下, 可以利用专门选取的新的变量在不作任何近似的条件下把非线性方程变换为线性方程. 这类线性化方法出现于气体的定常正压平面有势运动理论[1].

§4. 强间断面条件

连续介质力学中的间断面 到目前为止, 在引入基本概念和建立连续介质模型的相关方程组时一直假设, 我们给出的和需要求出的函数在介质所占区域 $\mathscr{D}$ 中应成立相应方程的那些点是连续的, 并且具有所需阶数的连续导数. 这个假设是一个非常强的限制条件, 它在许多重要的实际应用中是不可接受的.

其实, 例如在研究由理想液体和浸没在其中的弹性体组成的系统的振动的时候, 必须考虑运动的性质和特征量大不相同的两种连续介质之间的相互作用. 在这两种介质的分界面上, 诸如密度、速度、位移等状态和运动特征量可能根本就是坐标的间断函数.

在研究液体和弹性体的连续运动的这个例子中, 液体和弹性体的分界面可以视为间断面, 并且必须在间断面上提出待求函数的一些专门的条件, 其作用相当于一般事先未知的运动边界上的边界条件. 我们在本章 §1 中介绍了一个类似的简单条件. 在一般情况下, 间断面上的这类条件可能具有更复杂的本质, 例如当冰融化或水结冰时在冰与水的相互作用面上的条件, 或者当火药在空气中燃烧时在空气与燃烧产物的相互作用面上的条件.

[1] Риман Б. Распространение волн конечной амплитуды. Соч. Москва: Гостехиздат, 1948 (Riemann B. Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Gesammelte mathematische Werke. New York: Dover, 1963). Molenbrock P. Archiv Mathem. und Physik, Ser. 2, 1890, Vol. 9. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Собр. соч., т. 2. Москва: Гостехиздат, 1948.

除了间断面两侧的介质模型不同的情况, 还必须考虑密度、速度、压强、熵等量的这样的间断面, 其两侧的连续介质具有相同的模型 (例如理想完全气体模型).

在理想完全气体动力学的许多问题中和其他许多情况下, 如果要求待求的解在介质所占区域 $\mathscr{D}$ 中对坐标连续, 就会得出问题无解的结论. 如果不再要求待求的解连续并假设它是分段光滑的, 就可以在问题的相应提法下保证解的存在性和唯一性, 并且所得间断解能够很好地与实际观察到的真实效应相对应.

原来, 间断面作为单独的曲面将运动区域划分为过程连续的一系列区域, 而间断面两侧的运动和状态特征量应当满足某些普适关系式. 我们在这里先给出推导这样的关系式的一些一般方法, 然后再真正建立起这些关系式.

下面推导间断面条件的基础是先假设间断面存在, 至于在具体的解中是否真的存在间断面, 这是一个专门的问题, 它关系到所用模型的性质和所研究的具体问题的数学特性.

为了简化问题并得出有效的解, 在近似解法中同样可以考虑间断解, 即使连续解也是存在的.

把间断运动当作不同复杂模型中的连续运动的极限

尽管在实践中经常考虑具有间断面的连续介质运动, 而且这样的方法和间断解被证实是富有成效的, 仍然普遍存在一种观点认为, 在连续介质力学的范围内描述实际现象时可以只考虑连续运动, 并且一般也应当只考虑连续运动. 当连续解不存在或从某一时刻起不再存在时, 为了得到连续解, 必须使用另一个更复杂的模型, 必须在运动方程中引入一些附加项和关系式, 以便考虑区域 $\mathscr{D}$ 内部一些薄层中或区域边界上的耗散效应, 这些效应是因为速度、温度、密度、压强等的分布具有极大的梯度而产生的.

例如, 可以举出这样一些实例, 这时在理想完全气体模型的范围内对使用欧拉方程的问题提法没有连续解, 但是在黏性气体的范围内从纳维－斯托克斯运动方程可以得出连续解, 这个解的运动和状态参量在一些薄层中有极大变化.

间断的结构

复杂模型中的连续解对应着简单模型中的间断, 所以对连续解的研究可以用来确定间断的结构. 解的存在性和唯一性, 以及关于间断结构的问题的实际解决方法, 都与复杂模型的引入方法有关. 当待求函数的数目很大或者描述过程的非线性方程的数目很大时, 关于间断结构的问题一般是一个困难的数学问题.

放弃连续运动理论却采用间断解理论的基础是如下假设: 在所给简单模型中得出的间断解, 能够表示为同一个问题在一系列复杂模型中的连续解在复杂模型运动方程中的系数连续地趋于简化模型运动方程中的系数时的极限. 例如, 黏性气体的纳维－斯托克斯方程在黏度趋于零时转化为理想气体的欧拉方程.

相应解的极限的存在性和唯一性问题是一个复杂的数学问题, 因为实际通常不能有效地求出一系列这样的解.

复杂模型是由复杂的高阶偏微分方程描述的, 并且方程的高阶导数项的系数在上述极限过程中趋于零. 例如, 从黏性流体方程到理想流体方程的转化就是如此.

为了从具有间断解的给定模型转换到具有连续解的复杂模型, 可以通过不同方法引入复杂模型, 可以采用各种耗散定律和非线性黏性模型, 等等. 由此产生的问题是: 极限过程是否独立于辅助的复杂模型的引入方法呢?

把间断解当作一个固定模型中的连续解的极限

在一个固定模型的范围内, 如果一些特别的方程组具有趋于给定间断解的连续解序列, 则上述问题的解决会容易一些. 对于某些线性偏微分方程组可能出现这样的情况. 不过, 即使方程组是线性的, 也并非总是如此. 这是因为, 即使连续运动是可逆的, 具有间断的运动一般也是不可逆的, 其特征是机械能的有限的损耗.

例如, 对于非线性的气体力学方程, 在绝热过程中一般不存在这样的连续解序列, 其极限趋于所研究的绝热不可逆间断解.

把间断解当作具有适当外部作用的连续解的极限

还可以用以下方法得出极限过程下的间断运动和相应间断条件. 如果在一些薄层中的运动是连续的, 但是运动特征量的变化极大, 就可以在所给方程组中引入恰当的外质量力、外部热流和其他形式的外部能量流, 并研究一系列连续运动. 然后取极限, 使表征外部作用的特征量之和或者趋于零, 或者根据所研究问题的含义 (空气动力学中的升力面, 薄层内发生燃烧或某种其他化学反应时的放热面, 等等) 使之具有与间断的性质有关的给定值.

因此, 根据给定模型的过程方程, 或者根据 “相近” 模型的更复杂的方程组, 或者利用人工引入的外部作用, 每次再通过某些明确表述出来的或隐含的附加假设, 一般可以作为连续运动的极限引入具有间断的运动, 并得出间断条件.

研究间断解的合理性

为了说明关于连续解与间断解之间的关系的问题有何意义, 考虑下面这个不太寻常的问题. 设一位客人正在举杯示意, 他手中的酒杯中盛有加冰块的葡萄酒, 于是酒杯、酒和漂浮在其表面的冰块就组成一个力学系统. 在研究这个力学系统的运动问题时, 把酒杯的表面以及冰与酒的分界面看作物质密度的间断面显然是合理的. 这时, 即使在连续介质理论的范围内进行非常细致的力学研究, 也未必需要引入密度连续变化的一些薄层, 尽管并不能完全排除类似的处理.

对于这个例子和其他许多 “对实际应用更重要的” 情况 (关于酒杯的问题可以替换为一个更加迫切的问题: 关于火箭在太空中飞行时火箭燃料箱中的燃料和气体运动的问题), 只能从非常理论的观点来谈论连续解, 并把连续解当作得到间断面上的各种判据和附加关系式的出发点, 或者把连续解当作估计实际计算出来的间断解的真实性和可用性的基础. 我们已经利用连续介质内部和边界上的间断面实际解决了一系列问题, 但是假如我们仅仅停留在复杂理论的范围内, 认为运动和状态的参量在一些薄层中剧烈但连续地变化, 上述成功就无从谈起.

积分定律对定义模型的作用 当基本物理方程表述为积分形式时, 在本质上并不要求待求函数连续, 所以不再需要上述类型的极限过程. 在连续过程的情况下, 物理定律的积分表述等价于微分表述, 但在间断过程的情况下, 积分表述是更一般的表述.

对于给定的微分方程组, 可以对介质的任意物质体写出各种积分关系式, 并且当运动连续时, 这些积分关系式是彼此等价的, 也等价于该微分方程组. 对于具有强间断面的运动, 这样的积分关系式可能并不等价. 积分定律对介质内部的连续过程和有强间断面的过程都成立, 其选择关系到用来定义模型的附加的物理化学假设, 这些假设的可用性应当通过实验来检验.

特别地, 在积分关系式中一般必须扩展可逆或不可逆模型的范围, 例如, 要考虑间断面上额外的能量释放, 物质点在穿过强间断面时的熵增, 还要考虑表面电流或表面电荷的存在.

附加的间断条件 对上述结果还必须补充一些关于强间断面稳定性的讨论. 其实, 尽管下面建立起来的包括熵增条件在内的所有间断面条件能够在某些强间断面上成立, 但是仍然存在一些由于本身不稳定而不能实现的间断面. 间断面的类型和描述间断面两侧连续运动的微分方程组的性质是导致不稳定性的原因.

还需要注意的是, 在使用物理上允许的间断 (稳定并且满足力学和热力学的普适间断条件) 时, 为了保证唯一性和待求解真正对应实际情况, 需要在间断面上建立具有物理本质的附加关系式.

目前, 在磁流体力学中[1] 和复杂连续介质模型的一般数学理论中[2] 正在研究上述间断面稳定性条件和附加物理关系式. 在完全气体模型的间断理论中没有出现这些问题.

在分段光滑函数集合中求解问题 要想在分段光滑函数集合上求解积分形式的方程, 只要考虑间断面上确定的熵增条件和其他一些附加条件, 从问题的提法一般就可以自动得到间断解. 为了构造出微分方程组的分段光滑解, 可以利用相应积分关系式来推广这些方程, 由此发展起来一种广义解理论, 其研究对象是数学物理方程一般理论中的线性微分方程.

如果物理学问题和力学问题是利用变分方程表述出来的, 则由此也可以建立分

[1] Куликовский А. Г., Любимов Г. А. О магнитогидродинамических ударных волнах, ионизирующих газ. ДАН СССР, 1959, 129(1): 52—55 (Kulikovskii A. G., Lyubimov G. A. Gas-ionizing magnetohydrodynamic shock waves. Sov. Phys. Dokl., 1960, 4: 1185). Бармин А. А., Куликовский А. Г. Об ударных волнах, ионизирующих газ, находящийся в электромагнитном поле. ДАН СССР, 1968, 178(1) (Barmin A. A., Kulikovskii A. G. Shock waves of ionized gases in an electromagnetic field. Sov. Phys. Dokl., 1968, 13: 4).

[2] Куликовский А. Г. О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами: Волны рекомбинации в магнитной гидродинамике. ПММ, 1968, 32(6): 1125—1131 (Kulikovskii A. G. Surfaces of discontinuity separating two perfect media of different properties. Recombination waves in magnetohydrodynamics. J. Appl. Math. Mech., 1968, 32(6): 1145—1152).

段光滑解理论并使其得到自然的发展 (见附录二, 373 页).

弱间断和强间断 存在两种间断——弱间断和强间断. 若待求函数在一个曲面上连续, 但函数对坐标和时间的某种导数在该曲面上发生间断, 我们就把这个曲面称为弱间断面; 若待求函数本身在一个曲面上发生间断, 我们就把这个曲面称为强间断面.

我们将在下面研究强间断面条件. 能够引入强间断面的几种情况是: 间断面是给定的, 其运动规律也以外部约束的形式给定; 间断面可以视为给定的或待求的力和其他外部作用的载体; 间断面是没有外部作用的待求曲面, 其形状和运动事先未知, 一般应当在问题的求解过程中求出.

间断面上的点的速度 考虑一个运动的曲面 S, 其方程的形式为

$$f(x,\ y,\ z,\ t)=0. \tag{4.1}$$

由于运动, 曲面 S 在不同时刻 t 和 $t+\Delta t$ 分别位于不同位置 S 和 S' (图 45). 在时刻 t, 在 S 上取某一点 M, 并假设在点 M 对于 S 存在确定的法线[1]. 在曲面 S 上的点 M, 令单位法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向与矢量 $\overline{MN}$ 的方向一致, 其中的点 N 是曲面 S 在点 M 的法线与 S' 的交点. 我们用条件

$$f(M,\ t)=0,\quad f(N,\ t)>0$$

来定义函数 $f(x,\ y,\ z,\ t)$ 的符号, 所以

$$\boldsymbol{n}=\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}.$$

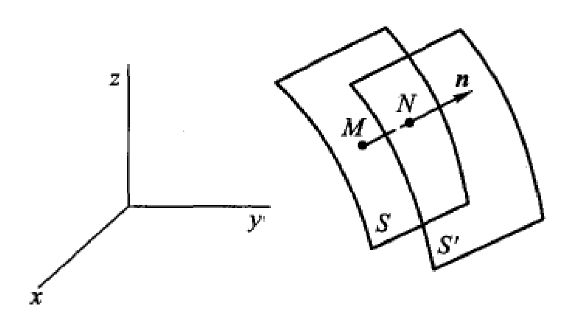


图 45. 用于定义间断面上的点的速度

曲面 S 在空间中移动, 它在点 M 的移动速度是指通过以下极限定义的垂直于 S 的矢量 $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D}=\boldsymbol{n}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{MN}{\Delta t}. \tag{4.2}$$

如果曲面 S 的方程 (4.1) 是给定的, 就容易计算矢量 $\mathscr{D}$. 其实, 用

$$n_x=\frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\frac{\partial f}{\partial x},\quad n_y=\frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\frac{\partial f}{\partial y},\quad n_z=\frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\frac{\partial f}{\partial z}$$

表示单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的分量, 可以写出

$$f(x+MNn_x,\ y+MNn_y,\ z+MNn_z,\ t+\Delta t)=0.$$

忽略高阶小量, 由此可得

$$MN\left(\frac{\partial f}{\partial x}n_x+\frac{\partial f}{\partial y}n_y+\frac{\partial f}{\partial z}n_z\right)+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t=0,$$

[1] 如果在 S 的每一点都可以单值地定义矢量 $\operatorname{grad} f$, 对于 S 上的点就存在确定的法线. 我们以后不考虑曲面 S 具有尖点和其他奇异性的情况.

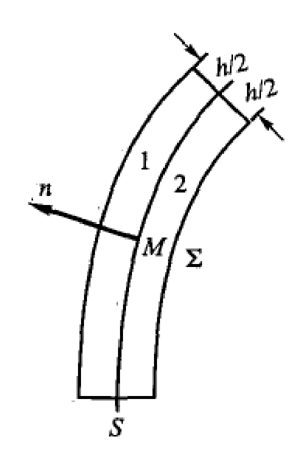


图 46. 间断面 S 和封闭曲面 Σ 的示意图

或

$$MN|\operatorname{grad} f| + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t = 0.$$

因此, 由定义 (4.2) 得出

$$\mathscr{D} = -\frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\frac{\partial f}{\partial t}\boldsymbol{n}.$$

显然, 如果方程 (4.1) 中的函数 f 与时间无关, 则在曲面 S 上的每一点 M 都有 $\mathscr{D}=0$. 在变换到不同的运动坐标系时, 移动速度矢量 $\mathscr{D}$ 依赖于坐标系的选取.

对于曲面 S 的每一点 M, 可以指定其"固有"坐标系, 即在给定时刻使点 M 的移动速度 $\mathscr{D}$ 等于零的参考系 K^*. 这里的"固有"一词带有引号, 因为我们在前面曾经把固有坐标系定义为使介质中所研究的物质点的速度等于零的惯性系. 在这种含义下, 在速度间断面 S 的两侧可得不同的固有坐标系, 因为介质物质点的速度在 S 的两侧一般是不同的.

坐标系的选取

现在开始建立强间断面条件. 设介质的状态和运动特征量在 (具有确定法线的) 光滑曲面 S 上发生间断. 取 S 上的 (任意) 某一点 M. 因为所有力学方程、热力学方程、电动力学方程乃至一般的物理学方程在任何惯性坐标系中具有不变的形式, 所以可以选取"固有"坐标系 K^* 作为参考系来推导点 M 的间断条件. 在这个坐标系中, 间断面的给定点在给定时刻的移动速度 $\mathscr{D}$ 的值等于零, $\mathscr{D}=0$.

选取向间断面收缩的控制体 V

对于孤立的间断面 S 的某一部分, 我们用下述方法引入一个控制体[1], 其边界是封闭曲面 Σ. 在间断面 S 的选定部分的每一点, 沿法线方向在 S 的两侧分别取长度为 $h/2$ 的线段, 其中 h 是一个很小的不变的长度. 在这一部分曲面的所有点都作出的这样的线段, 其集合在给定时刻就组成了边界为 Σ 的相应控制体 V (图 46).

现在, 在所取参考系 K^* 中考虑两个几何体: 一个是上面定义的静止控制体 V, 另一个是与介质的物质点相关的运动的物质体 V^*, 并且这两个几何体在所研究的时刻 t 是相同的. 在下一时刻 $t+\mathrm{d}t$, 物质体 V^* 相对于它在时刻 t 的形态 V 发生运动, 间断面 S 也在控制体 V 内发生移动, 但是所研究的点 M 的位置在无穷小时间[2] $\mathrm{d}t$ 内保持不变, 因为点 M 在参考系 K^* 中的速度在时刻 t 等于零. 根据定义, 控制体 V 在参考系 K^* 中静止, 而物质体 V^* 一般是运动的, 并且只有在位于间断面 Σ 上的介质物质点相对于参考系 K^* 静止时, 物质体 V^* 才是静止的.

---

[1] 俄文 объем 一词在这里被译为控制体, 其定义见 17 页的脚注. ——译注

[2] 在狭义相对论中, 时间的无穷小增量 $\mathrm{d}t$ 应取自参考系 K^*, 而在牛顿力学中, 增量 $\mathrm{d}t$ 不依赖于惯性坐标系的选取. 所有下面的讨论, 包括对速度合成法则的应用, 都是在牛顿力学的范围内进行的.

由第二章公式 (8.10) 可知, 对于任何可积的分段光滑函数 $A(x, y, z, t)$, 在参考系 K^* 中都成立以下等式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V^*} A\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V} A\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_{\Sigma} Av_n\,\mathrm{d}\sigma,$$

式中 v_n 是介质物质点相对于 K^* 的速度在 Σ 的外法线上的投影.

物质体积分的导数在物质体向间断面收缩时的极限

如果控制体 V 在参考系 K^* 中静止, 其内部的间断面 S 也静止, 则对控制体 V 的积分求导, 可以写出

$$I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V} A\,\mathrm{d}\tau = h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{S} A^*\mathrm{d}\sigma,$$

式中 A^* 为函数 A 在长度为 h 并且垂直于间断面 S 的相应线段上的平均值.

显然, 如果间断面 S 静止, 而 A 的值不显式地依赖于时间, 则 $I=0$. 在非定常运动的情况下, 如果函数 A 在静止间断面 S 的两侧分别是有界的和连续的, 并且它对坐标和时间的导数也同样是有界的和连续的 (在 S 上可能有间断), 则量 I 是 t 的连续函数, 它在量 h 趋于零时也趋于零.

参考系 K^* 的选取是由成立于点 M 的条件 $\mathscr{D}=0$ 决定的, 而间断面 S 上的相邻点的移动速度 $\mathscr{D}\neq 0$, 所以间断面 S 一般是 V 内部的运动曲面. 对于间断面 S 在点 M 附近的微元, 相邻点的移动速度 $\mathscr{D}$ 是无穷小的, 所以当控制体 V 向点 M 收缩时, 我们得到

$$\lim_{\substack{\Delta\sigma\to 0\\ h\to 0}} \frac{1}{\Delta\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V} A\,\mathrm{d}\tau = 0,$$

式中 $\Delta\sigma$ 是间断面 S 上的向点 M 收缩的面微元.

我们将用下标 1 表示间断面 S 一侧的运动和状态特征量, 用下标 2 表示另一侧的特征量, 并按照这样的条件来给 S 两侧的编号, 使得法线的方向是从 2 指向 1.

在 $h\to 0$, $\Delta\sigma\to 0$ 时取极限, 显然得

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \Delta\sigma\to 0}} \frac{1}{\Delta\sigma}\int\limits_{\Sigma} Av_n\,\mathrm{d}\sigma = A_1v_{n1} - A_2v_{n2},$$

式中 v_{n1} 和 v_{n2} 是间断面 S 两侧介质物质点的速度在 S 的同一条正方向法线上的投影.

因此, 我们有等式

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \Delta\sigma\to 0}} \frac{1}{\Delta\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V^*} A\,\mathrm{d}\tau = A_1v_{n1} - A_2v_{n2}. \tag{4.3}$$

利用等式 (4.3), 可以在参考系 K^* 中写出物质介质强间断面上的所有普适的动力学条件和热力学条件. 电磁场的间断面条件将在后面进行研究.

普适的力学方程和热力学方程 为方便起见, 我们在这里先写出前面得到的积分形式的基本方程.

1. 连续性方程 (第三章方程 (1.2))

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V^*}\rho\,\mathrm{d}\tau=0. \tag{4.4}$$

2. 动量方程 (第三章方程 (2.2))

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V^*}\boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}\tau=\int_{V}\boldsymbol{F}\rho\,\mathrm{d}\tau+\int_{\Sigma}\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma. \tag{4.5}$$

3. 动量矩方程 (第三章方程 (3.3))

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V^*}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}\tau+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V^*}\boldsymbol{k}\rho\,\mathrm{d}\tau=\int_{V}\boldsymbol{h}\rho\,\mathrm{d}\tau+\int_{\Sigma}\boldsymbol{Q}_n\,\mathrm{d}\sigma+\int_{V}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\rho\,\mathrm{d}\tau+\int_{\Sigma}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma. \tag{4.6}$$

4. 能量方程 (第五章方程 (8.1))

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V^*}\rho\left(\frac{v^2}{2}+U\right)\mathrm{d}\tau=\int_{V}\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau+\int_{\Sigma}\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma-\int_{\Sigma}q_n^*\,\mathrm{d}\sigma+\int_{V}\frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{mass}}^*}{\mathrm{d}t}\rho\,\mathrm{d}\tau, \tag{4.7}$$

式中 $\boldsymbol{q}^*$ 是通过边界面 Σ 的附加的外部能量流, 其中既包括热流, 也包括热流之外的能量流 (含面力偶的功等); $\mathrm{d}q_{\mathrm{mass}}^*/\mathrm{d}t$ 是单位质量介质所接受的全部附加能量流, 这是因为按质量分布的能量源在单位时间内释放能量造成的. 附加能量流是相对于机械能流而言的, 机械能流就是方程 (4.7) 右侧的前两项, 它们等于动量方程中的宏观质量力和面力的功率.

我们在这里和后面只考虑一些常用的模型, 其中内能 U 和熵 S 是可按质量叠加的函数.

5. 得自热力学第二定律的熵方程可以写为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V^*}s\rho\,\mathrm{d}\tau=\int_{V}\frac{\rho}{T}\left(\frac{\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\tau,\quad\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t}\geqslant 0. \tag{4.8}$$

对于可逆过程模型, 在连续运动区域中有 $\mathrm{d}q'=0$. 然而, 正如前面所指出的, 在研究运动特征量发生强烈变化的强间断时, 关于该现象可逆的假设与方程 (4.8) 所表示的热力学第二定律矛盾. 在一般情况下, 不能事先认为在介质物质点通过间断面时 $\mathrm{d}q'=0$.

当 $\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}$ 给定时, 例如在绝热过程中, 可以利用方程 (4.8) 来计算 (4.8) 右侧的体积分之和, 该表达式在控制体 V 无限收缩时具有有限值.

现在, 我们对包含有间断面 S 的上述物质体 V^* 应用方程 (4.4)—(4.8), 然后用 S 的面微元 $\Delta\sigma$ 除方程 (4.4)—(4.8) 的左右两侧, 以便在间断面 S 上的点 M 使用公式 (4.3).

外部作用在间断面上的面密度

我们将在以下假设下给出间断面条件.

1. 对于沿 Σ 的面积分, 所有被积函数在 Σ 收缩至 S 时都具有有限值, 但这些值在 S 的两侧一般是不同的.

2. 在 $h \to 0$ 时成立以下极限等式:

$$\lim_{h\to 0}\int_V \rho\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\tau = \int_S \boldsymbol{R}\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$\lim_{h\to 0}\int_V \rho\boldsymbol{h}\,\mathrm{d}\tau = \int_S \boldsymbol{\mathcal{M}}\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$\lim_{h\to 0}\int_V \left(\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} + \rho\frac{\mathrm{d}q^*_{\text{mass}}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\tau = \int_S W\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$\lim_{h\to 0}\int_V \frac{\rho}{T}\left(\frac{\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\tau = \int_S \Omega\,\mathrm{d}\sigma,$$

式中 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 和 W 是介质的相应外力、外力矩和外部能量流在 S 上的面密度, 量 Ω 则给出外部热流所导致的熵变化和穿过间断这种不可逆过程所导致的熵增在 S 上的面密度.

显然, 如果 $\rho\boldsymbol{F}$, $\rho\boldsymbol{h}$ 和 $\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} + \rho\,\mathrm{d}q^*_{\text{mass}}/\mathrm{d}t$ 在控制体 V 内是有限的, 则

$$\boldsymbol{R} = 0, \quad \boldsymbol{\mathcal{M}} = 0, \quad W = 0. \tag{4.9}$$

这些等式成立的情况包括: 外质量力是重力; 在研究相对运动时, 外质量力是惯性力; 一般对于任何连续的质量力场, 例如当电磁场在间断面 S 上连续时, 作用于介质的有质动力、有质动力矩和电磁场所导致的能量流 (见第六章方程 (5.16), (5.36) 和 (5.21)).

如果曲面 S 不但是力学特征量的间断面, 而且是电磁场特征量的间断面, 则量 $\boldsymbol{R}$ 和 W 在这种重要的情况下一般不为零. 我们将在下一节中给出 $\boldsymbol{R}$ 和 W 通过矢量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ 的分量在间断面 S 的两侧的值表达的公式.

对于用来模拟机翼升力面的间断, 或者用来模拟产生推力的螺旋桨致动盘的间断, 外部作用 $\boldsymbol{R}$, W 甚至 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 也可能不等于零.

在空气动力学和爆炸理论中, 以及在其他许多情况下, 在气流内部会产生间断, 这时在间断面上成立等式 $\boldsymbol{R} = 0$, $\boldsymbol{\mathcal{M}} = 0$, $W = 0$ (但 $\Omega \neq 0$). 因此, 表示外部作用在间断面上为零的等式是在连续介质力学的这些应用中使用的一种典型的条件.

“固有”参考系中的间断面条件 根据质量守恒定律, 由等式 (4.3) 得

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}, \tag{4.10}$$

由动量方程得

$$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{p}_{n1} - \rho_1 \boldsymbol{v}_1 v_{n1} = \boldsymbol{p}_{n2} - \rho_2 \boldsymbol{v}_2 v_{n2}, \tag{4.11}$$

由动量矩方程和 (4.11) 得

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} + \boldsymbol{Q}_{n1} - \rho_1 \boldsymbol{k}_1 v_{n1} = \boldsymbol{Q}_{n2} - \rho_2 \boldsymbol{k}_2 v_{n2}, \tag{4.12}$$

由能量方程得

$$W + \boldsymbol{p}_{n1} \cdot \boldsymbol{v}_1 - \rho_1 \left(\frac{v_1^2}{2} + U_1\right) v_{n1} - q_{n1}^* = \boldsymbol{p}_{n2} \cdot \boldsymbol{v}_2 - \rho_2 \left(\frac{v_2^2}{2} + U_2\right) v_{n2} - q_{n2}^*, \tag{4.13}$$

最后, 由熵方程得

$$\rho_1 v_{n1} s_1 - \rho_2 v_{n2} s_2 = \Omega. \tag{4.14}$$

在绝热过程中 ($dq^{(e)} = 0$), 量 Ω (在 $\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2} \neq 0$ 时) 一般而言不等于零. 由于不可逆性, $dq' \geqslant 0$, 所以

$$\Omega = \rho_1 v_{n1}(s_1 - s_2) \geqslant 0. \tag{4.15}$$

在绝热过程中, 等式 (4.14) 可以视为量 Ω 的定义, 这个量对于实际能够实现的过程应当是非负的.

在所得关系式 (4.11)—(4.13) 中, 如果所有相应的量在间断面上的取值给定或者可以在解题过程中求出, 就能够利用这些关系式来计算外部作用 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 和 W.

任意间断的破碎 如果等式 (4.9) 成立, 则所得条件表明, 运动和状态的不同特征量的间断不可能是任意的. 初始值可以任意给出, 它们可能并不满足关系式 (4.10)—(4.14). 这就表示, 初始间断在以后的时刻不可能存在, 该间断一般将破碎成若干个间断, 其中既可能有强间断, 也可能有弱间断. 在 2 个或多个间断发生碰撞时会出现类似的情况. 我们在这里不打算研究任意间断面的破碎问题, 尽管这个问题对应用颇为重要.

对于静止的间断, 例如介质定常运动的情况, 条件 (4.10)—(4.15) 的形式很便于实际应用.

任意参考系中的间断面条件 对于非定常运动, 间断面在不同坐标系中能够具有大小和方向各异的移动速度 $\mathscr{D}$, 所以要给出上述关系式在任何参考系中的形式, 这些参考系与间断面任何点的运动无关. 为了在同一个坐标系中在间断面 S 的各个点得到这样的一般条件, 只要在所有方程中把相对于参考系 K^* 的运动速度矢量 $\boldsymbol{v}^*$ 替换为相对于固定坐标系 K 的速度矢量 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^* + \mathscr{D}$ ($\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v} - \mathscr{D}$) 即可.

相应条件在使用质量守恒方程和动量方程之后可以写为以下形式:

$$\rho_1(\mathscr{D} - v_{n1}) = \rho_2(\mathscr{D} - v_{n2}), \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{p}_{n1} + \rho_1 \boldsymbol{v}_1(\mathscr{D} - v_{n1}) = \boldsymbol{p}_{n2} + \rho_2 \boldsymbol{v}_2(\mathscr{D} - v_{n2}), \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} W_1 + \boldsymbol{p}_{n1} \cdot \boldsymbol{v}_1 - q^*_{n1} + \rho_1(\mathscr{D} - v_{n1}) \left(\frac{v_1^2}{2} + U_1\right) \\ = \boldsymbol{p}_{n2} \cdot \boldsymbol{v}_2 - q^*_{n2} + \rho_2(\mathscr{D} - v_{n2}) \left(\frac{v_2^2}{2} + U_2\right), \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\rho_1(v_{n1} - \mathscr{D})(s_1 - s_2) = \Omega, \tag{4.19}$$

其中 (4.18) 中的量 $W_1(v)$ 等于 $W(v^*) + \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\mathscr{D}}$. 在间断面上的这些关系式成立于任何 (惯性或非惯性) 坐标系和间断面上的所有点.

动量矩条件没有写出, 因为后面只研究这样一些模型, 其中对运动区域的所有点都成立

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} = 0, \quad \boldsymbol{Q}_n = 0, \quad \boldsymbol{k} = 0.$$

间断面相对于介质的移动速度 容易看出, 速度 $\mathscr{D} - v_{n1}$ 和 $\mathscr{D} - v_{n2}$ 可以视为间断面相对于间断面不同侧的介质物质点的移动速度.

切向间断 如果 $\mathscr{D} - v_{n1} = 0$ 且 $\mathscr{D} - v_{n2} = 0$, 则介质微元不会从间断面的一侧运动到另一侧, 而 $v_{n1} = v_{n2}$. 这时, 速度的切向分量在间断面两侧发生间断一般而言是可能的, 并且密度的间断 ($\rho_1 \neq \rho_2$) 可以是任意的. 这样的间断称为切向间断. 对于切向间断, 条件 (4.17)—(4.19) 的形式为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{R} = \boldsymbol{p}_{n2} - \boldsymbol{p}_{n1}, \\ &W_1 = q^*_{n1} - q^*_{n2} - \boldsymbol{p}_{n1} \cdot \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{p}_{n2} \cdot \boldsymbol{v}_2, \\ &\Omega = 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

因此, 切向间断面微元上的应力在 $\boldsymbol{R} = 0$ 时是连续的, 而应力与 (相对于间断面的) 切向速度的标积 (应力的相应功率) 之差在 $W = 0$ 时等于通过间断面的能量流之差. 对于理想流体, 条件 (4.20) 在 $\boldsymbol{R} = 0$ 和 $W = 0$ 时归结为压强和能量流矢量的法向分量在切向间断面上连续的条件, 例如, 在两种不同介质的接触面上就满足这些条件.

突跃压缩和突跃膨胀 如果 $v_{n1} \neq v_{n2}$, 介质微元就会从间断面 S 的一侧运动到另一侧, 其状态和运动的特征量随之发生突跃. 不难证明, 差值 $v_{n2} - v_{n1}$ ($\neq 0$) 既不依赖于参考系的选取, 也不依赖于 S 两侧的编号方法. 其实, 编号的改变只会导致法线方向的改变, 从而调换速度的法向分量并改变其符号.

现在, 我们这样为间断面 S 的两侧编号, 使得介质从编号为 1 的一侧穿过 S 运

动到编号为 2 的一侧[1]. 如果使用这样的参考系, 使 $\boldsymbol{v}_1 = 0$, 则此时在该坐标系中显然成立 $\mathscr{D}_n = \mathscr{D} > 0$. 在这种研究方法中, 间断面 S 在由下标 1 表示的静止介质中移动.

显然, 如果 $v_{n2} - v_{n1} > 0$, 则在我们的情况下 $v_{n2} > 0$, 间断面 S 之后的介质冲向间断面之前的静止介质. 如果质量守恒定律 (4.16) 在间断面上成立, 则对于这样的间断面 $\rho_2 > \rho_1$, 即间断面之后的介质的密度增加. 满足 $v_{n2} - v_{n1} > 0$ 的间断运动称为突跃压缩 (激波).

如果 $v_{n2} - v_{n1} < 0$, 则在间断之后的介质相对于 S 的法向速度方向与间断在静止介质中的移动速度方向相反, 所以在间断之后的介质中发生膨胀, 即 $\rho_2 < \rho_1$. 这样的间断运动称为突跃膨胀.

为了在连续运动区域求解微分方程, 可以利用本节建立起来的间断面条件得出相应的边界条件.

在许多情况下, 可以给出介质微元在间断面一侧的性质、运动和状态, 而另一侧的相应特征量就应当满足上述关系式. 例如, 用这种方法可以得到液体自由面和固体边界上的边界条件, 以及类似情况下的边界条件.

§5. 电磁场中的强间断

考虑与物质介质发生相互作用的电磁场, 并假设在电磁场中有间断面 S. 为了建立电磁场特征量在间断面 S 两侧的值所应当满足的关系式, 我们将从积分形式的麦克斯韦方程出发, 并把这些方程推广到在电磁场中有间断面的情况.

首先写出这些方程 (见第六章 (5.4), (5.5)) 以便研究. 在任何惯性系中有

$$\int_{\Sigma} B_n \,\mathrm{d}\sigma = 0, \quad \int_{\Sigma} D_n \,\mathrm{d}\sigma = 4\pi \int_{V} \rho_{\mathrm{e}} \,\mathrm{d}\tau, \tag{5.1}$$

$$\int_{\mathscr{L}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma_1} B_n \,\mathrm{d}\sigma, \quad \int_{\mathscr{L}} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{4\pi}{c}\int_{\Sigma_1} j_n \,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma_1} D_n \,\mathrm{d}\sigma, \tag{5.2}$$

还有这些方程的推论——电荷守恒定律

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V} \rho_{\mathrm{e}} \,\mathrm{d}\tau = \int_{\Sigma} j_n \,\mathrm{d}\sigma, \tag{5.3}$$

式中 V 是静止控制体, 其表面为 Σ, 而 Σ_1 是静止的封闭曲面, 其边界为 $\mathscr{L}$.

设 M 是间断面 S 上的某一点, K^* 是使间断面 S 在点 M 的移动速度 $\mathscr{D}$ 为零的惯性坐标系 (图 47), 即点 M 的"固有"坐标系. 在坐标系 K^* 中, 点 M 在间断面 S 上的邻近点的移动速度不等于零. 我们将认为方程 (5.1) 和 (5.2) 是在坐标系 K^*

[1] 照此约定, 编号为 1 的一侧称为间断面的前侧, 另一侧称为间断面的后侧. 所以, 物质点总是从前侧穿过间断面, 而间断面的法线正方向总是指向间断面的前方. ——译注

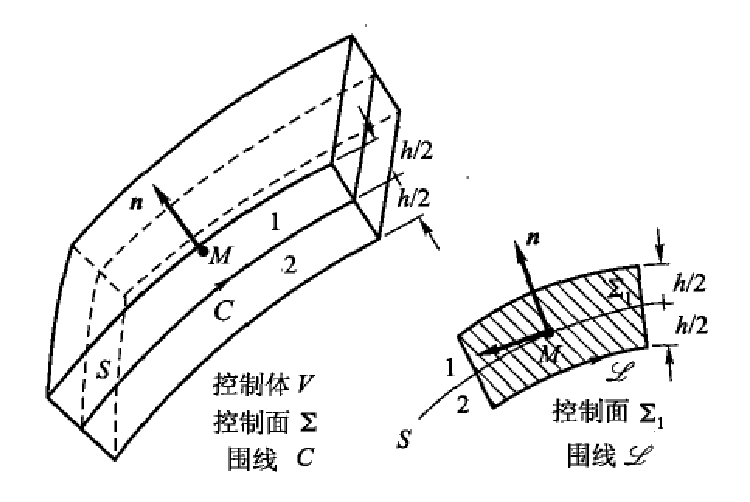


图 47. 用于推导间断面条件的积分域示意图

中写出的. 在方程 (5.1) 和 (5.3) 中, 我们采用 §4 中的方法定义控制体 V 和控制面 Σ. 通过 S 在点 M 的法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 和任意切向矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 作平面, 该平面与控制体 V 和控制面 Σ 的截面和截线分别取作方程 (5.2) 中的控制面 Σ_1 和围线 $\mathscr{L}$. 依条件, 矢量 $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\tau}$ 和控制面 Σ 的法向矢量 $\boldsymbol{n}^*$ 组成右手系, 即 $\boldsymbol{n}^* = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\tau}$.

间断面条件 考虑间断面 S, 矢量 $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ 在其两侧有界并且连续, 但在穿过 S 时可能发生间断. 至于电荷 ρ_e 和电流 $\boldsymbol{j}$, 我们假设在间断面 S 上可能分布有面电荷 γ 和面电流 $\boldsymbol{i}$ (该矢量位于间断面 S 的切平面内), 它们在点 M 的定义是利用以下极限给出的:

$$\lim_{V \to M} \frac{1}{\Delta\sigma} \int\limits_{V \approx h\Delta\sigma} \rho_e \, \mathrm{d}\tau = \gamma(M), \tag{5.4}$$

$$\lim_{\substack{\Delta\sigma \to M \\ h \to 0}} \frac{h}{\Delta\sigma} \int\limits_{\Sigma_1 \approx \Delta\sigma} \boldsymbol{j}_\tau \, \mathrm{d}\sigma = \boldsymbol{i}(M), \tag{5.5}$$

式中 $\Delta\sigma \to M$ 表示曲面 S 或 Σ_1 的面微元收缩至点 M, $\boldsymbol{j}_\tau$ 为电流在点 M 的体积密度矢量在 S 上的切向分矢量.

利用 §4 中的方法以及 (5.4), 我们从方程 (5.1) 和 (5.3) 得出

$$B_{n1} - B_{n2} = 0, \quad D_{n1} - D_{n2} = 4\pi\gamma, \tag{5.6}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{i} + j_{n1} - j_{n2} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \gamma \sqrt{G}}{\partial t}, \tag{5.7}$$

式中 G 是间断面度规的行列式,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{i} = \lim_{C \to M} \frac{1}{\Delta\sigma} \int\limits_C i_n \, \mathrm{d}l = \nabla_1 i^1 + \nabla_2 i^2,$$

C 是间断面 S 上收缩至点 M 的封闭围线, i_n 是矢量 $\boldsymbol{i}$ 在围线 C 上的法向分量, $\Delta\sigma$

是间断面 S 被围线 C 截取的面微元, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}$ 是矢量 $\boldsymbol{i}$ 在间断面 S 上的坐标系中的二维散度, i^1 和 i^2 是矢量 $\boldsymbol{i}$ 的分量, ∇_k 表示该坐标系中的协变微分.

如果在 $h \to 0$ 和围线 $\mathscr{L}$ 收缩至点 M 时取极限, 利用类似的方法从方程 (5.2) 和定义 (5.5) 得出

$$E_{\tau 1} - E_{\tau 2} = 0, \tag{5.8}$$

$$H_{\tau 1} - H_{\tau 2} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\tau}).$$

显然, 最后一个等式在矢量形式下可以写为

$$\boldsymbol{H}_{\tau 1} - \boldsymbol{H}_{\tau 2} = \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{n}), \tag{5.9}$$

式中 $\boldsymbol{H}_{\tau 1}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\tau 2}$ 是矢量 $\boldsymbol{H}$ 在点 M 在 S 上的法向分矢量.

电磁场特征量的条件 (5.6)—(5.9) 组成了一组封闭的间断面关系式, 其中考虑了极化、磁化和电流. 这些条件是在点 M 的"固有"惯性系 K^* 中写出的, 所以间断面在点 M 的移动速度 $\mathscr{D} = 0$.

如果参考系 K^* 以速度 $\mathscr{D}$ 相对于一个固定的"静止"惯性参考系 K 运动, 则根据从 K^* 到 K 的一般变换公式——洛伦兹变换, 在参考系 K 中可以把条件 (5.6), (5.8) 和 (5.9) 改写为

$$B_{n1} - B_{n2} = 0, \quad D_{n1} - D_{n2} = 4\pi\gamma^*,$$

$$\boldsymbol{E}_{\tau 1} - \boldsymbol{E}_{\tau 2} = \frac{1}{c}[(\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2)\times\mathscr{D}]_\tau,$$

$$\boldsymbol{H}_{\tau 1} - \boldsymbol{H}_{\tau 2} + \frac{1}{c}[(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2)\times\mathscr{D}]_\tau = \frac{4\pi}{c}\sqrt{1-\frac{\mathscr{D}^2}{c^2}}\,(\boldsymbol{i}^*\times\boldsymbol{n}),$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 分别表示间断面 S 的法向和切向, 速度 $\mathscr{D}$ 是在参考系 K 中计算的, 其方向垂直于 S, 而量 γ^* 和矢量 $\boldsymbol{i}^*$ 定义于固有坐标系. 在忽略 $\mathscr{D}^2/c^2$ 量级的量并且 $\gamma = \gamma^*$, $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}^*$ 时, 公式 (5.7) 的形式不变.

有质动力和电磁场对介质的能量流在间断面上的面密度

现在, 我们来考虑有质动力在电磁场特征量间断面 S 上的面密度矢量 $\boldsymbol{R}$ 的分量的公式, 以及进入介质的能量流在该间断面上的面密度 W 的公式. 由定义, 在笛卡儿坐标系中对体积力有[1)]

$$-\rho F^\alpha = \nabla_k S^{\alpha k} = \frac{\partial S^{\alpha 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial S^{\alpha 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial S^{\alpha 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial S^{\alpha 4}}{\partial t}, \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3, \tag{5.10}$$

$$-F_4 = \nabla_k S_{4\cdot}^{\cdot k} = \frac{\partial S_{4\cdot}^{\cdot 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial S_{4\cdot}^{\cdot 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial S_{4\cdot}^{\cdot 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial S_{4\cdot}^{\cdot 4}}{\partial t}, \tag{5.11}$$

式中 S^{ik} 为能量动量张量的分量. 在 S 上的给定点 M 的固有参考系 K^* 中, 在等式

[1)] 这里 F^α 是四维质量力的空间分量或三维质量力的分量. 在第六章公式 (5.12) 中给出了体积力的分量.

(5.10) 和 (5.11) 的两侧都乘以静止控制体 V (见图 47) 的体微元 $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$, 然后对控制体 V 积分, 应用奥一高定理后得出

$$\int\limits_V \rho F^\alpha\,\mathrm{d}\tau = -\int\limits_\Sigma S^{\alpha\beta}n_\beta\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V S^{\alpha 4}\,\mathrm{d}\tau, \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3, \tag{5.12}$$

$$\int\limits_V F_4\,\mathrm{d}\tau = -\int\limits_\Sigma S_{4\cdot}^{\cdot\beta}n_\beta\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V S_{4\cdot}^{\cdot 4}\,\mathrm{d}\tau, \tag{5.13}$$

式中 n_β 是 Σ 的单位法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 在三维笛卡儿坐标系中的分量.

我们来应用能量动量张量的分量 S^{ik} 的闵可夫斯基公式 (第六章 (5.11))

$$S^{ik} = -\frac{1}{4\pi}\left(F_{m\cdot}^{\cdot i}H^{mk} - \frac{1}{4}g^{ik}F_{mn}H^{mn}\right).$$

S^{ik} 的矩阵形式可以写为

$$(S^{ik}) = \begin{pmatrix} S^{11} & S^{12} & S^{13} & S^{14} \\ S^{21} & S^{22} & S^{23} & S^{24} \\ S^{31} & S^{32} & S^{33} & S^{34} \\ S^{41} & S^{42} & S^{43} & S^{44} \end{pmatrix}.$$

如果应用第六章中的矩阵 (F_{ij}) 和 (H^{ij}) 的定义 (5.6) 和 (5.7), 以及 (还参见 (5.34))

$$(F_{m\cdot}^{\cdot i}) = (F_{mj}g^{ji}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^3 & B^2 & E_1/c \\ B^3 & 0 & -B^1 & E_2/c \\ -B^2 & B^1 & 0 & E_3/c \\ cE_1 & cE_2 & cE_3 & 0 \end{pmatrix},$$

则在笛卡儿坐标系中得到把张量的分量 S^{ik} 通过矢量 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}$ 的分量表示出来的以下表达式:

$$S^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi}\left[E^\alpha D^\beta + H^\alpha B^\beta + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\right], \quad \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3, \tag{5.14}$$

式中已经考虑到, 在三维笛卡儿坐标系中 $E_\alpha = E^\alpha$, $D_\beta = D^\beta$;

$$S^{\alpha 4}\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}), \quad S_{\cdot 4}^{\alpha\cdot}\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}), \tag{5.15}$$

$$S^{4\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}), \quad S_{4\cdot}^{\cdot\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}), \tag{5.16}$$

$$S_{4\cdot}^{\cdot 4} = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{B});$$

这里 $\boldsymbol{e}_\alpha$ 是三维坐标系的基矢量.

我们再一次强调, 在公式 (5.14), (5.15) 和 (5.16) 中, 张量的分量 S^{ij} 是在四维坐标系中定义的, 其中 [1)]

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j = -(\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 + c^2\,\mathrm{d}t^2$$

如果把这里写出的公式同其他某些书中的公式进行对比, 就需要注意这一点, 因为其他书中可能使用另外一些方法来定义 g_{ij}.

因此, (5.12) 和 (5.13) 中的被积函数可以通过 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ 表示, 而依照假设, 这些矢量在 S 上和在控制体 V 中都是有界的. 当相应控制体和控制面向间断面 S 上的点 M 收缩时, 按照 §4 中给出的方法对等式 (5.12) 和 (5.13) 取极限, 得

$$R^\alpha = (S^{\alpha\beta})_2 n_\beta - (S^{\alpha\beta})_1 n_\beta, \tag{5.17}$$

$$W = (S_{4\cdot}^{\cdot\beta})_2 n_\beta - (S_{4\cdot}^{\cdot\beta})_1 n_\beta. \tag{5.18}$$

在点 M 取参考系 K^*, 根据公式 (5.14) 和 (5.16), 从公式 (5.17) 和 (5.18) 得出 R^α 和 W 在 K^* 中通过 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ 的表达式:

$$\begin{aligned} R^\alpha = &-\frac{1}{4\pi}\left[E^\alpha D_n + H^\alpha B_n - \frac{n^\alpha}{2}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\right]_2 \\ &+ \frac{1}{4\pi}\left[E^\alpha D_n + H^\alpha B_n - \frac{n^\alpha}{2}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\right]_1, \\ W = &\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{n}, \end{aligned}$$

式中 $n^\alpha = -g^{\alpha\beta}n_\beta$ 是三维矢量 $\boldsymbol{n}$ 的逆变分量. 这些表达式可以代入物质介质的间断关系式 (4.10)—(4.13). 因为第六章公式 (5.36) 表明, 有质动力矩的体积密度甚至在 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ 有间断时也是有界的, 所以在有质动力矩的体积密度发生间断的条件下, 其面密度显然为零. 有质动力可以通过 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ 的梯度表示, 所以有质动力可能出现在强间断面条件中.

§6. 可压缩理想介质中的间断面

现在, 我们来更加详细地研究可压缩理想介质中的强间断面条件 (以及由此得出的推论). 可压缩理想介质模型是在第四章 §1 中引入的, 根据那里给出的定义, 该介质的内应力只可能是压力 $\boldsymbol{p}_n = -p\boldsymbol{n}$. 此外, 在这一节中我们只考虑这样的情况, 这时在间断面上没有任何以面密度为特征量的与给定介质的外部相互作用, 即认为 $\boldsymbol{R} = 0$, $W = 0$. 我们还认为在间断面上 $q_n^* = 0$, 例如, 介质的热传导性质在间断面上不予考虑.

[1)] 见 249 页的脚注 1).

静止间断面上的条件 在研究介质相对于"固有"坐标系 K^* 的运动时, 对间断面的给定面微元可以写出条件 (4.10)

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}. \tag{6.1}$$

我们将进一步认为, 速度对 S 的法向分量 $v_{n1} \neq 0$, 所以介质微元会穿过间断面, 从其一侧运动到另一侧. 那么, 对于理想介质, 从 (4.11) 得出

$$\boldsymbol{v}_{\tau 1} = \boldsymbol{v}_{\tau 2}, \tag{6.2}$$

式中 $\boldsymbol{v}_{\tau i}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 在点 M 对 S 的切向分速度.

取动量方程 (4.11) 在 S 法向的投影, 利用 (6.1) 和 (6.2) 得

$$\rho_1 v_{n1}^2 + p_1 = \rho_2 v_{n2}^2 + p_2. \tag{6.3}$$

利用 (6.1) 和 (6.2) 还可以把能量方程 (4.13) 的形式变为

$$U_1 + \frac{v_{n1}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} = U_2 + \frac{v_{n2}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2}. \tag{6.4}$$

最后, 熵间断方程 (4.14) 在利用 (6.1) 后给出

$$\rho_1 v_{n1}(s_1 - s_2) = \Omega. \tag{6.5}$$

应当注意, 关系式 (6.1)—(6.5) 中的速度是相对于坐标系 K^* 而言的, 间断面的点 M 在这个坐标系中的速度等于零.

对于具有静止间断面的定常运动, 可以认为 K^* 就是基本的"静止"参考系.

间断沿介质微元传播 从 (6.1) 可见, v_{n1} 和 v_{n2} 具有相同的符号. 如果引入参考系 K, 使得间断面之前的速度等于零, 并且 $\mathscr{D}_n = \mathscr{D} > 0$, 则在参考系 K 中也可以使用间断面关系式 (6.1)—(6.5), 只要令[1]

$$v_{n1} = -\mathscr{D}, \quad v_{n2} = v_n - \mathscr{D}, \quad \boldsymbol{v}_{\tau 1} = \boldsymbol{v}_{\tau 2} = 0,$$

式中 $v_n = v_{n2} - v_{n1}$ 是下标 2 所对应的一侧介质相对于参考系 K 的速度在 S 上的法向分量. 这时, 量 $\mathscr{D}$ 可以视为间断面沿编号为 1 的一侧的介质诸微元传播的速度. 我们以后将使用这样定义出来的量 $\mathscr{D}$, 而为了简化公式, 我们引入质量体积 $V = 1/\rho$ 来代替密度 ρ.

容易看出, 关系式 (6.1) 和 (6.3) 等价于以下等式:

$$-v_{n2} = V_2\sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}}, \quad -v_{n1} = \mathscr{D} = V_1\sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}}, \tag{6.6}$$

$$v_{n2} - v_{n1} = v_n = \mathscr{D}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \pm\sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}. \tag{6.7}$$

[1] 参考系 K 中的间断面条件也可以直接从任意参考系中的间断面条件 (4.16)—(4.19) 推导出来. ——译注

因为 $\mathscr{D} > 0$, 所以 (6.7) 中的正号对应 $\rho_1 < \rho_2$, 而负号对应 $\rho_1 > \rho_2$. 如果在 (6.4) 中消去速度, 得

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_1 - V_2). \tag{6.8}$$

由 (6.6) 可见, 如果 $V_1 > V_2$, 即 $\rho_2 > \rho_1$, 则必有 $p_2 > p_1$; 相反, 如果 $\rho_2 < \rho_1$, 则 $p_2 < p_1$.

突跃压缩和突跃膨胀 满足不等式

$$v_n > 0, \quad \rho_2 > \rho_1, \quad p_2 > p_1 \tag{6.9}$$

的间断称为突跃压缩 (激波), 满足不等式

$$v_n < 0, \quad \rho_2 < \rho_1, \quad p_2 < p_1 \tag{6.10}$$

的间断称为突跃膨胀. 在 (6.9) 或 (6.10) 中的 3 个不等式中, 只要有 1 个不等式成立, 就可以得出另外 2 个也成立.

性质 (6.9) 和 (6.10) 具有普遍性. 当间断面上没有作用于介质的外面力和外质量流时, 这些性质只是质量守恒定律和动量方程的推论.

内能间断 关系式 (6.8) 不包含速度, 在任何参考系中都成立, 所以便于研究密度和压强在介质微元穿过间断时如何变化. 如果给定密度突跃, 则在某些重要情况下可以从 (6.8) 计算压强突跃, 此后可以从等式 (6.6) 和 (6.7) 计算相应速度.

在一般情况下, 均匀理想物质介质的内能是质量体积 V (密度 ρ), 压强 p 和某些其它参量的函数, 这些参量给出介质的物理性质和化学性质. 一般情况下的物理参量还可能是描述极化和磁化的矢量, 这些参量在间断面两侧可能发生突跃式的变化. 例如, 在研究燃烧前锋、爆轰前锋和电磁波各种前锋的传播等现象时, 我们都会遇到上述情况.

以完全气体为例, 我们有

$$U = c_V T + U_0 = \frac{c_V}{c_p - c_V}\frac{p}{\rho} + U_0,$$

式中 c_p 和 c_V 是质量热容, U_0 对于给定气体是常量. 气体在穿过间断面后在组成上可能发生变化, 所以 c_p, c_V 和 U_0 可能发生间断. 如果气体是完全气体混合物, 则

$$U = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho}\left(U_{0i} + \int_{T_0}^{T} c_{Vi}(T)\,\mathrm{d}T\right),$$

式中 ρ_i/ρ 是气体混合物中第 i 个组元的质量分数. 在穿过间断面时, 比值 ρ_i/ρ 可能发生间断, 而为了确定这些间断, 必须使用一些附加的物理化学定律和假设. 当混合物的温度升高时, 可以研究燃烧 (完全燃烧或非完全燃烧), 可以考虑离解或电离等现象.

如果介质的物理化学性质在介质微元穿过间断时不变, 只有密度 ρ 和压强 p 发生变化, 则关系式 (6.8) 在 p_1 和 ρ_1 固定时给出了间断之后的压强值 p_2 和密度值 ρ_2 之间的联系.

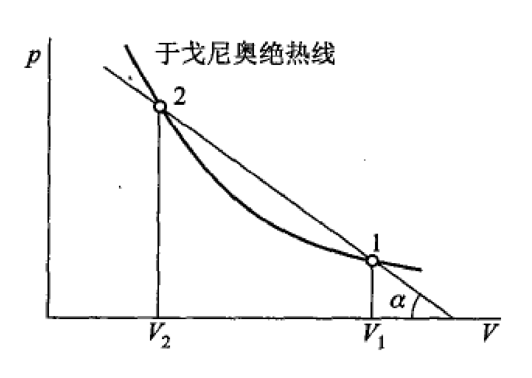


图 48. 于戈尼奥绝热线

于戈尼奥绝热线 如果把状态 $p, V = 1/\rho$ 通过作图的方式用平面 (p, V) 上的点表示出来, 则对于给定的 p_1, V_1, 等式 (6.8) 在该平面上定义了一条曲线. 这条曲线称为于戈尼奥绝热线 (图 48).

间断面之前的状态所对应的点 p_1, V_1 位于于戈尼奥绝热线上的条件是

$$U_2(p_1,\ V_1) - U_1(p_1,\ V_1) = 0, \tag{6.11}$$

即函数 $U_2(p,\ V)$ 等于函数 $U_1(p,\ V)$. 除了 p 和 V, 如果内能所可能依赖的所有其它参量和常量在气体穿过间断面时保持不变, 则等式 (6.11) 能够成立. 如果在气体中有不可逆的化学反应或者其他某些过程, 则等式 (6.11) 可能不成立, 这时点 p_1, V_1 可能不属于于戈尼奥绝热线[1].

我们来考虑满足等式 (6.11) 的间断. 显然, 当 p_1, V_1 给定时, 为了计算于戈尼奥绝热线上的点 p_2, V_2, 只要给出 1 个量就足够了, 这个量是

$$p_2, \quad 或\ \ \rho_2 = \frac{1}{V_2}, \quad 或\ \ \tan\alpha = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = \frac{\mathscr{D}^2}{V_1^2}. \tag{6.12}$$

角 α 确定了于戈尼奥绝热线的一条割线的斜率, 该割线对应间断面前面的状态 1 和后面的状态 2. 显然, 角 α 表征间断面沿处于状态 1 的介质微元传播的速度 $\mathscr{D}$.

熵沿于戈尼奥绝热线的变化 现在计算熵 s 沿于戈尼奥绝热线的变化. 为此, 取同在于戈尼奥绝热线上的某一固定状态 p_1, V_1 和任意状态 p, V, 并考虑这两个状态之间的具有热流的某一可逆过程, 该过程满足

$$T\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V. \tag{6.13}$$

从 (6.8) 可得 $\mathrm{d}U$ 的表达式, 将其带入 (6.13); 在 p_1, V_1 固定时, 经过简单的变换得出

$$T\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}(V_1 - V)\,\mathrm{d}(p - p_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)\,\mathrm{d}(V_1 - V).$$

利用 (6.12), 我们有

$$T\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}(V_1 - V)^2\,\mathrm{d}\frac{p - p_1}{V_1 - V} = \frac{1}{2}(V_1 - V)^2\,\mathrm{d}\tan\alpha = -\frac{1}{2}(p - p_1)^2\,\mathrm{d}\frac{1}{\tan\alpha}. \tag{6.14}$$

[1] 关于于戈尼奥绝热线理论, 在许多专著中有更全面的论述, 例如: Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Москва: Гостехиздат, 1950; 2-е изд. Москва: Наука, 1966; 3-е изд. Москва: Наука, 1980 (俄文第一版的英译本: Sedov L. I. Two-Dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics. New York: Wiley, 1965).

熵在压强间断很小时沿于戈尼奥绝热线的变化

沿于戈尼奥绝热线有

$$\mathrm{d}\frac{1}{\tan\alpha} = -\mathrm{d}\frac{V-V_1}{p-p_1} = -\mathrm{d}\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right)_{p=p_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}p^2}\right)_{p=p_1} + \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}p^2}\right)_{p=p_1}\mathrm{d}p + O(p-p_1)\,\mathrm{d}p,$$

式中 $O(p-p_1)$ 是 $p-p_1$ 的同阶小量. 根据这个等式, 从 (6.14) 得

$$T\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4}(p-p_1)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}p^2}\right)_{p=p_1}\mathrm{d}p + (p-p_1)^2O(p-p_1)\,\mathrm{d}p. \tag{6.15}$$

由此可知, 当 $p-p_1$ 很小时成立等式

$$T^*\Delta s = \frac{1}{12}(p-p_1)^3\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}p^2}\right)_{p=p_1} + (p-p_1)^3\ \text{的高阶小量}, \tag{6.16}$$

式中 T^* 是温度在积分区间的某个平均值. 从 (6.16) 可见, 当压强间断 $p-p_1$ 很小时, 气体穿过间断时的熵变化是 $(p-p_1)^3$ 阶小量.

泊松绝热线

在连续的绝热运动中, 熵在气体微元状态变化时保持不变, 即

$$s_2(p,\ V) - s_1(p_1,\ V_1) = \Delta s = 0. \tag{6.17}$$

当 p_1, V_1 给定时, 方程 (6.17) 确定了 p 与 V 之间的关系. 我们知道, $(p,\ V)$ 平面上经过点 p_1, V_1 的相应曲线称为泊松绝热线.

泊松绝热线与于戈尼奥绝热线在点 p_1, V_1 二阶相切

根据 (6.17) 和 (6.16), 当差值 $p-p_1$ 很小时, 泊松绝热线方程可以写为

$$V - V_1 = f(p-p_1,\ s=\mathrm{const}), \tag{6.18}$$

于戈尼奥绝热线方程可以写为

$$V - V_1 = f(p-p_1,\ s=\mathrm{const}) + k(p-p_1)^3 + \cdots, \tag{6.19}$$

式中的系数 k 只依赖于 V_1 和 p_1. 因此, 这两条绝热线在点 p_1, V_1 附近是互相接近的曲线 (图 49).

从 (6.18) 和 (6.19) 可见, 这两条绝热线在点 p_1, V_1 具有相同的切线和相同的曲率, 即

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right)_H = \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right)_P = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s, \tag{6.20}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}p^2}\right)_H = \left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}p^2}\right)_P = \left(\frac{\partial^2V}{\partial p^2}\right)_s. \tag{6.21}$$

显然, 质量体积 V 沿泊松绝热线对 p 的全导数就是相应状态方程中的函数 $V(p,\ s)$ 对 p 的偏导数, 其中 p 和 s 是独立变量.

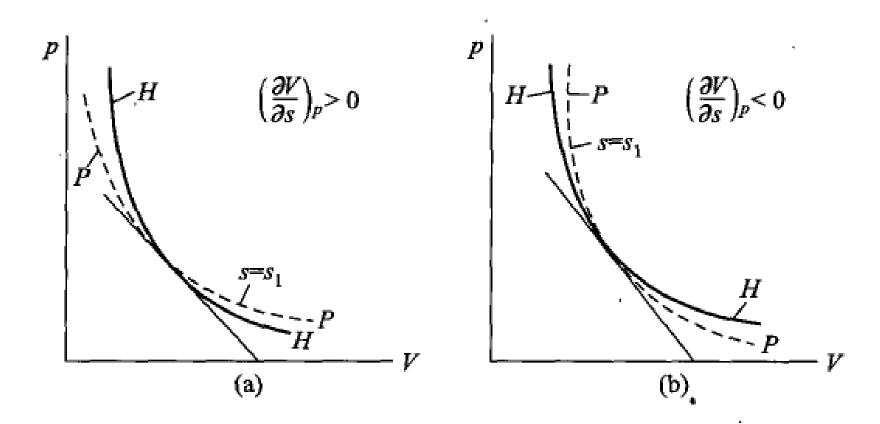


图 49. 泊松绝热线 (P) 和于戈尼奥绝热线 (H) 在 $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ 时的相互位置

无穷小间断以声速沿介质微元传播 我们从 (6.6) 和 (6.20) 容易得出, 对于无穷小间断, 在 $p_2 \to p_1$ 和 $V_2 \to V_1$ 时成立等式

$$\mathscr{D}^2 = -V^2\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_H = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_H = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_P = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s.$$

量

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

称为声速. 显然, 无穷小扰动——无穷小间断——以声速沿介质微元传播, 即

$$\mathscr{D} = a.$$

于戈尼奥绝热线和泊松绝热线在点 p_1, V_1 的相互位置 对于通常的介质成立不等式

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s > 0.$$

例如, 对于完全气体 (见第五章 (7.7) 和 (4.3)) 有

$$U = c_V T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \exp\left(\frac{s-s_0}{c_V}\right) + \text{const} = c_V T + \text{const} = \frac{pV}{\gamma-1} + \text{const} \qquad (6.22)$$

和

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \exp\left(\frac{s-s_0}{c_V}\right),$$

即

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V}{V_0} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/\gamma} \exp\left(\frac{s-s_0}{c_p}\right), \qquad (6.23)$$

从而

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s = \frac{(1+\gamma)p_0^{1/\gamma}}{\gamma^2 \rho_0 p^{2+1/\gamma}} \exp\left(\frac{s-s_0}{c_p}\right) > 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s = \frac{V}{c_p} > 0.$$

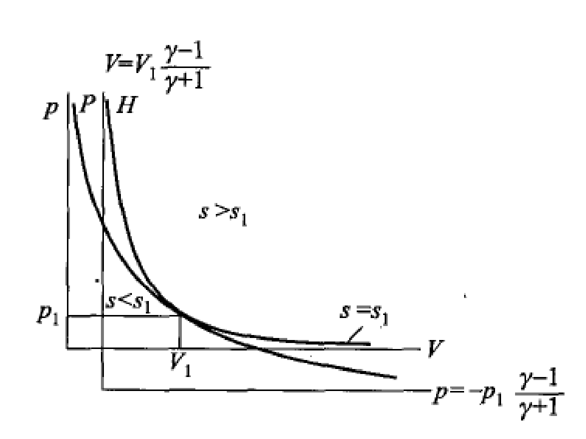


图 50. 完全气体的泊松绝热线和于戈尼奥绝热线

由不等式 $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ 可知, 泊松绝热线是凹向上的. 若 $(\partial V/\partial s)_p > 0$, 则 $s > s_1$ 位于泊松绝热线以上, $s < s_1$ 位于泊松绝热线以下; 若 $(\partial V/\partial s)_p < 0$ 则相反, $s < s_1$ 位于泊松绝热线以上, $s > s_1$ 位于泊松绝热线以下 (见图 49). 因为在于戈尼奥绝热线上成立等式 (6.16), 所以显然, 于戈尼奥绝热线在点 p_1, V_1 与泊松绝热线相切, 并且当 $(\partial V/\partial s)_p > 0$ 时于戈尼奥绝热线在该点附近在 V 增加时从上向下穿过泊松绝热线, 如图 49 (a) 所示. 当 $(\partial V/\partial s)_p < 0$ 时, 两者的位置相反.

完全气体的泊松绝热线和于戈尼奥绝热线的方程

按照 (6.22) 和 (6.23), 完全气体的泊松绝热线方程为

$$pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma,$$

而于戈尼奥绝热线方程 (6.8) 具有以下形式:

$$\frac{1}{\gamma - 1}(pV - p_1 V_1) = \frac{1}{2}(p + p_1)(V_1 - V). \tag{6.24}$$

泊松绝热线具有渐近线 $V = 0$ 和 $p = 0$. 于戈尼奥绝热线是双曲线, 其渐近线为

$$V = V_1 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad p = -p_1 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

图 50 给出了这些曲线的一般形式. 显然, 完全气体的于戈尼奥绝热线全部凹向上.

完全气体的熵沿于戈尼奥绝热线随压强的增加而单调增加

对于完全气体, 从 (6.24) 和 (6.13) 可知, 沿于戈尼奥绝热线成立公式

$$T\,\mathrm{d}s = \frac{\gamma + 1}{4V_1}(V_1 - V)^2\,\mathrm{d}p,$$

所以

$$\frac{\partial s}{\partial p} > 0.$$

当完全气体的运动沿于戈尼奥绝热线向上进行时, 即当 p 增加时, 熵单调增加.

可以证明, 在一般情况下, 对于满足不等式 $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ 的任何介质, 在于戈尼奥绝热线上对于 $p > p_1$ 有 $s > s_1$, 对于 $p < p_1$ 有 $s < s_1$. 例如, 对小间断 $p - p_1$ 而言, 这可以从 (6.15) 和 (6.21) 直接看出.

可以实现突跃压缩但无法实现突跃膨胀

从热力学第二定律可知, 在绝热条件下只有 $\Omega > 0$ 的间断才是在物理上允许的, 即介质微元穿过间断面以后的熵 s_2 大于它在间断面之前的原来的熵 s_1. 从上述分析可知, 这种情况在 $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ 和 $U_2(p, \rho) = U_1(p, \rho)$ 的条件下仅对突跃压缩才成立, 这时

$$p_2 > p_1, \quad \rho_2 > \rho_1, \quad v_n = v_{n2} - v_{n1} > 0.$$

于是, 我们得到了强间断理论中的一个基本结论: 当不等式 $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ 成立时, 只有突跃压缩才能够实现, 而突跃膨胀不可能实现.

这个结论密切关系到 2 个假设: 一是成立不等式 $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$, 二是成立条件 $U_2(p,\ \rho) = U_1(p,\ \rho)$.

在什么情况下可以实现突跃膨胀

如果混合气体微元在穿过间断面以后其化学性质或物理性质发生变化, 使得上述第二个条件不再满足, 就可能在实际运动中实现突跃膨胀. 这时, 由 (6.8) 给出的点 p_2, V_2 的轨迹也被称为于戈尼奥绝热线; 如上所述, 这条曲线不通过点 p_1, V_1. 例如, 燃烧前锋就是这样的可以实现的突跃膨胀.

突跃压缩以超声速沿间断面之前的介质微元传播

我们再指出间断面两侧法向速度的一个重要性质. 我们用 β_1 表示泊松绝热线的切线与 V 轴形成的锐角 (图 51). 从 (满足条件 $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ 的) 任意介质的于戈尼奥绝热线在点 p_1, V_1 邻域的凹性可知, 对于我们所研究的任何介质中的突跃压缩, 在 $p - p_1$ 很小时成立不等式

$$\tan\beta_1 < \tan\alpha.$$

对于完全气体中的任何突跃压缩, 这个不等式在整条于戈尼奥绝热线上都是成立的. 因为

$$a_1^2 = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_{p_1} = -V_1^2\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{p_1} = V_1^2\tan\beta_1,$$

$$\mathscr{D}^2 = V\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = V_1^2\tan\alpha,$$

所以对突跃压缩 $(p_2 > p_1)$ 有

$$\mathscr{D}^2 = v_{n1}^2 > a_1^2.$$

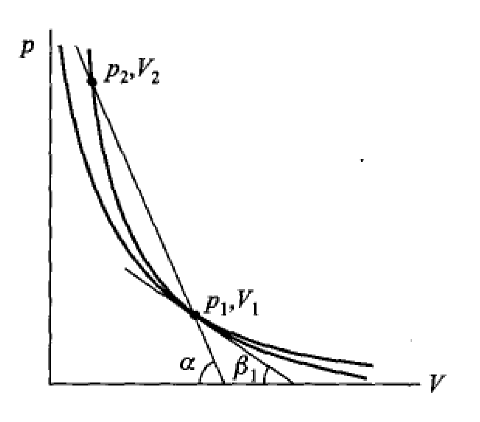


图 51. β_1 是泊松绝热线的切线与 V 轴形成的锐角, α 是于戈尼奥绝热线的割线与 V 轴形成的锐角

还可以证明 [1], 对于 $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ 的介质, 压强差 $p_2 - p_1$ 有限的突跃压缩在间断面之前的介质中超声速传播.

静止突跃只可能存在于超声速流中

介质微元在穿过静止间断面时, 其法向速度 v_{n1} 是超声速的. 因此, 静止突跃只可能存在于超声速流中. 显然, 运动突跃可能存在于任何流速的气流中, 其中也包括静止气流的情况.

点 p_1, V_1 和点 p_2, V_2 对应不同的于戈尼奥绝热线

我们在前面研究了点 p_1, V_1 所对应的于戈尼奥绝热线 H_1

$$U(p,\ V) - U(p_1,\ V_1) = \frac{1}{2}(p + p_1)(V_1 - V). \tag{6.25}$$

现在研究点 p_2, V_2 所对应的于戈尼奥绝热线 H_2, 其方程为

$$U(p,\ V) - U(p_2,\ V_2) = \frac{1}{2}(p + p_2)(V_2 - V). \tag{6.26}$$

[1] 参见 307 页的脚注.

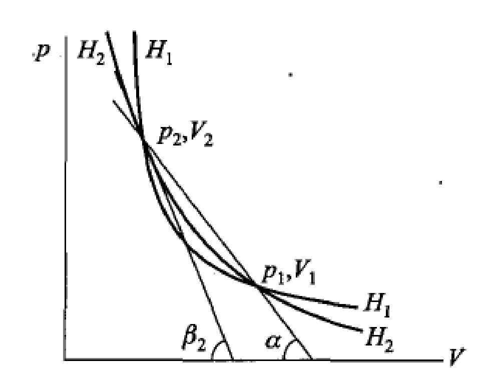


图 52. 绝热线 H_1 对应方程 (6.25), 绝热线 H_2 对应方程 (6.26)

容易看出, 绝热线 (6.25) 和 (6.26) 是不同的曲线, 但是它们在条件 (6.11) 下都通过点 p_1, V_1 和点 p_2, V_2.

对于绝热线 (6.25), 如果从 p_1, V_1 到 p_2, V_2 对应突跃压缩, 则对于绝热线 (6.26), 从 p_2, V_2 到 p_1, V_1 对应突跃膨胀 (图 52).

为简单起见, 下面只考虑完全气体的情况. 根据完全气体的于戈尼奥绝热线的凹性, H_1 和 H_2 的共同割线, 即经过点 p_1, V_1 和点 p_2, V_2 的直线, 在 p_1, p_2 之间位于这两条绝热线之上. 所以, 绝热线 H_2 在点 p_2, V_2 的切线与 V 轴形成的锐角 β_2 大于 H_1 和 H_2 的共同割线与 V 轴之间的夹角 α (图 52),

$$\tan\beta_2 > \tan\alpha. \tag{6.27}$$

介质微元穿过突跃压缩后具有相对于间断面的亚声速法向速度

由此可以直接得出突跃压缩 ($\rho_1 < \rho_2$) 的一个重要不等式. 按照 (6.6) 和 (6.27) 有

$$v_{n2}^2 = V_2^2 \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = V_2^2 \tan\alpha < V_2^2 \tan\beta_2,$$

但因为

$$V_2^2 \tan\beta_2 = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_{p_2} = a_2^2,$$

得

$$v_{n2}^2 = (\mathscr{D} - v_n)^2 < a_2^2.$$

因此, 介质穿过突跃压缩后具有相对于间断面的亚声速法向速度, 即间断面沿间断面后面的介质微元的传播速度 $\mathscr{D} - v_n$ 是亚声速的.

尽管突跃压缩的上述性质是对满足 $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ 的任何介质在 $p_2 - p_1$ 很小时建立起来的, 这些性质在完全气体的情况下对任何 $p_2 - p_1$ 都成立 (对完全气体使用了整条于戈尼奥绝热线的凹性), 但更详细的研究可以表明, 在一般情况下, 上述性质对任何 $p_2 - p_1$ 和满足不等式 $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ 的任何介质都成立.

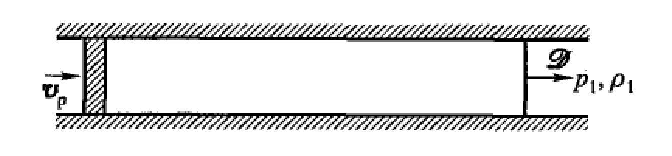


图 53. 活塞推动气体运动的问题

我们来考虑具有突跃压缩的完全气体绝热运动的某些问题.

具有平面波的活塞问题

首先研究活塞问题. 设一柱状管内充满完全气体, 其左端由活塞封闭 (图 53). 在初始时刻 $t = 0$, 活塞和不计重力的气体处于静止状态, 这时气体的密度 ρ_1 和压强 p 处处相同. 在 $t > 0$ 时推动活塞, 考虑由此导致的气体绝热运动问题.

显然, 气体的扰动同活塞的运动规律有密切关系. 活塞的运动规律可以用函数 $v_{\mathrm{p}}(t)$ 给出, 其中 v_{p} 是活塞的速度. 按照边界条件, 与活塞接触的气体微元的速度应当等于 $v_{\mathrm{p}}(t)$. 当活塞连续加速运动时, 气体的运动问题在一般情况下很困难, 只有在计算机上利用数值计算才能解决. 不过, 该问题在一个特殊情况下很容易解决, 这时原来静止的活塞突然以速度 v_{p} 开始向气体方向运动, 然后保持常速运动.

显然, 要想满足问题的所有条件, 只要认为在初始时刻有一道激波离开活塞, 它相对于气体的初始状态以超声速的常速度 $\mathscr{D}$ 沿静止气体运动. 激波与活塞之间的气体作常速平动, 运动速度 v_{p} 是已知的, 并且压强 p_2 和密度 ρ_2 保持不变.

利用 3 个间断面条件 (6.6) 和 (6.24), 容易从 $v_{\mathrm{p}} = v_{n2}$, p_1 和 ρ_1 计算出速度 $\mathscr{D}$, 密度 ρ_2 和压强 p_2. 在间断面之后, 所有气体微元的质量熵均相同并且保持不变, 而熵的突跃等于

$$s_2 - s_1 = c_V \ln \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma} > 0.$$

如果活塞的速度保持不变, 但速度的方向与气体方向相反, 则解的结构是类似的, 只不过这会导致突跃膨胀, 从而不被允许. 其实, 这时不会产生间断, 问题具有连续解.

如果活塞的速度是变化的, 其方向与气体方向相同, 则结果是, 速度 $\mathscr{D}$ 也是变化的. 活塞速度的微小变化以速度 $v + a$ (v 是激波之后的气体的速度) 向前传播. 因为激波之后的速度 $v + a$ 大于激波的速度 $\mathscr{D}$, 所以这些扰动经过某时间后一定会追上激波, 并使激波之后的气体的速度发生变化. 于是, 激波被减速或加速, 而这也会影响压强和熵的突跃值. 这样, 激波之后的气体微元的运动特征量相对于坐标 (到活塞的距离) 和时间显然是变化的. 气体微元的熵因为绝热性而保持不变, 但由于激波的速度 $\mathscr{D}$ 是变化的, 所以不同微元具有不同的熵. 因此, 在活塞与激波之间气体的连续运动区域中, 运动不是正压的. 例如, 从以下公式就能看出这一点:

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma} \exp\left(\frac{s - s_1}{c_V}\right).$$

当密度 ρ 一定时, 不同气体微元的压强可以因为熵不同而不同.

球面活塞 把柱状管活塞问题变得复杂一些, 就得到球面活塞问题. 考虑球心 O 静止的球面 Σ 在无界气体中的膨胀. 设气体原来静止, 初始密度为 ρ_1, 初始压强为 p_1 (图 54). 球面 Σ 的膨胀速度等于 $\mathrm{d}r_1/\mathrm{d}t$. 在一般情况下, 在气体中产生球面激波 S, 其膨胀速度为 $\mathscr{D} = \mathrm{d}r_2/\mathrm{d}t$, 式中 r_2 是激波 S 的半径. 如果 Σ 是从一点 (对称中心, 在 $t = 0$ 时 $r_1 = 0$) 开始膨胀的, 而速度 $\mathrm{d}r_1/\mathrm{d}t = \mathrm{const}$, 就可以证明, 这时激波的速度 $\mathscr{D}$ 也保持不变.

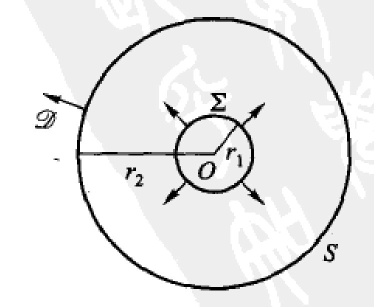


图 54. 当球面 Σ 膨胀时, 在气体中产生球面激波 S

为了解决这个问题, 最好在球坐标系中写出所有方

程, 并利用与球对称有关的简化 (运动特征量只依赖于 2 个独立变量——半径 r 和时间 t).

可以把球面活塞问题看作在大气中发生爆炸的一个模型问题, 这时可以认为在 Σ 内部有化学反应产物——被强烈压缩的气体, 这部分气体就像活塞那样挤压空气, 从而在空气中形成被称为爆炸波的激波. 为了确定爆炸波 S 与包围爆炸产物的球面 Σ 之间的空气的运动, 必须求解空气动力学问题, 而前面已经准备好了用来求解这个问题的所有方程以及附加的初始条件和边界条件.

点爆炸问题 在球面活塞问题中, 假设球面 Σ 的膨胀规律是给定的, 而在爆炸问题中, 球面 Σ 把发生膨胀的爆炸产物同空气分开, 其膨胀速度 $\mathrm{d}r_1/\mathrm{d}t$ 是事先未知的.

大气中的爆炸问题可以简单概括为一个只考虑主要效应的问题: 在很小的区域中释放出大量能量, 这些能量被传递给空气, 结果在大气中产生一个迅速膨胀的充满运动空气的球形区域, 压强场和密度场在其中发生强烈扰动. 点爆炸问题可以表述如下: 在初始时刻, 静止的不计重量的完全气体具有常压强 p_1 和常密度 ρ_1, 在某一点 (所产生的运动的对称中心) 突然释放出给定的能量 E; 需要在气体微元绝热运动这一最简单的假设下确定气体的扰动. 在这种情况下, 就像在球面活塞问题中那样, 从爆炸点形成膨胀的球面激波, 它把静止空气和激波以内区域中的运动气体分开 (图 55).

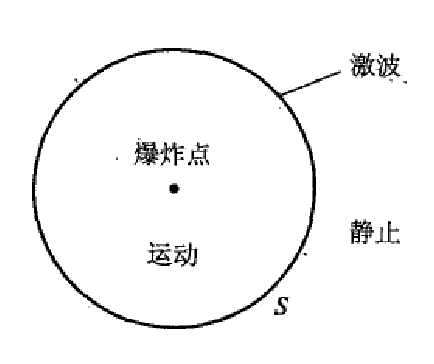


图 55. 点爆炸问题示意图

所有运动特征量和状态都可以认为仅仅是 r 和 t 的函数. 为了确定气体微元的所有状态特征量和运动速度, 必须求解在球坐标系中写出的以下非线性偏微分方程 (见第四章 §3) 的积分问题:

$$\begin{aligned}&\text{连续性方程} \quad &&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho v}{\partial r}+\frac{2\rho v}{r}=0,\\ &\text{动量方程} &&\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=0,\\ &\text{绝热条件} &&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)+v\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)=0.\end{aligned} \tag{6.28}$$

在求解方程组 (6.28) 时必须满足上述初始条件、间断面 (爆炸波) 上的边界条件和以下条件: 在每一时刻, 球面激波所包围的气体的总能量等于爆炸能量 E 与球面 S 内原先静止的气体的初始能量之和.

我们将在 §8 中更详细地分析这个问题的解的一些一般性质[1].

[1] 在以下专著中给出了这个问题的详细而完整的最终形式的解: Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 7-е изд. Москва: Наука, 1972; 9-е изд. Москва: Наука, 1981 (俄文第八版的中译本: Л. И. 谢多夫. 力学中的相似方法与量纲理论. 沈青, 倪锄非, 李维新译. 北京: 科学出版社, 1982).

爆轰波和燃烧波 在穿过间断面时, 如果能量和熵因为某些物理化学过程 (燃烧、液化、气化、化学反应等) 而发生改变 (释放或吸收), 基本方程 (6.8) 的形式就会发生变化. 这时, 等式 (6.11) 被替换为

$$U_2(p_1,\ V_1) - U_1(p_1,\ V_1) = q^*, \tag{6.29}$$

式中 q^* 是在物质微元穿过间断面时释放出来的化学能或其他能量, 并且对于燃烧或液化 $q^* > 0$, 对于气化 $q^* < 0$. 在这种情况下, 相应的于戈尼奥绝热线方程可以写为以下形式[1]:

$$U_2(p_2,\ V_2) - U_1(p_1,\ V_1) = \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_1 - V_2) + q^*.$$

突跃膨胀在 $q^* > 0$ 时是燃烧前锋所特有的, 而突跃压缩在 $q^* > 0$ 时对应着爆轰波.

具有爆轰波的活塞问题 具有平面波和球面波的上述活塞问题可以变得更加复杂一些, 如果认为其中产生的突跃压缩是爆轰波. 这时, 原来静止的气体是能爆炸的混合物, 而爆轰波前锋之后是另一种气体 (混合物发生反应后的生成物). 在混合物爆轰问题中, 运动的平面活塞之前 (活塞与爆轰波之间) 的气体也进行平动, 只要活塞以足够大的速度向气体方向匀速运动. 在出现爆轰波以后, 如果活塞的速度很小或者干脆静止, 或者向气体的反方向运动, 则在所得解中, 爆轰波仍沿气体传播, 而在活塞和爆轰波之间的气体作参量发生变化的连续运动.

完全气体的激波关系式 在许多应用中, 例如在研究物体的超声速常速运动的一些空气动力学基本问题中, 可以使用完全气体模型, 并在与飞行物固连的坐标系中研究气体的这样的定常运动, 其中具有静止的突跃压缩——激波. 这些应用的理论基础是下面的一些关系式, 这些关系式可以代替基于于戈尼奥绝热线的分析.

对于完全气体, 我们有

$$U = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \text{const},$$

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

根据 (6.1)—(6.4), 容易把间断面之后的量 $v_{\tau 2}$, v_{n2}, ρ_2, p_2 通过间断面之前的量 $v_{\tau 1}$,

[1] 在以下专著中可以了解对相应于戈尼奥绝热线的详细分析: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. 2-е изд. Москва: Гостехиздат, 1954 (Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席兹. 连续介质力学. 第二册. 彭旭麟译. 北京: 人民教育出版社, 1960); Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. 2-е изд. Москва: Наука, 1966; 3-е изд. Москва: Наука, 1980 (俄文第一版的英译本: Sedov L. I. Two-Dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics. New York: Wiley, 1965).

v_{n1}, ρ_1, p_1 表示出来, 从而有

$$v_{\tau 2}=v_{\tau 1},\quad v_{n2}=v_{n1}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{2}{\gamma+1}\frac{a_1^2}{v_{n1}^2}\right), \tag{6.30}$$

$$\rho_2=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\rho_1}{1+\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{a_1^2}{v_{n1}^2}}, \tag{6.31}$$

$$p_2=\frac{2}{\gamma+1}\rho_1 v_{n2}^2\left(1-\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{a_1^2}{v_{n1}^2}\right). \tag{6.32}$$

矢量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 所确定的平面 π 就是间断面法线方向和切向速度 $\boldsymbol{v}_{\tau 1}$ 的方向所确定的平面. 在平面 π 上取笛卡儿坐标轴, 并用 β 表示激波与平面 π 的交线与 x 轴之间的夹角, 用 θ 表示速度与 x 轴之间的夹角, 用 u, v 表示速度分量. 显然,

$$\begin{aligned} v_\tau &= |\boldsymbol{v}|\cos(\beta-\theta)=u\cos\beta+v\sin\beta,\\ v_n &= |\boldsymbol{v}|\sin(\beta-\theta)=u\sin\beta-v\cos\beta. \end{aligned} \tag{6.33}$$

我们选取这样的坐标系, 使得在激波上所研究的点的 x 轴方向与速度 $\boldsymbol{v}_1$ 的方向一致 ($|\boldsymbol{v}_1|=u_1,\ v_1=0$). 把 (6.30) 中的 v_τ 和 v_n 用 u, v 和 β 表示, 再利用 (6.33) 消去 β, 得

$$v_2^2=(u_1-u_2)^2\frac{\dfrac{2}{\gamma+1}\left(u_1-\dfrac{a_1^2}{u_1}\right)-(u_1-u_2)}{u_1-u_2+\dfrac{2}{\gamma+1}\dfrac{a_1^2}{u_1}}. \tag{6.34}$$

激波极线是扭结线　在坐标轴分别是 u_2, v_2 的速端曲线平面 $\boldsymbol{v}_2(u_2,\ v_2)$ 上 (该平面对应平面 π), 方程 (6.34) 所定义的曲线称为激波极线, 它是一条扭结线 (图 56).

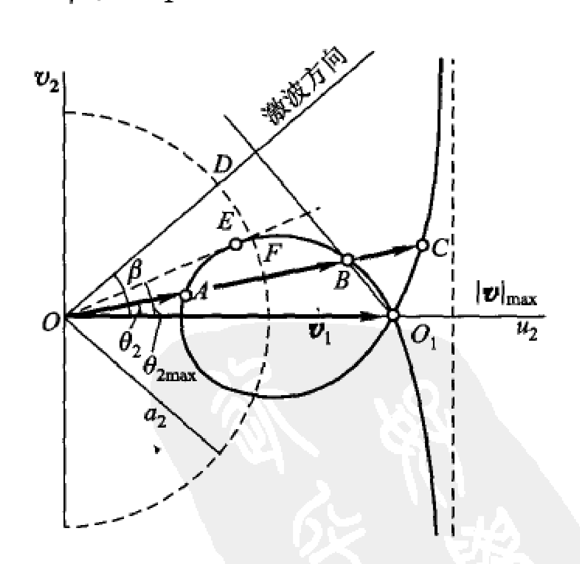


图 56. 激波极线是扭结线; $\overline{OD}$ 表示激波方向, $\overline{OB}$ 是间断面之后的气体速度矢量, $\overline{OO_1}$ 是间断面之前的速度

在间断面之后, 速度的每一个倾角值 θ_2 都对应激波极线上的 3 个速度值: A, B, C. 从间断面切向速度连续的条件可知, 经过扭结线上的点 O_1 和对应于间断面之后的速度的点引直线, 再从坐标原点 O 引该直线的垂线, 所得垂线的方向就是由角 β 给出的间断面方向; 在图中, 点 B 就是这样的点. 显然, 对于点 C 所对应的间断面, 成立不等式 $v_n=v_{n2}-v_{n1}<0$. 因此, 根据 (6.10), 这一速度值对应突跃膨胀. 扭结线延伸到无穷远的两段分支上的点所对应的间断在物理上无法实现, 所以应当去掉这两段分支. 当点 B 趋向点 O_1 时, 直线 O_1B 成为扭结线在点 O_1 的切线, 这个极限给出了强度无穷小的间断面的方向.

正激波和斜激波 速度 v_1 垂直于间断面的激波称为正激波, 不满足这个条件的激波称为斜激波.

气体穿过斜激波后速度发生偏转 气体微元穿过斜激波后, 速度矢量向间断面切向偏转. 速度偏转的最大值出现在从点 O 向扭结线所引切线的切点 E (见图 56), $\theta_2=\theta_{2\max}$. 与点 E 相对应的是接近声速的亚声速. 在图 56 中用虚线标出了对应于声速[1] 的圆, $|\boldsymbol{v}_2|=v_c=a_2^*$. 此圆在点 F 与扭结线相交. 当点 B 位于点 F 右边时, 间断面之后的速度值 $|\boldsymbol{v}_2|$ 是超声速的, 而对于点 A 以及不长的曲线段 EF 上的点 B, $|\boldsymbol{v}_2|$ 是亚声速的. 由公式 (6.30) 可知,

$$\tan(\beta-\theta_2)=\tan\beta\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{1}{(\gamma+1)M_1^2(1-\cos^2\beta)}\right], \tag{6.35}$$

式中 $M=v/a$ 表示一个无量纲量, 而 $M_1=v_1/a_1$ $(v_1=|\boldsymbol{v}_1|)$.

量 M 称为马赫数. 对于超声速运动 $M>1$, 对于亚声速运动 $M<1$. 由公式 (6.35) 可知, 速度偏转角 $\delta=\theta_2-\theta_1$ (在图 56 中是 θ_2) 依赖于马赫数 M_1 和角 β. 最大可能偏转角 $\delta_{\max}$ 只依赖于激波前的来流马赫数 M_1. 在图 57 中给出了 $\delta_{\max}$ 对马赫数 M_1 的依赖关系图.

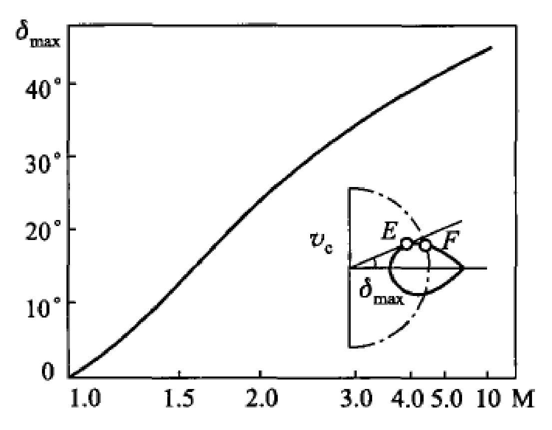


图 57. 气体穿过激波时速度的最大可能偏转角与马赫数之间的关系 $(\gamma=1.4)$

绕角形区域和楔形物体的超声速流动 利用斜激波条件能够直接构造出超声速平动来流绕角形区域和楔形物体的流动问题的解 (图 58). 直接可以看出, 图 58 所表示的流动示意图满足绕角形区域和楔形物体的流动问题的所有条件. 但是从前面的结果可知, 对于给定的来流马赫数, 只有在角 δ, δ_1 和 δ_2 小于或等于角 $\delta_{\max}$ 的条件下, 才能得到这些问题的解. 如果满足这些条件, 上述绕流示意图就可以实现.

然而, 上述每一个问题在 $\delta<\delta_{\max}$ 时都有激波方向不同的 2 个解, 并且气体在穿过激波时都会发生速度偏转, 以满足绕流所必须的条件, 只是激波之后的速度值有所不同. 例如, 这 2 个解对应图 56 中的点 B 和 A.

在实际应用中, 对细长体可以实现小角度激波所对应的运动, 激波后的速度仍然很高, 与之相应的是点 B. 对角形区域和楔形物体的这样的理论解与细长体超声速绕流的实验数据符合得很好.

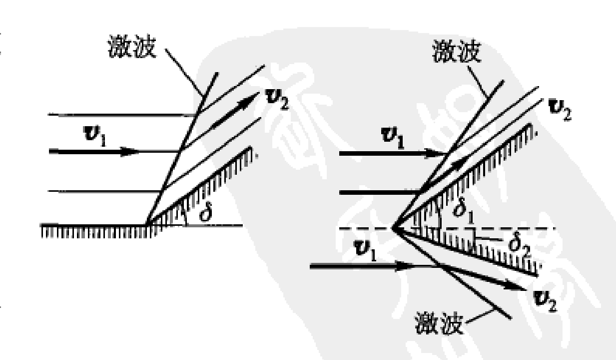


图 58. 绕角形区域和相对于来流速度非对称放置的楔形物体的流动

[1] 可以证明, 当间断面之前的参量给定时, 临界速度 (等于局部声速) 与间断面的倾角无关.

具有脱体激波的绕流 如果 $\delta > \delta_{\max}$, 则按照示意图 58 进行的绕流是不可能的. 这时, 在物体前面形成一道弯曲的激波 (图 59). 从物体顶点到激波端点的距离 AO 正比于物体的大小, 还依赖于楔形物体的顶角和马赫数 M_1. 当 $l \to \infty$ 时, 激波位于楔形物体前方无穷远处, 物体前方的气流是亚声速的.

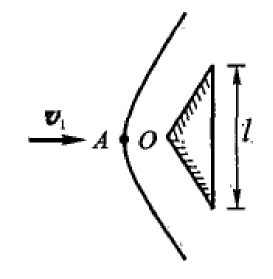


图 59. 在绕大顶角楔形物体的流动中, 在有限物体前方某处形成激波

激波导致机械能损失 在本节最后我们指出, 在绝热流动中出现激波, 这与熵增所导致的可用机械能的不可逆损失有关.

对于完全气体的内能, 可以写出

$$U = c_V + \text{const} = c_V T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{s-s_0}{c_p}} + \text{const}$$

考虑激波前和激波后某种具有特征意义的静止状态 (气体绝热减速至 $v = 0$ 时的状态) [1], 在这些状态下的压强和温度分别表示为 p_1^*, p_2^* 和 T_1^*, T_2^*. 如果在气体微元穿过激波时没有发生化学反应或相变 (即在等式 (6.29) 中 $q^* = 0$), 则由完全气体情况下的 (6.4) 可知

$$T_1^* = T_2^*,$$

所以

$$e^{\frac{s_1-s_0}{c_p}} p_1^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}} = e^{\frac{s_2-s_0}{c_p}} p_2^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad \text{或} \quad \left(\frac{p_1^*}{p_2^*}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = e^{\frac{s_2-s_1}{c_p}}.$$

如果有不可逆损失, 则 $s_2 - s_1 > 0$, 由此可知 $p_2^* < p_1^*$. 因此, 穿过激波的气体在上述意义的静止状态下具有更小的压强, 其做功能力 (技术上的可用性) 降低.

通过对于戈尼奥绝热线的研究可以看出, 随着压强差 $p_2 - p_1$ 所表征的激波强度的增加, 熵增越来越大, 损失从而也越来越多. 当来流马赫数 M_1 给定时, 正激波的强度最大. 斜激波所导致的损失总是小于正激波所导致的损失 [2].

§7. 物理量的量纲和 Π 定理

物理关系式相对于坐标系的选择的不变性 在实际写出方程并进行具体的数值计算时, 必须引入和使用不同的坐标系. 这些坐标系在一般情况下可以是任意的, 但是在许多情况下, 坐标系的选择是为了计算或者对数值结果的分析更加简单和方便. 在选择坐标系时可能出现的随意性来自对被研究的现象所

[1] 见第二卷第八章 §5.

[2] 可以在以下专著中了解更加完整的激波系损失理论: Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. 2-е изд. Москва: Наука, 1966; 3-е изд. Москва: Наука, 1980 (俄文第一版的英译本: Sedov L. I. Two-Dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics. New York: Wiley, 1965). 还可以参考本书第二卷第八章 §9.

采用的描述方法，而与这些现象的实质无关，所以表示某些物理性质和现象的各种方程应当具有相对于坐标系的选择不变的性质.

物理方程的张量本质 这是因为，前面引入的所有方程和附加关系式都具有标量方程、矢量方程或者一般的张量方程的形式. 这也正是运动和状态的许多特征量具有不变的张量本质的原因. 因此，有必要发展和使用张量分析，并以不变的张量形式来表述所有的物理关系式.

有量纲量 另一方面，利用数值来定义和给出各种量——介质、场和过程的特征量，例如密度、能量、速度、电荷等——关系到对确定的计量单位的使用，而计量单位的选择也与研究者有关. 若一个量的数值在所研究的问题中依赖于计量单位的选择，则此量称为有量纲量. 例如，能量可以用公斤米、焦耳、卡、吨煤、千克铀、卢布[1] 以及其他许多单位来量度，相应的确定能量值的数值与计量单位的选择有密切的关系.

各种各样的诸多特征量通过不同的定义和方程联系在一起，对这些量的处理表明，不同特征量的计量单位之间一般而言是有联系的. 例如，速度 $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 的计量单位与长度 $\mathrm{d}s$ 和时间 $\mathrm{d}t$ 的计量单位有关.

原始 (基本) 计量单位 在考虑互相有联系的计量单位的同时，还需要考虑原始的、独立的计量单位，它们一般而言是借助于专门的、理论上任意的条件通过实验引入的. 例如，长度、时间和质量的各种原始的或基本的计量单位就是用众所周知的方法引入的. 若一个量的计量单位是借助于原器按照条件通过实验引入的，则此量称为原始量或基本量，而该计量单位称为原始单位或基本单位.

派生 (导出) 计量单位 其余各量的计量单位则根据这些量的定义通过原始计量单位得出，它们称为导出单位或派生单位.

各种单位制 可以取不同的量用来选择原始计量单位. 在不同的应用领域中，以取该领域自己的原始计量单位作为原始计量单位为宜，并且在不同情况下原始计量单位是不同的. 由此产生了不同的单位制，产生了从一个单位制到另一个单位制的转换 (换算) 问题.

现在普遍应用以下单位制: 采用厘米、克、秒[2] 作为原始计量单位的 CGS 制，采用米、千克力、秒作为原始计量单位的 MKS 制，采用米、千克、秒、安培、开尔文、坎德拉作为原始计量单位的 SI 制[3]，以及其他单位制.

在力学中 (一般而言，在实践中)，常常只采用 3 个原始计量单位 (例如在应用 CGS 和 MKS 单位制时就是这样)，而包括电磁场特征量在内的所有其他量的计量单

[1] 卢布是俄罗斯货币单位. ——译注

[2] 这里我们认为，由物理学的一般教程已经知道定义原始计量单位的实际条件，即认为已知什么是秒等单位.

[3] SI 制即国际单位制，目前包括米、千克、秒、安培、开尔文、摩尔、坎德拉这 7 个基本单位，它们分别是长度、质量、时间、电流、热力学温度、物质的量、发光强度这 7 个相互独立的基本物理量的单位. ——译注

位都视为导出计量单位.

基本计量单位一经确立, 其他具有导出计量单位的有量纲量的计量单位就由这些量的定义自动得出.

量纲公式　通过基本计量单位表示导出计量单位的表达式称为量纲. 量纲写为公式的形式. 在 CGS 制中, 量纲公式包含 3 个自变量: 长度单位的符号 L, 时间单位的符号 T 和质量单位的符号 M. 例如, 力的计量单位的符号记作

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2} = \mathrm{MLT}^{-2}.$$

在 CGS 制中, 所有物理量的量纲公式都具有幂次单项式的形式[1]:

$$\mathrm{N} = \mathrm{L}^l\mathrm{T}^t\mathrm{M}^m, \tag{7.1}$$

式中的幂指数 l, t, m 为某些整数或实分数. 在 MKS 制中, 量纲公式的形式为

$$\mathrm{N} = \mathrm{L}^{l_1}\mathrm{T}^{t_1}\mathrm{K}^{k_1}, \tag{7.2}$$

式中 l_1, t_1, k_1 是相应的量纲指数.

由公式 $\mathrm{M} = \mathrm{KT}^2\mathrm{L}^{-1}$, 把公式 (7.1) 中的符号 M 替换为符号 K, 就可以从公式 (7.1) 转换至相应的公式 (7.2).

当原始计量单位的值改变时, 利用量纲公式就能够确定相应特征量换算的比例因子. 当从给定的计量单位转换至新的计量单位时, 如果长度、时间和质量的单位 L, T 和 M 分别缩小到原来的 $1/\alpha$, $1/\beta$ 和 $1/\gamma$, 则具有量纲 (7.1) 的量的新单位 N 将缩小为原来的 $1/\alpha^l\beta^t\gamma^m$. 由此可以容易地确定在原始计量单位的值发生改变时派生计量单位进行转换的比例因子.

原始计量单位的数目　原始计量单位的数目可以 (也经常) 大于 3. 例如, 在气体力学和热力学的许多问题中, 除了把米、千克和秒作为通过实验确定的原始计量单位, 通常还使用摄氏度或华氏度等作为温度的计量单位, 使用小卡或大卡作为热量的计量单位. 因此, 可以考虑并使用含有 5 个原始计量单位的单位制. 还可以考虑并使用含有与电磁场等有关的原始计量单位的单位制. 在这些情况下, 量纲公式具有比 (7.1) 包含更多数目自变量的幂次单项式的形式.

关于增加原始计量单位数目的可能性　一般而言, 可以引入含有任意数目原始计量单位的单位制. 例如, 对于长度、时间和速度, 可以通过实验选取其独立的计量单位, 但此时速度公式应写为以下形式:

$$v = k\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \tag{7.3}$$

[1] 可以在以下专著中了解更为详细的量纲理论以及量纲公式 (7.1) 的证明: Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 7-е изд. Москва: Наука, 1972; 9-е изд. Москва: Наука, 1981 (俄文第八版的中译本: Л. И. 谢多夫. 力学中的相似方法与量纲理论. 沈青, 倪锄非, 李维新译. 北京: 科学出版社, 1982).

式中 k 是有量纲的常量, 它与 v, $\mathrm{d}s$ 和 $\mathrm{d}t$ 的计量单位的选择有关. 如果认为 k 是等于 1 或不等于 1 的绝对的常数 (即它在我们使用的所有单位制中都取同一数值), 则 v, $\mathrm{d}s$ 和 $\mathrm{d}t$ 的计量单位在任何单位制中都是不独立的.

在实践中通常总是采用这样的条件.

如果考虑关系式

$$I \times \text{热量} = \text{机械能},$$

则可以为热量和机械能单独选择独立的计量单位, 例如卡和公斤米. 这时, 在公式和方程中出现一个有量纲的常量 I, 即热功当量, 其量纲为

$$[I] = \frac{\text{公斤米}}{\text{卡}}.$$

"物理"常量 I 类似于 (7.3) 中的常量 k.

关于减少原始计量单位数目的可能性

当热量和机械能具有独立的计量单位时, 常量 I 可以视为有量纲的量, 而如果热量和机械能的计量单位仅仅象英尺和米的区别那样是同一个量的不同计量单位, 那么常量 I 就可以视为无量纲的比例常数. 可以类似地考虑物理学的基本方程

$$E = mc^2, \tag{7.4}$$

式中 E 是能量, m 是质量, c 是真空中的光速. 如果认为方程 (7.4) 中的 c 是普适常数, 它在一类可能的单位制中可以等于 1 (类似于公式 (7.3) 中的 k), 则这时能量和质量的可能的不同计量单位便是不独立的 (正如在 $k = 1$ 时 (7.3) 中的 v, $\mathrm{d}s$ 和 $\mathrm{d}t$ 的计量单位那样).

这类方法可以作为减少原始计量单位数目的基础. 如果在万有引力定律

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

中固定有量纲的普适常量 f, 就得到质量、时间和距离的原始计量单位之间的附加关系.

通过这样的途径可以得到具有不同数目原始计量单位的单位制. 尤其, 可以引入具有普适计量单位的单位制, 使一切量的计量单位都永远固定, 从而可以把所有的量都视为无量纲的.

有量纲量和无量纲量的相对性

有量纲量和无量纲量的概念是相对的, 这种相对性应该这样理解. 在研究某个或某些现象时, 我们引入过程和对象的各种变化的或不变的特征量. 为了得到这些量的数值, 我们明显地或隐含地实际上使用或潜在地允许有一系列备用的单位制.

若一个量的数值依赖于诸多可能的单位制中的某个具体单位制的选择, 则此量称为有量纲量. 若一个量的数值在所有这些单位制中都相同, 则此量称为无量纲量.

例如, 作为几何对象的角可以对应弧度、度、直角的分数等各种数, 所以角应该

视为有量纲量, 诸多可能的单位制中包含有角的各种计量单位. 但是如果我们只考虑这样的单位制, 其中只用弧度来量度角, 则角就可以看作无量纲量. 在实践中经常采用这个条件来量度角.

用这种方法可以把任何其他量 (例如时间和长度) 当作无量纲量, 这时应当相应地取这样的备用单位制, 使该量的计量单位在所有用于该问题的单位制中均相同. 在应用中, 角无量纲的条件是方便的, 长度无量纲的条件则不方便, 因为对于几何相似的系统, 对应的角相等, 而对应的长度却不等.

作为所研究的函数的自变量而出现的有量纲的物理量

以后将得出, 在某些情况下增加原始计量单位的数目一般而言是方便的. 然而, 当原始计量单位的数目增加时, 由此带来的方便通常是无效的, 因为此时将出现对于所研究的问题很重要的一些附加的物理常量, 例如热功当量 I, 光速 c 或万有引力常量 f. 类似的常量将出现在描述过程的方程和问题的其他条件中, 它们必须列入主定参量[1] 和所研究的函数关系之中. 因此, 正如下面将指出的, 增加原始计量单位的数目在一般情况下并不会带来额外的简化. 不过, 如果从附加的物理考虑可知, 这类物理常量 (如 I 或 f) 在该函数关系中是非实质性的, 那么由此就可以获得极大的好处.

正是由于这个原因, 具有固定的常量值 I, c, f 的标准单位制并不方便, 在实践中的许多技术和物理问题中也不应用这样的单位制.

关于使用多种单位制可能带来的好处

在某些科学问题中清楚地显现出标准化和在管理上引进普适单位制的趋势, 这在许多情况下显然是非常方便和有益的. 然而, 普适单位制与确定的物理常量或条件之间的联系在很多情况下是人为的, 并且使用任意计量单位的可能性本身和所研究的规律相对于单位制的选择的独立性反而可以给出有用的结论. 所以在运用统一的计量单位的同时, 还要求把任意的各类计量单位的理论发展成为有效的实验和理论方法的基础.

在这些问题中, 选择单位制、选择坐标系乃至一般地选择参考系是完全类似的. 我们当然可以固定完全确定的同一个普适参考系, 并且只在这个参考系下研究所有问题, 不过, 能够应用不同的参考系, 能够在具体问题中应用表征其特性的专门的参考系, 这种可能性本身就是物理学中卓有成效的研究方法的基础. 此外, 关于物理定律相对于坐标系和参考系 (例如惯性参考系) 的选择不变的物理学基本原理在已知的意义下是动量守恒定律、能量守恒定律、动量矩守恒定律这些普适物理定律的另外一种表述.

在某些问题中 (但是特别强调, 并非在所有问题中), 除了物理定律相对于伽利略变换群或洛伦兹变换群的普适不变性, 还补充有所研究的函数关系相对于相似变换群的不变性, 这种性质决定于所有方程和附加条件在相似变换下能够保持不变, 而

[1] 量纲理论中的主定参量是指在所研究的问题中起决定作用的参量, 即函数 (7.5) 的自变量. ——译注

相似变换正好等价于从一个单位制到另一个单位制的转换.

Π 定理 现在考虑相对于单位制的选择不变的物理规律, 并研究表示这些规律的一般有量纲的物理量之间的函数关系的结构.

设我们有某个有量纲的或无量纲的量 a, 它是一些相互独立的一般有量纲的量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的函数:

$$a = f(a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n). \tag{7.5}$$

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的某些量在所研究的过程中可以是常量, 其他量则是变量. 对于变量, 我们假设其值不等于零或无穷大, 或者当相应的自变量等于零或无穷大时函数 (7.5) 是连续的.

我们认为, 在函数关系 (7.5) 的自变量中列出了所研究的量 a 的值所依赖的所有的有量纲的和无量纲的常量和变量.

假定 (7.5) 中的函数 f 表述某个与单位制的选择无关的物理规律, 我们现在寻求此函数的结构.

设在有量纲量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中, 前 k 个量 ($k \leqslant n$) 具有独立的量纲 (基本计量单位的数目应当大于或等于 k).

量纲独立的含义是, 一组量中任何一个量的量纲公式不能以幂次单项式的形式表示为其他各量的量纲公式的组合. 例如, 长度的量纲 L, 速度的量纲 L/T 和能量的量纲 $\mathrm{ML^2/T^2}$ 是独立的, 而长度的量纲 L, 速度的量纲 L/T 和加速度的量纲 $\mathrm{L/T^2}$ 则是相关的.

在力学量中, 具有独立量纲的量通常不超过 3 个. 我们假设 k 等于量纲独立的参量的最大数目, 于是量 $a, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 的量纲可以通过参量 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的量纲表示出来.

取 k 个量纲独立的量 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 作为基本量, 并对它们的量纲引入记号

$$[a_1] = A_1, \quad [a_2] = A_2, \quad \cdots, \quad [a_k] = A_k.$$

其余量的量纲将具有以下形式:

$$[a] = A_1^{m_1} A_2^{m_2} \cdots A_k^{m_k}, \quad [a_{k+1}] = A_1^{p_1} A_2^{p_2} \cdots A_k^{p_k}, \quad \cdots, \quad [a_n] = A_1^{q_1} A_2^{q_2} \cdots A_k^{q_k}.$$

现在把量 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的计量单位分别改变为原来的 $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, \cdots, 1/\alpha_k$, 则在新的单位制中, 这些量和量 $a, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 的数值将分别等于

$$\begin{aligned}
a_1' &= \alpha_1 a_1, & a' &= \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \cdots \alpha_k^{m_k} a, \\
a_2' &= \alpha_2 a_2, & a_{k+1}' &= \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \cdots \alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \\
&\cdots & &\cdots \\
a_k' &= \alpha_k a_k, & a_n' &= \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \cdots \alpha_k^{q_k} a_n.
\end{aligned}$$

关系式 (7.5) 在新的单位制中具有以下形式:

$$a' = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\cdots\alpha_k^{m_k}a = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\cdots\alpha_k^{m_k}f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$
$$= f(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \cdots, \alpha_k a_k, \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\cdots\alpha_k^{p_k}a_{k+1}, \cdots, \alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2}\cdots\alpha_k^{q_k}a_n). \tag{7.6}$$

该等式表明, 函数 f 对于量 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的计量单位是齐次的.

我们利用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 的选取来减少函数 f 的自变量的数目. 令

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{a_2}, \quad \cdots, \quad \alpha_k = \frac{1}{a_k}.$$

在这样选取比例 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 时, 不论量 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的数值等于多少[1], 关系式 (7.6) 右边部分的前 k 个自变量的值都将等于 1. 于是, 利用关系式 (7.5) 被假定与单位制的选择无关这一情况, 我们将这样选取单位制, 使函数 f 的 k 个自变量都取等于 1 的固定常数值.

在这个相对的单位制中, 参量 $a, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 的数值由以下公式确定:

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_k^{m_k}}, \quad \Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_k^{p_k}}, \quad \cdots, \quad \Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_k^{q_k}},$$

式中 $a, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是所研究的量在原先的单位制中的数值.

不难看出, $\Pi, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-k}$ 的值与原先的单位制的选取无关, 因为它们相对于计量单位 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 来说是无量纲的. 此外, $\Pi, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-k}$ 的值显然根本与表示量纲独立的量 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的 k 个计量单位所用的单位制的选取无关. 因此, 量 $\Pi, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-k}$ 可以看作是无量纲的. 于是, 在任何单位制中, 关系式 (7.5) 可以表示为如下形式:

$$\Pi = f(\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{k}, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-k}), \tag{7.7}$$

式中 Π 和函数 f 的所有自变量都是无量纲的.

因此, 含有 k 个量纲独立的量的 $n+1$ 个有量纲量 $a, a_1, \cdots, a_n$ 之间的关系与单位制的选择无关, 这个关系可以化为由 $n+1$ 个有量纲量组合而成的 $n+1-k$ 个无量纲量 $\Pi, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-k}$ 之间的关系. 量纲理论的这一普遍结论就是著名的 Π 定理.

如果某一个无量纲量是许多有量纲量的函数, 则此函数只能依赖于由所有决定它的有量纲量组成的无量纲组合.

显然, 改变函数 f 的形式, 就可以在关系式 (7.7) 中将无量纲参量组 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_{n-k}$ 替换为另一组无量纲参量, 它们都是 $n-k$ 个无量纲参量 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_{n-k}$ 的函数.

[1] 为简单起见, 我们认为参量 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 取有限值且不等于零. 显然, 以后的结论可以推广到 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 等于零或无穷大的情况, 只要函数 f 对自变量的这些值保持连续.

不难看出, 如果 n 个参量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中量纲独立的参量的数目不超过 k, 则由这 n 个参量无法组成超过 $n-k$ 个独立的无量纲组合. 这可以直接从关系式 (7.7) 的推导得出, 只要我们选出任何一个由量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的无量纲组合并把它取作量 a 即可.

有量纲量之间的各种物理关系都可以表述为无量纲量之间的关系. 应用量纲分析研究物理问题之所以富有成效, 其原因其实就在于此.

被研究的量的主定参量的数目越少, 函数关系在形式上受到的限制就越大, 研究就越容易进行. 特别地, 如果所有主定参量都有独立的量纲, 则利用量纲理论就可以完全确定该函数关系, 精确到只相差一个常数因子.

其实, 若 $n=k$, 则由参量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不能组成无量纲组合, 所以函数关系式 (7.7) 可以表示为以下形式:

$$a = Ca_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n},$$

式中 C 是无量纲常数, 而指数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 容易由 a 的量纲公式确定. 此时, 无量纲常数 C 可以或者由实验确定, 或者通过求解相应的数学问题从理论上确定.

显然, 我们能够选取的基本计量单位越多, 量纲理论带来的好处也应当越多.

我们在上面已经看到, 基本计量单位的数目可以任意选取. 然而, 增加基本计量单位的数目, 就要引进附加的物理常量, 这些常量也应列入主定参量. 增加基本计量单位的数目, 我们就增加了主定参量的数目. 在一般情况下, 差值 $n+1-k$ 保持不变, 亦即用以表达物理关系的无量纲参量的数目不变.

只有在下述情况下, 增加基本计量单位的数目才会带来好处, 这时由物理上的进一步思考可知, 引进新的基本计量单位时所出现的物理常量不起作用. 例如, 如果我们研究一种包含机械过程和热过程的现象, 那么, 为了量度热量和机械能, 可以引入两个不同的计量单位——卡和焦耳, 但这时必须考虑有量纲的常量 I——热功当量. 现在假设我们研究不可压缩理想流体运动中的热量传递现象, 并且不发生热与机械能的相互转化, 热过程和机械过程从而将不依赖于热功当量的值而进行. 即使我们有可能改变热功当量的值, 这也决不会影响特征量的值. 因此, 常量 I 在这种情况下不会出现在物理关系式中, 于是, 增加基本计量单位的数目, 就可以借助于量纲理论获得一些额外的重要认识.

§8. 确定一类现象的参量和应用量纲分析的典型实例

根据问题的数学提法揭示主定参量组 应用量纲理论的基础是在所研究的问题中使用 Π 定理, 由此产生了如何列出形如 (7.5) 的函数的自变量——主定参量——的问题.

在第六章热力学中, 我们已经知道了表征介质微元的状态和运动的主定参量组

的概念. 现在需要引入这样的主定参量组, 它是从我们选出的一类问题的提法中得到的, 并且完全表征了对所研究的介质的这类一般问题中的每一个单独的问题.

在提出问题时, 基本的和最初的阶段是选取连续介质的模型或模型组, 并概括所求的解的性质. 这包括, 考虑对称条件并选取适当的坐标系, 同时要确定方程组, 所求函数组及其类别, 以及独立变量.

主定参量组必须包含独立变量 (如 x, y, z, t) 和诸如热导率、黏度、弹性模量等的物理常量. 此外, 对于所研究的一类问题, 给出运动的介质所占区域 $\mathscr{D}$ 的有量纲的和无量纲的特征量必须也包含在主定参量中. 此后, 还必须对表示边界条件和初始条件时决定待求函数的量加以刻画, 并把这些量列入主定参量.

若所研究的问题已被表述为一个数学问题, 则对于所求的物理规律总是容易写出形如 (7.5) 的函数的完整的自变量表. 这就是在问题已被用数学方法提出时得到主定参量组的一般方法.

主定参量是为了用各种方法 (包括用计算机) 计算所求函数而应当给出的所有数据.

在利用实验获得所需答案时, 也必须明确地指出并列举所有主定参量. 只有在这种条件下, 实验才能够被重复, 才可以对不同实验进行比较.

挑选主定参量组不一定非要有问题的数学提法

根据问题的数学提法组成主定参量组的上述方法一般不是必须的. 一般而言, 在模型的详细性质乃至方程组未知时, 只要以有关的初步结果或假设为基础即可写出主定参量组, 其函数的形式和常量包含在或可能包含在模型的定义、初始条件、边界条件以及其他给出具体问题的条件之中.

有限的主定参量组

在研究进行某些运动的各种力学系统时, 总可以限制所允许的系统和运动的类别, 使得一个具体的系统和其中我们所关心的一个特定的运动可由有限个有量纲的和无量纲的参量来确定. 由问题的条件给出的一系列无量纲函数或常数一经固定, 就可以实现这些限制.

主定参量组应当是完全的

如果物理定律能够使用任意的专门的计量单位来描述, 以 Π 定理为基础的量纲理论就使我们能够从这一可能性中得出一些结论. 因此, 在列举一类现象的主定参量时, 必须指出与现象的本质有关的所有的有量纲参量, 不管它们是常量还是变量. 重要的是, 参量能够在不同的单位制中取不同的数值.

例如, 当重力起重要作用时, 重力加速度 g 总是必须包括在主定参量组中, 虽然 g 的值对于许多实际运动是不变的.

在把重力加速度 g 作为主定参量引进之后, 通过改变量 g 的值, 我们可以毫不麻烦地把一类运动进行人为的扩充. 这种方法使我们可以察觉并得到有关某些参量的影响的一些有价值的定性的结论, 根据 Π 定理, 这些参量只能够出现在包括重力加速度 g 的组合中.

主定参量组应当具有完全性. 在主定参量 (其中有些可能是有量纲的物理常量) 中一定要有这样的有量纲量, 通过其量纲可以把我们所感兴趣的全部待求的量的量纲都表示出来.

如果主定参量组从其量纲的角度讲是不完全的, 根据问题提法的实质也不能扩充主定参量组, 那么这就意味着, 待求量或者等于零, 或者等于无穷大. 在用狄拉克 δ 函数给出点源型的初始条件时, 我们常常遇到这种情况.

用量纲理论解题的不足之处

在一般情况下, 利用 Π 定理来研究函数关系的方法从本质上讲是有限的和不足的, 因为由此不可能建立无量纲量之间的关系. 对于运动方程的任何改变, 只要此时没有引进某些新的有量纲量, 量纲理论的所有结论就都不发生变化. 例如, 可以把运动方程中的各项分别乘以某些正的或负的无量纲数, 或分别乘以依赖于所采用的主定参量组的无量纲函数. 类似的变化并不影响量纲理论的结论, 却能够严重地影响物理规律的特性.

量纲理论对于理论和实验研究的主要好处关系到下述可能性: 物理规律能够通过相对于单位制的选择无关的无量纲的形式写出并进行研究.

气体中的球面活塞问题

考虑球面活塞问题. 设活塞在时刻 $t=0$ 开始从某一初始半径 r_0 按照给定规律 $v_n(t)=\mathrm{d}r_1/\mathrm{d}t$ 在静止气体中膨胀, 气体的初始密度为 ρ_1, 初始压强为 p_1.

为了确定理想完全气体的球对称绝热扰动, 必须求解含有 3 个方程的方程组 (6.28), 其中包括 3 个未知函数 ρ, p 和 v. 显然, 可以取量

$$\gamma,\ \rho_1,\ p_1,\ r_0,\ r,\ t$$

和活塞膨胀规律

$$v_n(t)$$

作为待求函数的独立自变量, 它们的取值是由我们给出的. 其中, $\gamma=c_p/c_V$ 是无量纲常数——绝热线指数, 它出现在绝热性方程和激波条件中. 为了得到有限数目的主定参量组, 可以选取活塞膨胀规律 $v_n(t)$ 的一些确定的形式, 只要这些形式依赖于有限数目的参量. 例如, 如果活塞匀加速膨胀, 或者在更一般的情况下, 如果 $v_n(t)$ 是多项式, 则应当取相应多项式的系数作为主定参量.

我们来考虑一个最简单的重要情况: 活塞在时刻 $t=0$ 突然开始以速度

$$v_n=\mathrm{const}=v_0$$

匀速膨胀. 在这种情况下, 主定参量组可以写为以下形式:

$$\gamma,\ \rho_1,\ p_1,\ v_0,\ r_0,\ r,\ t, \tag{8.1}$$

或

$$\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \frac{r_0}{r},\ \frac{r}{a_1 t},\quad \text{其中}\quad a_1=\sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}} \tag{8.2}$$

(a_1 是无扰动状态所对应的声速).

根据 Π 定理, 对待求函数可以写出以下形式的公式:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \rho_1 f_1\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \frac{r_0}{r},\ \frac{r}{a_1 t}\right),\\
p &= p_1 f_2\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \frac{r_0}{r},\ \frac{r}{a_1 t}\right),\\
v &= v_0 f_3\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \frac{r_0}{r},\ \frac{r}{a_1 t}\right).
\end{aligned} \tag{8.3}
$$

在公式 (8.3) 中, 无量纲函数 f_1, f_2, f_3 通过 4 个无量纲参量表示, 其中 2 个参量 r_0/r, $r/a_1 t$ 是变量.

现在可以把方程 (6.28) 通过函数 f_1, f_2, f_3 改写为无量纲形式. 这些方程成为以 2 个独立变量

$$\xi = \frac{r_0}{r}, \quad \eta = \frac{r}{a_1 t}$$

为自变量的偏微分方程.

如果进一步做理想化假设, 认为活塞在初始时刻从一点开始膨胀, 即认为 $r_0 = 0$, 则我们所研究的问题根据公式 (8.3) 可以大为简化.

在这种情况下, 主定参量组 (8.2) 不再包括特征尺度 ($r_0 = 0$), 所以在 (8.3) 中也会减少 1 个变量 ($\xi = r_0/r = 0$). 因此, 这时 Π 定理给出以下结论: 待求函数的形式变为

$$
\begin{aligned}
\rho &= \rho_1 f_1\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \eta\right),\\
p &= p_1 f_2\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \eta\right),\\
v &= v_0 f_3\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \eta\right),
\end{aligned} \tag{8.4}
$$

即待求函数只可能依赖于变量 r 和 t 的组合

$$\eta = \frac{r}{a_1 t}.$$

因此, 通过对问题提法的研究, 我们根据量纲理论证明了, 上述球面活塞从一点开始膨胀的问题是自相似的.

将 (8.4) 代入方程 (6.28), 我们得到函数 f_1, f_2 和 f_3 的常微分方程. 原来的非线性偏微分方程组大为简化, 因为现在需要求解的是常微分方程, 尽管它们仍然是非线性的.

显然, 所有上述结论对于气体一维非定常运动的其他一些问题也成立, 只要主定参量组可以由 (8.1) 或 (8.2) 给出, 或者其中再补充其他参量, 例如补充一个有量纲的常参量 q^*, 它对应从爆轰波或燃烧波前锋释放出来的质量能量. 因为 q^* 具有速度的平方的量纲, 所以对于从一点开始膨胀的活塞问题, 即 $r_0 = 0$ 的活塞问题, 如果

在扰动区域中有爆轰波或燃烧波, 则问题的自相似解具有以下形式:

$$\rho = \rho_1 f_1\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \frac{q^*}{a_1^2},\ \frac{r}{a_1 t}\right),$$
$$p = p_1 f_2\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \frac{q^*}{a_1^2},\ \frac{r}{a_1 t}\right),$$
$$v = v_0 f_3\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \frac{q^*}{a_1^2},\ \frac{r}{a_1 t}\right).$$

尽管这时常参量的数目增加, 但运动仍是自相似的, 因为在本质上只有 1 个变量.

对自相似活塞问题更加详细的研究表明, 在活塞前面会产生沿未扰动气体传播的球面激波. 如果研究激波的运动特征量, 则自相似问题中的球面激波半径 r_2 决定于参量

$$\gamma,\ v_0,\ a_1,\ q^*,\ t.$$

因为利用这些参量无法组成包括时间变量 t 的无量纲组合, 所以对 r_2 可以得出公式

$$r_2 = a_1 t f\left(\gamma,\ \frac{v_0}{a_1},\ \frac{q^*}{a_1^2}\right).$$

由此可知, 在所研究的问题中, 无论在激波中是否有能量释放, 激波前锋都以常速均匀膨胀. 这是一个非常重要的结果, 并且不必完全求解问题就可以得到这一结果.

可以推广上述方法, 从而研究给出自相似解的各种各样的问题提法. 我们注意到, 在上面的问题中保证自相似解存在的是 2 个条件: 其一, 没有特征尺度 r_0; 其二, 从已有常量不能组成具有时间量纲的常量.

如果把活塞的匀速膨胀问题改为匀加速膨胀问题, 则解的相似性消失, 相应的气体力学问题具有更高级别的难度.

点爆炸问题 现在对 §6 中提出的点爆炸问题进行量纲分析. 容易看出, 该问题的主定参量组可以表示为

$$\gamma,\ \rho_1,\ p_1,\ E,\ r,\ t. \tag{8.5}$$

容易直接验算, 相应 3 个无量纲独立参量 ($n = 6$, $k = 3$) 可以取为

$$\gamma, \quad \lambda = \frac{\rho_1^{1/5} r}{E^{1/5} t^{2/5}}, \quad \tau = \frac{p_1^{5/6} t}{E^{1/3} \rho_1^{1/2}}. \tag{8.6}$$

爆炸产生激波, 对于激波前锋之后的压强分布, 成立以下形式的公式:

$$p = \frac{E}{r^3} f(\gamma,\ \lambda,\ \tau). \tag{8.7}$$

在这个公式中有 λ 和 τ 这 2 个变量, 所以点爆炸问题和它的解不是自相似的. 利用方程 (6.28) 以及附加的初始条件和边界条件可以求出公式 (8.7) 中的函数 f 的形式, 例如通过数值计算的方法. 还可以提出通过实验确定这个函数的问题. 在这两

种情况下, 关于函数关系 (8.7) 的结构的结论具有重要的应用价值和理论价值.

当然, 这时得到的结果只有在问题的概括和提法所要求的那些基本假设 (忽略辐射, 均匀性, 空气原来静止等) 成立时才符合实际情况. 我们指出, 问题的这个提法幸好在许多重要情况中 (但并非总是如此) 基本符合实际情况, 因而是有用的.

为了 (在 γ 固定时) 建立函数关系 (8.7), 只要利用某些具体数据进行唯一的一次计算即可. 例如, 如果我们对空气中的火花放电进行计算, 这就能够确定原子弹爆炸时的相应有量纲量. 同样, 在确定的高度上, 即当 ρ_1 和 p_1 已知时, 也只要进行唯一的一次具有给定能量的实验性爆炸即可. 利用在这次实验中得到的测量结果, 就能够计算并预测所有其他实验的相应参量, 这些实验具有不同的能量 E 和表征均匀大气的其他已知的特征量.

在每一次这样的计算或实验中, 都能够得到关于函数 $f(\gamma,\ \lambda,\ \tau)$ 的数据, 利用这些数据显然足以描述任何其他条件下的点爆炸.

强爆炸问题的提法 在集中装药的情况下, 如果研究爆炸在远大于炸药本身尺度的距离上的作用, 并且所研究的作用点仍然距离爆炸中心足够近, 以至于由爆炸导致的压强还非常大, 就可以在问题的提法和公式 (8.7) 中进一步引入一些重要的简化.

实验和理论表明, 在爆炸时, 在气体扰动区域的边界上会产生一道沿静止气体迅速膨胀的球面激波. 静止气体的压强 p_1 属于主定参量组 (8.5). 压强 p_1 对气体扰动的影响只能通过激波上的边界条件表现出来. 按照 (6.30)—(6.32), 这些条件被写为用激波前的特征量表示激波后的特征量的形式, 它们还可以改写为以下形式:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\mathscr{D}\left(1-\frac{\gamma p_1}{\rho_1\mathscr{D}^2}\right), \\ \rho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\rho_1}{1+\dfrac{2\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1\mathscr{D}^2}}, \\ p_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\rho_1\mathscr{D}^2\left[1-\frac{(\gamma-1)p_1}{2\rho_1\mathscr{D}^2}\right]. \end{aligned} \tag{8.8}$$

按照问题的条件, 这里已经认为

$$\boldsymbol{v}_{\tau1}=\boldsymbol{v}_{\tau2}=0,\quad v_{n2}=v_2-\mathscr{D},\quad v_{n1}=-\mathscr{D},$$

并且

$$a_1=\sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}}.$$

在强激波的初始阶段, 公式 (8.8) 中的无量纲量 $\gamma p_1/\rho_1\mathscr{D}^2$ 与量 $\gamma p_2/\rho_1\mathscr{D}^2$ 相比很小, 因为激波后的压强 p_2 远大于初始压强 p_1. 不等式 $p_2\gg p_1$ 表示压强在激波前后的剧烈变化, 这就是强激波的特征. 对于强激波, 条件 (8.8) 在忽略 $a_1^2/\mathscr{D}^2$ 阶小量

后可以简化为以下近似条件:

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\mathscr{D}, \\
\rho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1, \\
p_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\rho_1\mathscr{D}^2.
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

条件 (8.9) 是强激波条件. 当激波前的压强为零 ($p_1 = 0$) 时, 这些条件与精确条件相同; 与之相应的是, 与发生爆炸时在对称中心释放出的能量相比, 这时可以忽略激波所包围的区域内的初始能量.

在分析强点爆炸问题和实际求解这个问题时, 如果用条件 (8.9) 取代条件 (8.8), 就可以把压强 p_1 从主定参量组 (8.5) 中去掉 (所以 τ 也可以去掉). 由此可知, 上述强点爆炸所对应的气体运动是自相似的. 这时, 爆炸波前锋之后的气体扰动的特征量分布可以表示为以下形式:

$$
\begin{aligned}
v &= v_2\mathscr{V}(\gamma,\ \lambda), \\
p &= p_2\mathscr{P}(\gamma,\ \lambda), \\
\rho &= \rho_2\mathscr{R}(\gamma,\ \lambda),
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

式中 v_2, p_2 和 ρ_2 由公式 (8.9) 确定.

显然, 爆炸波前锋的半径 r_2 和它的速度 $\mathscr{D} = \mathrm{d}r_2/\mathrm{d}t$ 决定于量

$$\rho_1,\ \gamma,\ E,\ t,$$

其中常数 γ 是无量纲的, 而参量 ρ_1, E 和 t 具有独立的量纲, 所以无法从这些量组成无量纲组合. 根据 Π 定理, 对于 r_2 和 $\mathscr{D}$ 成立公式

$$
\begin{aligned}
r_2 &= k\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{2/5}, \\
\mathscr{D} &= \frac{2}{5}k\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{-3/5} = \frac{2}{5}k^{5/2}\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/2} r_2^{-3/2},
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

式中 k 是只依赖于 γ 的某个无量纲量, 而有量纲量的指数是从 r_2 的量纲为长度这一条件确定出来的.

我们从问题的提法出发, 利用量纲理论但不必实际求解整个问题, 即可得到公式 (8.11). 这些公式是激波的运动规律. 在 $t = 0$ 时, $r_2 = 0$, 而激波速度 $\mathscr{D}$ 是无穷大的. 随着时间的增加, r_2 增加, 但速度 $\mathscr{D}$ 减小. 显然, 强激波假设只在 $\mathscr{D} \gg a_1$ 的时间段才成立. 由一般理论可知, 激波前锋沿气体微元传播的速度总是大于激波前的声速.

由 (8.11) 和 λ 的公式 (8.6) 可知, λ 可以取为

$$\lambda = \frac{r}{r_2}. \tag{8.12}$$

在扰动区域内, λ 在区间 (0, 1) 上变化.

确定扰动的问题归结为求出函数 $\mathscr{V}(\gamma,\ \lambda)$, $\mathscr{P}(\gamma,\ \lambda)$, $\mathscr{R}(\gamma,\ \lambda)$ 和 $k(\gamma)$. 激波条件的形式简化为

$$\mathscr{V}(\gamma,\ 1) = \mathscr{P}(\gamma,\ 1) = \mathscr{R}(\gamma,\ 1) = 1. \tag{8.13}$$

在对称中心, 没有质量源的条件归结为气体微元的速度等于零的条件, 即

$$\mathscr{V}(\gamma,\ 0) = 0. \tag{8.14}$$

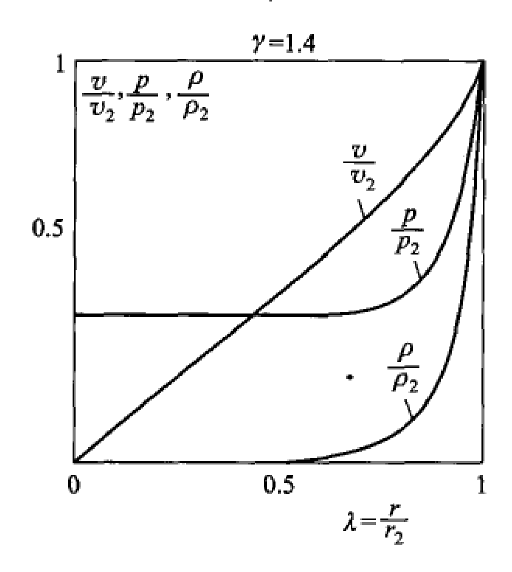


图 60. 发生强点爆炸时激波后的压强、速度和密度的分布

气体扰动区域的总能量守恒的条件为

$$E = \int_0^{r_2} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\right) \rho 4\pi r^2\,\mathrm{d}r.$$

根据 (8.10) 和 (8.12), 这个条件归结为

$$1 = \frac{32\pi k^5}{25(\gamma^2-1)} \int_0^1 (\mathscr{V}^2\mathscr{R} + \mathscr{P})\lambda^2\,\mathrm{d}\lambda.$$

这个条件可以用于计算常数 k.

显然, 函数函数 $\mathscr{V}$, $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{R}$ 满足常微分方程. 这些方程必须在区间 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 上求解, 并且条件 (8.13) 和 (8.14) 是区间两端的边界条件.

我们不打算在这里求解这个问题[1]. 我们仅仅指出, 为了实际得到这个问题的解, 可以不从实际上已经写出的 3 个常微分方程出发, 而只利用量纲分析就可以写出该常微分方程组的 2 个代数积分, 从而以简单的代数形式得到强点爆炸问题的精确解. 图 60 给出了求解强点爆炸问题的结果.

刚体在无界的不可压缩黏性流体中的运动

物体在流体内部运动时会引起流体发生扰动, 流体与物体之间有相互作用力, 相关问题是连续介质力学问题中最主要、最核心的问题.

当物体与运动的外部连续介质有接触时, 在接触面上会产生相互作用力. 这些相互作用力的性质以及它们对物体的运动规律、几何形状和其他一些特性的依赖关系具有重大的实用价值. 在一些工程问题中, 需要计算各种仪器在水中和空气中的运动, 需要计算诸如房屋、塔、堤坝、管道等各种建筑物的平衡. 这时, 关于这些物体与周围介质的相互作用力的结果具有重要意义.

从问题的一般提法和量纲理论可以得出某些一般的推论, 这些推论对于各种物体的计算方法和实验研究具有重要意义.

---

1) 在以下专著中给出了这个问题的完整的研究和具体的解: Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 7-е изд. Москва: Наука, 1972; 9-е изд. Москва: Наука, 1981 (俄文第八版的中译本: Л. И. 谢多夫. 力学中的相似方法与量纲理论. 沈青, 倪锄非, 李维新译. 北京: 科学出版社, 1982).

我们来研究一个示意性的基本问题. 设刚体在与之有接触的不可压缩流体中匀速平动, 流体充满物体表面 Σ 以外的全部空间. 我们还认为, 表面 Σ 具有任意的但固定的形状, 并且 Σ 的所有几何尺寸都完全决定于某一个特征长度 d. 在实际中, 这是刚体运动的一种重要而典型的情况, 但与此同时还需要研究可变形"固体"和其他物体的运动问题, 非平动运动, 加速运动, 等等.

如果一些有限大小的物体在一种介质内部平动, 并且物体的表面 Σ 就是介质的边界, 则在平动理论的范围内可以研究此问题的两种等价的基本提法.

绝对运动 第一种提法是"绝对"运动问题, 这时认为物体前面的流体在无穷远处是静止的, 处于未受扰动的状态, 而物体以常速度 $\boldsymbol{v}$ 平动.

绕流问题 第二种提法是平动的液流或气流绕静止物体运动的问题, 这时物体前面无穷远处的来流具有常速度 $-\boldsymbol{v}$.

按照伽利略一牛顿原理, 使整个系统 (外部介质和物体) 叠加上一个平动速度 $-\boldsymbol{v}$ 等价于从一个惯性系转换到另一个惯性系. 因此, 在上述两种提法中, 所有的力的相互作用都是相同的; 在所有的点叠加上绝对速度矢量 $-\boldsymbol{v}$ 就可以得到绕流问题中的相对速度场.

这种等价性是研究这个问题的许多实验方法的基础. 飞行或航行实验可以替换为在风洞、水槽和其他一些装置中对静止物体进行的实验. 显然, 飞行问题与绕流问题在实际中的完全等价性还要求可以忽略其他物体的影响, 例如风洞和水槽的壁面等的影响. 如果这种影响不小, 就应当用专门的方法加以考虑.

在问题的一般提法中, 无穷远条件是对物体前方的状态和速度表述的. 这是因为, 如果把定常运动看作持续了无穷长时间的非定常运动的极限, 则在极限情况下得到的结果是, 物体所经过的路径是无穷长的. 所以, 在物体后方无穷远处的流体运动一般会受到扰动. 这种状况出现于有限翼展机翼理论、船舶运动理论和其他许多情况中.

物体在充满整个空间的不可压缩黏性流体中作常速运动时的速度场和应力场的主定参量组

我们开始研究物体在均匀不可压缩黏性流体中的运动. 由第四章的一般方程可知, 不可压缩黏性流体的力学性质完全决定于 2 个常量: 密度 ρ 和黏度 μ. 具有相同的 ρ 和 μ 但化学上不同的两种不可压缩黏性流体从力学的观点看并无区别.

不可压缩黏性流体绕静止物体的定常流动问题就是在一定条件下求解纳维一斯托克斯方程的问题. 这些条件包括: 流体在物体表面的无滑移条件和无穷远条件——来流在无穷远处的速度 $-\boldsymbol{v}$ 和压强 p_∞ 是给定的. 对于非线性的纳维一斯托克斯方程来说, 这个数学问题极其困难, 甚至对形状最简单的物体也不存在精确的特解. 尽管如此, 还是有各种各样的理论和实验结果, 从而能够估计相互作用力和流动性质的特点, 能够得到关于物体形状对流体与物体之间的相互作用力大小的影响的某些认识.

在物体的固连坐标系中, 不可压缩黏性流体的相对运动或绝对运动的定常速度

场以及压强和黏性内应力的分布由以下主定参量组的函数确定:

$$\rho,\ \mu,\ d,\ v,\ \alpha,\ \beta,\ p_\infty,\ x,\ y,\ z,$$

其中角 α, β 确定了物体相对于上述固连坐标系的常速平动速度矢量的方向 (图 61).

升力和阻力 在物体表面 Σ 的每个微元上都有从流体作用在物体上的面力 $\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma$ (依照问题的条件, 我们不考虑质量力). 从这些力对被看作刚体的物体的作用效果来看, 只有合力 $\boldsymbol{P}$ (主矢量) 和合力矩 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 具有重要意义, 它们由以下积分定义:

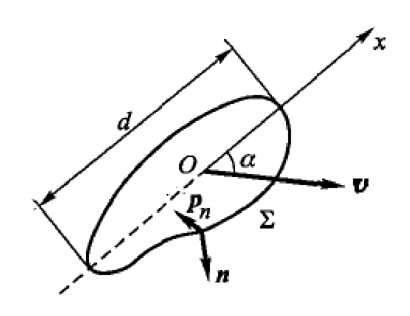


图 61. 物体在流体中运动的问题的示意图

$$\boldsymbol{P} = \int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma, \quad \boldsymbol{\mathcal{M}} = \int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n\,\mathrm{d}\sigma. \tag{8.15}$$

力的主矢量 $\boldsymbol{P}$ 可以表示为和的形式:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{A},$$

其中矢量 $\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 分别平行和垂直于速度矢量 $\boldsymbol{v}$. 当力 $\boldsymbol{W}$ 的方向与 $\boldsymbol{v}$ 的方向相反时, 这个力称为阻力; 力 $\boldsymbol{A}$ 则称为升力. 要想确定力 $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{A}$ 和力矩 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, 可以根据理论方法直接或间接计算积分 (8.15), 或者在实验中利用天平来测量力, 例如在风洞、水洞或其他形式的实验装置中进行测量.

在实验和理论中, 可以把以下参量视为力 $\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的主定参量:

$$\rho,\ \mu,\ d,\ v,\ \alpha,\ \beta,\ p_\infty. \tag{8.16}$$

压强 p_∞ 的变化对合力没有影响 (如果流体是不可压缩的) 容易看出, 无穷远处的压强值 p_∞ 在计算合力时并不重要. 其实, 因为压强仅仅以对坐标的导数的形式出现在不可压缩流体的纳维－斯托克斯方程中, 所以, 如果给压强增加一个常量, 同时让速度场保持不变, 就可以从一个解变换为另一个解. 由此可见, 无穷远处的压强 p_∞ 可以叠加给流体的压强. 我们指出, 这个结论只对不可压缩流体才成立. 另一方面, 由奥－高定理可知, 对于任何封闭曲面 Σ 和它所包围的区域 V, 成立等式

$$-\int\limits_{\Sigma} p_\infty \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = -p_\infty\int\limits_{\Sigma}[\boldsymbol{i}\cos(\boldsymbol{n},\ x) + \boldsymbol{j}\cos(\boldsymbol{n},\ y) + \boldsymbol{k}\cos(\boldsymbol{n},\ z)]\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= -p_\infty\int\limits_{V}\left(\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial x} + \frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial y} + \frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial z}\right)\mathrm{d}\tau = 0,$$

$$-\int\limits_{\Sigma}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}p_\infty\,\mathrm{d}\sigma = -p_\infty\int\limits_{\Sigma}[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{i}\cos(\boldsymbol{n},\ x) + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}\cos(\boldsymbol{n},\ y) + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{k}\cos(\boldsymbol{n},\ z)]\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= -p_\infty\int\limits_{V}\left[\frac{\partial(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{i})}{\partial x} + \frac{\partial(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j})}{\partial y} + \frac{\partial(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{k})}{\partial z}\right]\mathrm{d}\tau = 0.$$

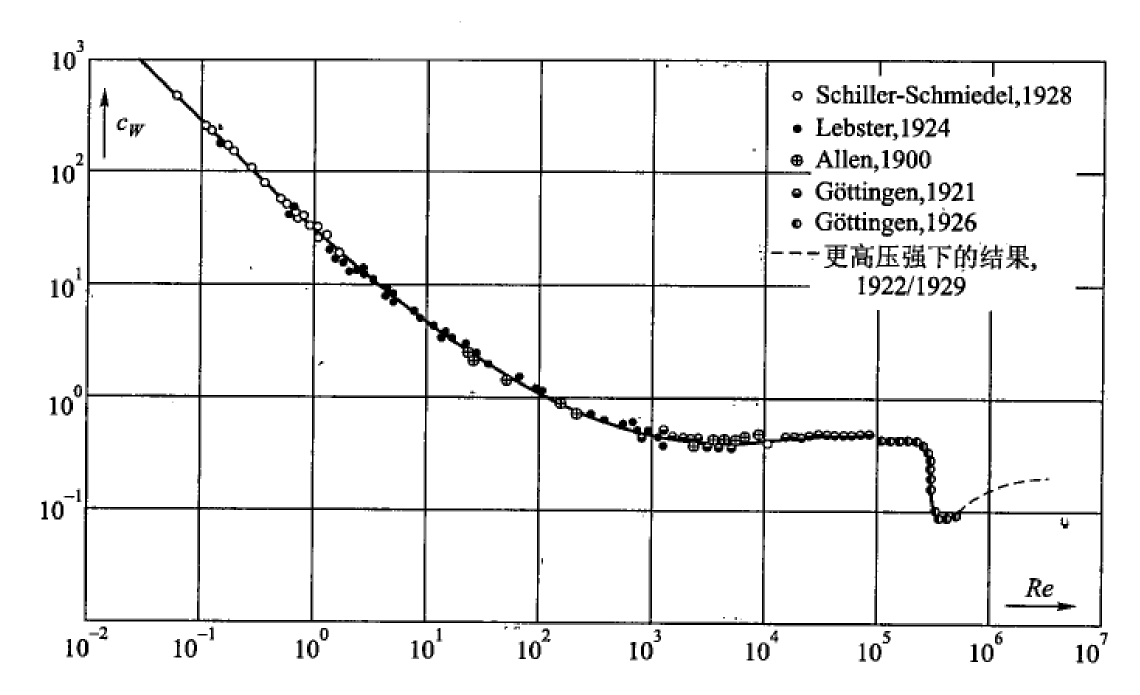


图 62. 球体的阻力系数 $c_W = \dfrac{W}{\dfrac{\pi d^2}{4}\dfrac{\rho v^2}{2}}$ 对雷诺数 $Re = \dfrac{\rho v d}{\mu}$ 的函数关系 (d 是球的直径)

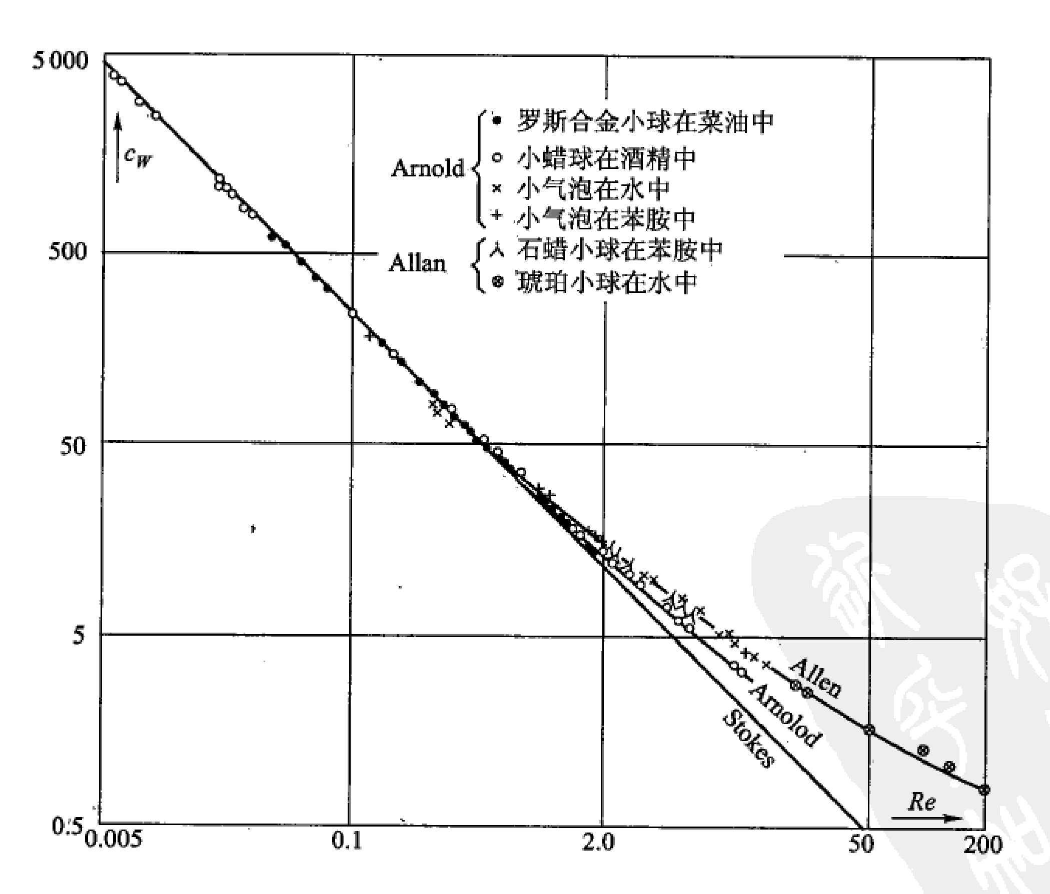


图 63. 球体在低雷诺数下的阻力系数 (c_W 和 Re 的定义见上图)

因此, 利用不可压缩假设可以从主定参量组 (8.16) 中去掉量 p_∞, 而从剩下的 6 个参量 ($n=6$, $k=3$) 只能组成 3 个无量纲参量:

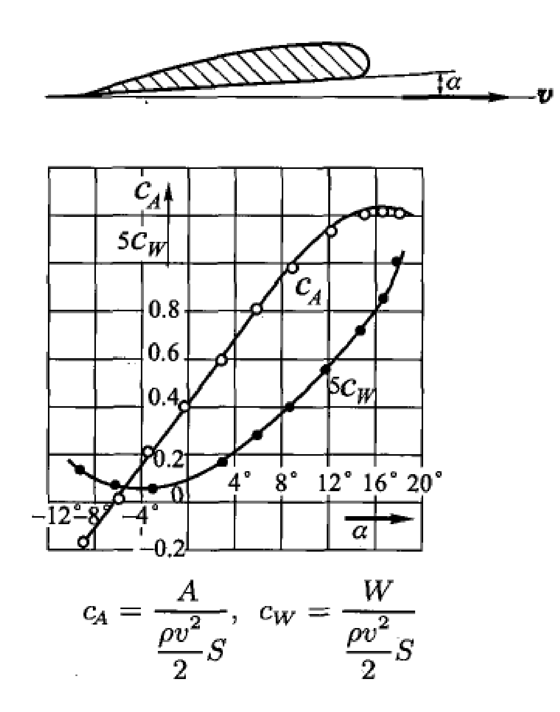
$$\alpha,\ \beta,\ Re=\frac{\rho v d}{\mu}. \tag{8.17}$$

角 α 和 β 表征物体的速度 v 相对于 Σ 的方向. 如果物体是球形的, 角 α 和 β 就无关紧要, 但在其他情况下速度矢量相对于物体的方向非常重要, 所以角 α 和 β 是重要参量. 无量纲的数 Re 称为雷诺数. 雷诺数在所有与流体黏性有关的现象中具有基本意义.

容易验算, 组合 ρd^2v^2 和 $\mu vd=\rho d^2v^2/Re$ 具有力的量纲. 现在, 根据 Π 定理可以写出

$$\begin{aligned}W&=c_W(\alpha,\ \beta,\ Re)\rho v^2d^2,\\ A&=c_A(\alpha,\ \beta,\ Re)\rho v^2d^2,\\ \mathcal{M}&=c_{\mathcal{M}}(\alpha,\ \beta,\ Re)\rho v^2d^2.\end{aligned} \tag{8.18}$$

无量纲系数[1] c_W, c_A, $c_{\mathcal{M}}$ 只依赖于 α, β 和雷诺数 Re. 确定不同形状的物体的这些系数对上述自变量的函数关系是理论和实验空气动力学和流体力学的主要任务之一. 对于在实际工程中遇到的各种物体, 现在有许多关于这些系数的结果.



$$c_A=\frac{A}{\frac{\rho v^2}{2}S},\quad c_W=\frac{W}{\frac{\rho v^2}{2}S}$$

图 64. 机翼的升力系数 c_A 和阻力系数 c_W 对攻角 α 的典型依赖关系曲线 (S 是机翼平面的面积)

流体的黏性对运动的影响, 例如对阻力和升力的影响, 只是通过雷诺数的影响才表现出来. 从雷诺数公式 (8.17) 可知, 黏性的影响不仅通过黏度 μ 表现出来, 这种影响还与密度 ρ、速度 v 和长度尺度 d 有密切关系. 对各种无量纲函数而言, 黏度增加所引起的效果等价于流体的长度尺度、速度或密度减小所引起的效果. 显然, 在黏度不变时增加物体尺度或运动速度等价于在尺度和速度不变时减小黏度.

在图 62 中给出了关于各种范围内的雷诺数对球体阻力系数 c_W 的影响的实验结果. 对各种液体和空气得到的实验数据很好地位于同一条曲线上. 当雷诺数很小时, 这条曲线的方程为 $c_W=c/Re$. 在图 63 中, 该曲线是直线, 因为坐标轴采用对数尺度. 作为一个实例, 在图 64 中绘出的典型曲线给出了机翼的系数 c_W 和 c_A 对攻角的函数 (攻角是机翼运动速度对机翼的倾角).

[1] 为简单起见, 我们在这里只给出了力 $\boldsymbol{A}$ 和力矩 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 的大小的相应系数, 而在实际中必须考虑这些矢量的分量的类似系数.

如果在一些实验中已经确定了无量纲系数 c_A 和 c_W, 例如利用给定物体在水中的运动已经确定了这些系数, 那么, 在没有做实验的其他一些情况下, 借助于 (8.18) 和这些系数就可以计算出几何形状相同但大小不同的另外一个物体的阻力和升力, 并且这个物体可以在其他液体甚至空气中运动, 只要空气的压缩性可以忽略. 显然, 在进行这种计算时必须具有并使用系数 c_A 和 c_W 在相同角度值 α, β 和相同雷诺数 $Re = \rho vd/\mu$ 下的结果. 在初步的实验中, 必须在无量纲自变量 α, β 和 Re 的所需范围内得到系数 c_W 和 c_A 的结果, 它们决定于实际问题的应用条件.

细小颗粒在低雷诺数条件下在不可压缩黏性流体中的运动

我们来考虑黏性流体中非常缓慢的运动, 相应的雷诺数很小. 雷诺数减小对应着黏度 μ 增加, 由黏性引起的内应力也相对增加. 如果与黏性力相比可以忽略惯性力, 这就等价于假设作为主定参量的密度 ρ 不再重要. 在纳维－斯托克斯方程中忽略密度相当于去掉加速度项, 相应数学问题和它的解就是斯托克斯近似理论.

在这种情况下, 给定形状的物体以常速度 v 平动时的阻力决定于参量

$$\mu,\ d,\ v,\ \alpha,\ \beta.$$

因为从参量 μ, d, v 无法组成无量纲的组合, 所以

$$W = c(\alpha,\ \beta)\mu vd = \frac{c}{Re}\rho v^2 d^2, \quad c_W = \frac{c(\alpha,\ \beta)}{Re}. \tag{8.19}$$

因此, 在低雷诺数条件下, 阻力正比于物体的运动速度、长度尺度 d 和黏度 μ (对升力也有类似结论). 无量纲系数 c 只依赖于物体速度相对于其表面的方向. 球体的 c 是常数, 只要做唯一的一次实验就可以求出这个常数. 如果 d 是直径, 则对球体的理论计算给出 $c = 3\pi$. 对于任意形状的物体, 从 (8.19) 的第一个公式得出的公式 $c_W = c(\alpha,\ \beta)/Re$ 确定了系数 c_W 在低雷诺数条件下对雷诺数的依赖关系. 实验很好地验证了这个公式. 通过实验还可以指出使公式 (8.19) 完全能够被实际应用的最大的雷诺数, 该数值依赖于物体的形状.

作为一个实例, 可以把阻力定律 (8.19) 用于描述细小颗粒在流体中的下沉过程. 不过, 对于潜水艇在水中的运动和飞行器以及汽车在空气中的运动而言, 由于长度和速度较大,相应雷诺数也较大, 所以公式 (8.19) 不再成立.

在极高雷诺数条件下在黏性流体中的运动

对于理想流体 $\mu = 0$, 所以理想流体对应无穷大雷诺数[1]. 还可以在 $\mu \neq 0$, 但 $vd \to \infty$ 的条件下, 即针对大尺度物体和高速运动的物体来考虑雷诺数的重要意义. 在理想流体中, 阻

[1] 一般而言, 由于理想流体没有黏性, 所以雷诺数不是描述理想流体运动的无量纲主定参量. 因此, "理想流体对应无穷大雷诺数" 的说法是一个比较模糊的结论, 容易被误解. 尽管描述理想流体运动的欧拉方程是描述黏性流体运动的纳维－斯托克斯方程在 $Re \to \infty$ 时的极限, 但是黏性流体的运动 (纳维－斯托克斯方程的解) 在 $Re \to \infty$ 时一般并不趋于理想流体的运动 (欧拉方程的解), 其根本原因是两种流体模型中的固体壁面边界条件不同. ——译注

力和升力的主定参量为

$$\rho,\ d,\ v,\ \alpha,\ \beta,\ Re=\infty.$$

因此, 在理想流体的定常绕流问题中应当成立公式

$$W=c_W(\alpha,\ \beta)\rho v^2d^2,\quad A=c_A(\alpha,\ \beta)\rho v^2d^2. \tag{8.20}$$

公式 (8.20) 表明, 在理想流体中, 或者近似地在 $Re\to\infty$ 的黏性流体中, 阻力和升力正比于运动速度的平方 v^2、特征面积 d^2 和流体密度. 在许多重要情况下, 仅仅利用 Π 定理从问题的提法中得到的这些规律与实验符合良好, 它们总是精确地对应于不可压缩理想流体力学范围内的理论计算.

船舶的阻力 当船舶在水面上航行时, 部分流体边界是自由面. 这时, 水的扰动与重力有关, 水面上处处都有水波. 船舶运动时的升力和阻力也与水受到的重力有关. 所以, 如果水充满下半空间, 则当船舶相对于自由水面以固定的姿态和不变的水平速度平动航行时, 主定参量组为

$$\rho,\ \mu,\ g,\ d,\ v.$$

从这些参量 ($n=5,\ k=3$) 可以组成 2 个独立的无量纲组合:

$$Re=\frac{\rho vd}{\mu},\quad Fr=\frac{v}{\sqrt{gd}}. \tag{8.21}$$

无量纲参量 Fr 称为弗劳德数.

在 v, d 和 g 是主定参量的所有问题中, 弗劳德数是一个重要的无量纲参量. 对无量纲的主定参量而言, 重力的影响是通过弗劳德数考虑和表现出来的.

船体阻力公式可以写为以下形式:

$$W=c_W(Re,\ Fr)\rho Sv^2,$$

式中 S 是特征面积, 通常取为船舶浮在水面上保持平衡时船体外表面的浸水面积. 确定 c_W 对 Re, Fr 的依赖关系和船体的几何形状是船舶流体力学的基本问题.

作为特征变量的无量纲参量 Re 和 Fr 不只出现于上述问题, 这些参量还被应用在 ρ, μ, g, v, d 是主定参量的其他许多问题中. 一般而言, 当介质的黏性和重力都重要时, 这两个无量纲参量的作用就是重要的. 例如, 雷诺数在黏性流体沿管道运动的问题中具有基本意义.

物体在理想气体中的运动问题 前面对物体在无界流体中作定常运动的基本问题给出了相应的提法, 现在我们来改变部分提法. 我们将认为, 外部介质是理想完全气体, 在气流中允许有激波, 并且在考虑可压缩性时还认为, 在每一个气体微元中发生的过程在连续运动区域都是绝热的和可逆的, 而在气体微元穿过激波时是不可逆的.

在静止物体的绕流问题中, 我们在无穷远处有给定的压强 p_∞、密度 ρ_∞ 和气流

速度 v_∞. 在这种情况下, 气体的状态和运动特征量的分布决定于主定参量

$$\gamma=\frac{c_p}{c_V},\ p_\infty,\ \rho_\infty,\ v_\infty,\ \alpha,\ \beta,\ d,\ x,\ y,\ z. \tag{8.22}$$

空间点的坐标 x, y, z 是在物体的固连坐标系中取的. 我们有 $n=10$, $k=3$. 显然, 所有待求的无量纲量决定于 7 个无量纲参量:

$$\gamma,\ M_\infty=\frac{v_\infty}{a_\infty},\ \alpha,\ \beta,\ \frac{x}{d},\ \frac{y}{d},\ \frac{z}{d}, \tag{8.23}$$

并且

$$a_\infty=\sqrt{\frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}},$$

其中的记号同前面一样, 角 α, β 给出来流相对于物体的方向, a_∞ 是来流在无穷远处的声速, M_∞ 是马赫数. 马赫数 M_∞ 在这个问题中所起的作用类似于雷诺数或弗劳德数在前面研究过的问题中所起的作用.

一种特别的情况是, 例如, 长度尺度 d 有可能不在参量 (8.22) 之列. 无限长的楔形物体和圆锥形物体的绕流问题就是这样的例子, 这时坐标系原点应当取在圆锥形或楔形物体的顶端. 在这种情况下, 流动具有自相似性, 从而可以只用 2 个无量纲自变量 $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$ 来代替 3 个无量纲自变量 $\frac{x}{d}$, $\frac{y}{d}$, $\frac{z}{d}$.

在所研究的问题中, 阻力和升力满足以下公式:

$$\begin{aligned}W&=c_W(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ M_\infty)\rho v_\infty^2 d^2,\\ A&=c_A(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ M_\infty)\rho v_\infty^2 d^2.\end{aligned} \tag{8.24}$$

显然, 对于可压缩理想流体而言, 力 W 和 A 对速度 v 的平方依赖关系由于马赫数的影响而不再成立. 公式 (8.24) 对亚声速 ($M_\infty<1$) 和超声速 ($M_\infty>1$) 来流均成立. 在超声速绕流中可能有激波. 要想确定函数 $c_W(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ M_\infty)$ 和 $c_A(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ M_\infty)$, 可以根据流体力学问题的解进行计算, 或者在风洞和其他专门的空气动力学装置中进行实验测量, 还可以利用自由飞实验.

布西内斯克问题 我们来考虑弹性力学中经典的布西内斯克问题. 设满足胡克定律的均匀弹性介质充满半空间, 其边界平面为自由面. 依条件, 在自由面上没有外面力.

半空间的无变形初始状态是没有任何外载荷和内应力的状态. 如果在弹性半空间自由面上的某一点有集中作用力 $\mathscr{P}$, 这就导致半空间的变形状态. 为简单起见, 我们认为力 $\mathscr{P}$ 垂直于无变形状态的边界面 (图 65). 问题在于确定弹性半空间在平衡时的应力应

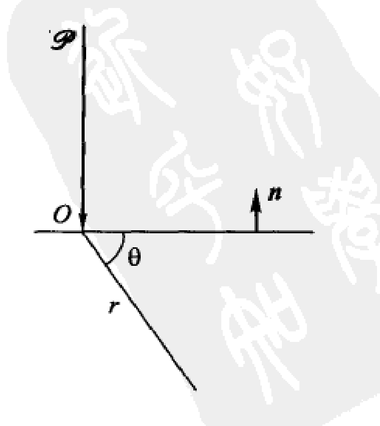


图 65. 布西内斯克问题示意图

变状态, 这时还假设从点 O 离开趋向无穷远时, 位移趋于零. 显然, 这个问题的解具有轴对称性, 并且力矢量位于对称轴上.

我们在线性弹性力学的范围内研究这个问题, 这时自由面上的线性边界条件被移动到无扰动的初始边界面. 该边界条件是: 在自由面上除点 O 以外的所有点成立等式

$$\boldsymbol{p}_n = 0,$$

而在点 O 有 $p_{nn} \to \infty$, 并且

$$p_{nn} = \mathscr{P}\delta(r), \tag{8.25}$$

式中 $\delta(r)$ 是狄拉克 δ 函数.

从运动方程、附加条件 (8.25) 和无穷远条件显然可知, 内应力张量的分量和位移矢量的主定参量是

$$\sigma,\ E,\ \mathscr{P},\ r,\ \theta, \tag{8.26}$$

其中 r 和 θ 是经过力矢量 $\mathscr{P}$ 的平面上的极坐标, 并且点 O 为坐标系原点; σ 是泊松比, 而 E 是杨氏模量. 平衡方程是具有 2 个独立自变量 r, θ 的偏微分方程. 因为杨氏模量具有压强的量纲, 所以从 5 个参量 (8.26) 只能组成 3 个独立的无量纲组合:

$$\sigma,\ \theta,\ \frac{\mathscr{P}}{Er^2}, \tag{8.27}$$

由此可知, 所有待求无量纲量只依赖于 3 个参量 (8.27).

问题的线性化具有重要作用. 因为力的值 $\mathscr{P}$ 在边界条件中是线性的, 所以位移场和内应力场显然线性地依赖于力 $\mathscr{P}$, 即所有待求的位移矢量分量和内应力张量分量都正比于参量 $\mathscr{P}/Er^2$. 所以, 只要知道待求量的量纲, 我们就能够完全确定待求量对坐标 r 的依赖关系. 例如, 位移矢量 $\boldsymbol{w}(\mathscr{P},\ E, \sigma,\ r,\ \theta)$ 的量纲与长度的量纲相同, 从而可以写出

$$\boldsymbol{w} = \frac{\mathscr{P}}{Er^2} r \boldsymbol{f}(\sigma,\ \theta), \tag{8.28}$$

式中 $\boldsymbol{f}(\sigma,\ \theta)$ 是只依赖于 1 个坐标变量的某个矢量.

把公式 (8.28) 代入平衡方程, 就得到无量纲待求函数的常微分方程. 这种方法极大地简化了问题. 通过求解相应的常微分方程, 即可轻松地得到需要的解.

§9. 现象的相似与模拟

模拟与物理相似 量纲与相似理论在模拟各种现象时具有重大意义. 模拟是把我们对所关心的实际现象需作的研究, 替换为通常在专门的实验条件下在尺寸缩小或放大的模型上对相似现象的研究. 模拟的基本思想在于, 根据模型试验的结果就能给出关于效应的特性和与实际条件下的现象有关的各种量的必要的答案.

在大多数情况下, 模拟是以研究物理相似的现象为基础的. 我们用研究比较便于实现的物理相似的现象来代替研究我们所关心的实际现象. 力学相似, 或一般地说物理相似, 可以视为几何相似的推广. 如果两个几何图形的所有对应长度之比相同, 则这两个几何图形相似. 如果知道了相似系数——比例尺, 则对一个几何图形的尺寸简单地乘上比例尺的值, 即可得到与之相似的另一个几何图形的尺寸.

如果根据一个现象的给定的特征量, 通过类似于从一种单位制转换为另一种单位制那样的简单换算, 就可以得出另一个现象的特征量, 则这两个现象在物理上相似. 为了进行换算, 必须知道"转换比例尺".

两个不同的但相似的现象, 其数值特征量可以视为同一个现象在两个不同的单位制中表示出来的数值特征量. 对于任何一族相似现象, 所有相应的无量纲特征量(有量纲量的无量纲组合) 都具有同样的数值. 不难看出, 逆命题也是成立的, 即如果两种运动的所有相应的无量纲特征量都相同, 这两种运动就是相似的. 一族力学相似的运动确定一种运动方式.

有时可以更广义地理解两个现象的相似性, 即认为上述定义只是对专门的某一组特征量而言的, 这组特征量完全确定现象并可以用来求出任何其他的这样的特征量, 这些量在从一个现象转换为另一个"相似的"现象时却不能通过简单乘以相应比例尺的方式得到. 例如, 任意两个椭圆, 当使用沿椭圆主轴方向取的笛卡儿坐标时, 可以认为在上述意义下是相似的. 用上述换算可以通过某一个椭圆的点的坐标得出任何一个椭圆的点的笛卡儿坐标 (仿射相似).

为了在模拟时保持相似性, 必须遵守某些条件. 然而在实践中, 保证现象在整体上相似的那些条件往往得不到满足, 这时会遇到在将模型上得到的结果搬到实物上时所产生的误差值的问题 (比例尺效应).

相似律 在建立了所选出的一类现象的主定参量组之后, 就不难建立两现象相似的条件.

其实, 设现象决定于 n 个参量, 其中部分参量可以是无量纲的; 再假设主定参量中的可变参量和物理常量的量纲可以通过主定参量中的 k 个 $(k \leqslant n)$ 量纲独立的量的量纲表示出来. 显然, 这样由 n 个量就可以组成 $n-k$ 个独立的无量纲组合. 现象的所有无量纲特征量可以看作是这 $n-k$ 个由主定参量组成的独立的无量纲组合的函数. 因此, 在由现象的特征量组成的全部无量纲量中, 总可以选出一个基, 即决定所有其他的量的一组无量纲量.

在由相应的问题提法决定的一类现象中, 包含着彼此根本不相似的现象. 利用下述条件可以从中划分出一小类相似的现象.

两个现象相似的充分必要条件是, 构成基的那一组无量纲组合的数值在这两个现象中相同. 由给定的确定现象的那些量组成的无量纲参量的基相同的条件, 称为相似律.

如果相似性条件得到满足, 那么, 为了根据模型的有量纲特征量的数据来真正

计算实物的所有特征量, 必须知道所有相应量的转换比例尺. 如果现象决定于 n 个参量, 其中 k 个具有独立的量纲, 则对于量纲独立的量, 转换比例尺可以是任意的, 它们应当由问题的条件给出, 而在实验中则由试验条件给出. 所有其余的有量纲量的转换比例尺, 容易由各有量纲量的量纲公式得出, 这些量纲公式是通过 k 个量纲独立的量的量纲表示的. 对于这 k 个量, 试验条件和问题的提法即暗示了其比例尺.

物体被不可压缩黏性流体绕流时的相似律

在物体被不可压缩黏性流体定常绕流的问题中, 所有无量纲量由 3 个参量确定: 角 α, β 和雷诺数 Re. 物理相似的条件——相似律——是以下关系式:

$$\alpha = \text{const}, \quad \beta = \text{const}, \quad Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \text{const}.$$

其含义是, α, β 和 Re 的常数值表示在各种 (相应的) 相似现象中这些量都取相同的值.

在模拟一个现象时, 模型试验的结果只能用于 α, β 和 Re 相同的实物. 前两个条件在实践中总是容易实现的, 而第三个条件 ($Re = \text{const}$) 则较难满足, 尤其当被绕流的物体尺寸较大时更是如此, 例如机翼. 如果模型小于实物, 则为了保持雷诺数的值相等, 就必须或者增大绕流速度, 而这通常是不现实的, 或者大大改变流体的密度和黏度. 这些情况在实际研究气动阻力时带来很大困难. 必须保持雷诺数不变, 这就导致建造可在其中对真实飞机吹风的巨大风洞, 和建造密度较大的压缩空气在其中作高速循环的闭口型风洞.

专门的理论研究和实验研究表明, 在流线型物体的许多情况下, 雷诺数只显著影响无量纲迎面阻力系数, 而有时对无量纲升力系数和在各种实际问题中起十分重要作用的其它一些量影响很小. 因此, 模型与实际现象的雷诺数的差别在某些问题中并不重要.

考虑气体的可压缩性时物体被气体绕流的相似律

我们已经指出了不考虑空气的压缩性时物体运动的相似性条件. 在速度与声速相比很小时, 压缩性是不重要的[1].

在高亚声速和超声速飞行的空气动力学中, 压缩性的影响首先是通过马赫数表现出来的. 我们在前面分析了机翼或者一般而言任何形状的物体在无界气体中的绝热运动问题的提法, 相应无量纲主定参量组由 (8.23) 给出. 气流的整体特征量或者运动和状态在特征点的特征量, 其主定参量是

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ M_\infty = \frac{v_\infty}{a_\infty}$$

在模拟时必须保证这些参量在实物和模型试验中取相同的值. 显然, γ 和马赫数 M_∞ 相同是最重要的相似律. γ 的值关系到对气体性质的选择. 对于同一种气体, 条件 $\gamma = \text{const}$ 自动满足. M_∞ 相同应当由试验装置的基本条件来保证.

[1] 注意这个结论仅对定常流动成立. ——译注

模拟的难点 在进行模拟时, 若改变基本参量, 我们就会发现, 在模型试验中出现的各种效应可能在所采用的问题提法中对于我们所关心的实际现象并不重要. 例如, 机翼被低速空气流定常绕流时的马赫数很小, 所以空气的压缩性是不重要的, 这时雷诺数是主要的相似律. 在风洞中模拟绕流时, 随着尺度 d 的减小, 要想保持雷诺数 $Re=\rho vd/\mu$ 不变, 一般而言必须对缩小的模型增加速度 v. 增加来流速度将导致马赫数 M_∞ 增加, 所以缩小的模型的马赫数将比实物要大. 尽管压缩性的影响对实物可能并不重要, 这种影响的效应却可能在模型上显著地表现出来, 相似性就可能遭到破坏. 这种状况给空气动力学实验带来巨大的困难, 并提出在设计风洞时必须考虑的许多要求.

物体在水中运动时出现的空化效应和实验装置中气体的凝结效应, 是可能出现于模型试验但并不出现于应当研究的实际现象的另外一些例子. 这些效应的产生与运动介质的某些区域中的压强和温度值降低有关 (空化即低压区域中的水发生汽化的现象, 而风洞中的空气发生凝结是由于气流中某些微元的温度在绝热膨胀过程中显著降低而导致的). 为了消除水中的空化现象, 需要 (见第八章) 增加"不重要的"无穷远处的外部压强 p_∞. 为了消除气体的凝结, 需要增加来流的温度 T_∞, 而从相似律的角度讲, 这个量在问题的原始提法中并不重要. 因此, 一般而言, 在高超声速风洞中要给工作气体加热到较高温度.

船舶航行的模拟 在模拟船舶航行时, 为了研究船舶的阻力和解释许多其他的流体动力学问题 (水花的产生, 航行中的晃动, 在海浪中航行时海水的灌入, 等等), 可以用小船模在专门的水渠中进行水动力学拖曳实验.

从前面给出的问题提法和 (8.21) 可知, 为了使实物和模型上的运动相似, 必须使雷诺数 Re 和弗劳德数 Fr 保持相等. 但是容易看出, 在缩小尺寸 d 的条件下, 当 $g=\text{const}$ 时对于水不可能同时满足等式

$$Re=\frac{\rho vd}{\mu}=\text{const},\quad Fr=\frac{v}{\sqrt{gd}}=\text{const}.$$

由雷诺数相同的要求可知, 模型的航速应当比实物高; 而由弗劳德数相同的要求可知, 模型的航速应当比实物低.

弗劳德数模拟 因此, 严格地讲, 在 g 和 $\nu=\mu/\rho$ 不变的条件下模拟船舶航行时, 完全的力学相似根本无法实现. 不过, 对流体力学现象的本质的详尽分析表明, 在许多问题中可以利用附加的计算或简单的实验来考虑雷诺数的影响. 在通常的船舶水动力学中, 弗劳德数具有主要意义, 所以模拟是在保持弗劳德数相同的情况下进行的. 这就是弗劳德数模拟.

弹性结构平衡的模拟 现在我们再来讨论弹性结构平衡的模拟问题. 设我们有某一种由均质材料制成的建筑物, 例如桥梁的桁架. 各向同性材料的弹性性质决定于 2 个常量: 杨氏模量 E (量纲为 kgf/cm^2) 和无量纲的泊松比 σ. 我们来讨论几何相似的结构并列出主定参量组.

为了确定模型的全部尺寸, 只要给定某一个特征尺寸 d 即可. 如果结构的重量在所考虑的平衡状态下是重要因素, 则应把材料的比重 $\gamma=\rho g$ (量纲为 kgf/cm^3) 列入主定参量组. 在建筑物各部分上, 除重力外还作用着以某种确定方式分布在结构单元上的外载荷. 设这些载荷的大小由力 $\mathscr{P}$ (量纲为 kgf) 确定. 于是, 主定参量组为

$$\sigma,\ E,\ d,\ \rho g,\ \mathscr{P}.$$

这时我们有 $n=5$, $k=2$, 所以力学相似的弹性平衡状态的基是 3 个无量纲参量:

$$\sigma,\ \frac{E}{\rho g d},\ \frac{\mathscr{P}}{Ed^2}.$$

相似律是: 这些参量对模型和实物是相同的. 当满足这些条件时, 所有变形都是相似的. 如果模型为实物的 $1/n$, 则模型上所有位移为实物的 $1/n$.

如果模型和实际结构由同一种材料制成, 则模型和实物的 ρ, σ 和 E 值相同, 所以为了力学相似必须满足条件

$$gd=\text{const}.$$

在通常的条件下 $g=\text{const}$, 所以, 为了保证力学相似, 应有 $d=\text{const}$, 即模型应与实物相同. 换句话说, 在 g 为常量的情况下不可能进行模拟.

利用离心机进行模拟 如果将模型安装在所谓的离心机上, 使它以常角速度旋转, 就可以人为地改变 g. 当模型尺寸足够小而旋转半径足够大时, 模型各部分的离心惯性力可以认为是平行的. 在绕竖直轴旋转的时候, 我们得到, 在模型 (相对于离心机) 处于相对平衡状态时, 作用在模型上的质量力是不变的, 此力类似于重力, 只不过加速度有所不同. 调整旋转角速度就可以得到任何大的加速度值.

现在已有造好的离心机, 可用于各种目的, 包括用来在模型上研究在土壤中发生的各种过程[1].

弹性结构在重量和给定的载荷分布的作用下发生变形, 我们来研究这时产生的应力 τ (量纲为 kgf/m^2). 我们可以把 τ 理解为某一应力分量的最大值, 或者一般地说理解为结构的确定部分上的某一应力分量.

组合 τ/E 是无量纲的, 于是可以写出

$$\frac{\tau}{E}=f\left(\sigma,\frac{E}{\rho g d},\frac{\mathscr{P}}{Ed^2}\right).$$

如果模型和实际建筑物由同样的材料制成, 则 $E=\text{const}$, 所以对于力学相似的状态, 对应点上的应力是相同的.

[1] 如果除了参量 ρ, g, d, E, 还有其他一些参量同样也是重要的, 则在模拟这样的过程时, 条件 $E/\rho g d=\text{const}$ 仍应满足. 所以, 在所有这样的情况下都可以利用离心机进行模拟.

如果认为受力状态是力学相似的, 并且破坏是由最大应力值决定的, 则显然在模型上和实物上的相应点会出现破坏.

如果外载荷的值大而结构的自重小到可以忽略不计, 则参量 $\gamma = \rho g$ 是不重要的 (从而参量 $E/\rho g d$ 也不重要). 这时, 前面的关系式变为

$$\frac{\tau}{E} = f\left(\sigma, \frac{\mathscr{P}}{Ed^2}\right),$$

而相似性条件则仅为 2 个等式:

$$\sigma = \text{const}, \quad \frac{\mathscr{P}}{Ed^2} = \text{const}.$$

由此还可以得出, 在保持材料性质不变的情况下进行模拟时, 外载荷必须正比于长度尺度的平方而改变.

小尺寸结构的强度较大

我们把弹性系统某一单元的长度在变形时的改变记为 l. 对上述一类结构成立关系式

$$\frac{l}{d} = \varphi\left(\sigma, \frac{\rho g d}{E}, \frac{\mathscr{P}}{Ed^2}\right).$$

在许多情况下, 根据物理上的考虑立即可以看出, 在结构元件的比重减小时, 即参量 $\rho g d/E$ 减小时, 量 l/d 也减小.

现在取两个尺寸不同但材料相同 (E 和 σ 相同) 的几何相似结构. 假设外载荷值正比于长度的平方而改变, 即

$$\frac{\mathscr{P}}{Ed^2} = \text{const}.$$

显然, 这时参量 $\rho g d/E$ 随结构尺寸的减小而减小, 因此, 力学相似性将被破坏. 在小尺寸结构上相对变形也小, 所以小尺寸结构有较大的强度. 然而, 这个结论只在材料的比重 $\gamma = \rho g$ 起重要作用的情况下才是正确的. 若自重 γ 不重要, 而 $\mathscr{P}/Ed^2 = \text{const}$, 则对于不同尺度的物体, 相对变形具有同样的值.

再考虑 γ 不重要的一种情况, 并且已知对于给定的结构, 当外载荷 $\mathscr{P}$ 减小时比值 l/d 也减小. 如果外载荷与长度尺寸的立方成正比, 则小尺寸结构的比值 l/d 显然小于大尺寸结构的比值. 因此, 这时减小尺寸也使强度增大.

在某些情况下, 当模型和实物的某些无量纲参量 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots$ 具有不同的值, 但与此同时由附加的考虑事先已经知道所求无量纲量对这些无量纲主定参量 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots$ 的依赖关系的形式时, 可以利用明知是不相似现象的实验来进行模拟. 在这种情况下, 在模拟时需要保持不变的只是那些对其依赖关系未知的相似性参量.

有时, 当未知量对参量 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots$ 的依赖关系的形式作为工作假设而提出时, 可以采用上述办法进行模拟. 在做了模型研究之后, 所作假设就可以得到证实或者被推翻. 如上所述, 当雷诺数对某些未知特征量的影响不重要时, 在不同雷诺数值下进行的模拟, 在许多情况下可以作为这种模拟的例子; 而在雷诺数是重要的但对它

的依赖关系事先已知的情况下，也可以应用这种方法.

利用模型来进行研究，往往是实验研究和解决重要实际问题的唯一可行的方法. 在研究那些历程达几十、几百甚至几千年的自然现象时，情况就是如此，而相似的现象在模型试验的条件下只持续几小时或几天. 在模拟石油的渗流现象时，我们也会遇到这种情况. 也可能出现相反的情况：为了研究自然界中进行得极快的现象，可以转而研究与它相似的、在模型上进行得缓慢得多的现象.

模拟是一种在原则上和认识上具有普遍意义的极为重要的科学手段，但只应当把模拟看作完成主要任务的初步基础. 主要的任务在于实际确定自然规律，探索各类现象的普遍性质和特征，发展出研究和解决各种问题的实验和理论方法，最后，还在于得出解决具体的实际问题的系统的资料、方法、法则和建议.

附录一　具有若干张量自变量的非线性张量函数[1)]

В. В. 洛欣, Л. И. 谢多夫

许多基本的几何和物理概念是标量或张量, 所以具有几何或物理本质的各种规律在数学上可以通过标量关系式或张量关系式表述出来.

利用方程的张量写法能够表述那些具有不变性的规律, 也就是与坐标系的选择无关的规律. 当所研究的几何的或物理的现象、对象、定律和性质涉及对称性时, 相应的张量和张量方程就会具有一些附加的不变性和特别的性质.

主定参量是根据所研究的问题的基本前提条件提出的. 下面将发展出能够在线性和非线性问题中自动考虑各种对称性的一些方法, 这些方法的基础就是适当地选取相应的主定参量. 关于对称性所起作用的相应结论是利用类似于相似理论和量纲分析的方法[1] 得到的.

本文旨在解决两个基本问题:

(a) 证明了取向介质[2)] 和晶体的性质可以由张量给出, 并实际建立了作为几何参

[1)] 本文发表于《应用数学与力学》: Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких аргументов. Прикладная математика и механика, 1963, 27(3): 393—417 (Lokhin V. V., Sedov L. I. Nonlinear tensor functions of several tensor arguments. J. Appl. Math. Mech., 1963, 27(3): 597—629).

[2)] 取向介质 (текстура), 英文译为 oriented (textured) medium, 其定义在 3° 中给出 (见 353 页). ——译注

数集合的若干组简单的张量, 它们确定并给出了所有 7 种取向介质和所有 32 类晶体的对称性.

(b) 建立了以一系列标量和若干不同阶数的独立张量为自变量的任意阶张量函数公式的一般形式.

与这两个问题有密切关系的是对组成某种对称群的坐标变换集合的研究.

在物理学中, 对称性具有基本的意义. 相对于相应对称群不变的函数和各阶张量, 其专门形式已经在许多论文中得到研究. 相应结论被应用于各种实际问题, 成为发现诸多新效应的源泉.

在 Nye 的专著 [2] 中汇总了各种具体实例的基本结果, 还有关于前人工作的详细的参考文献.

在代数学中发展出了一种一般理论, 用来得到有限变换群下的标量不变量并研究其性质, 该不变量是张量分量和矢量分量的多项式. 对于任何正交有限群 G 已经证明[3], 总是存在多项式不变量的整有理基 (整基), 它是由给定的张量和矢量的分量组成的数目有限的标量不变量多项式, 并且由这些分量组成的任何不变量多项式都可以通过整基表示出来.

整基组成一组在群 G 的有限数目的变换下不变的量, 但是其元素——所给张量分量的多项式——在任何坐标变换下显然一般不是不变量, 尽管整基中包括这样的不变量. 整基的元素数目只与群以及所给张量和矢量有关, 该数目一般大于所给张量和矢量的独立分量的数目, 所以整基的元素一般而言是函数相关的.

在 Döring[4], Smith 和 Rivlin[5], Pipkin 和 Rivlin[6], Сиротин[7, 8] 的论文中实际建立了取向介质和晶体群的整基. 下面将证明, 构造张量函数的充分必要条件是使用一组完全的函数独立的联立不变量[9, 10], 这些不变量是由给出对称群的张量分量和其他张量自变量组成的.

在 Smith, Rivlin 和 Pipkin[5, 11, 12], Bhagavantam 和 Venkatarayudu[13], Jahn[14], Шубников[15, 16, 17] 和 Сиротин[7, 8, 18, 19] 的论文或专著中给出了构造具有给定对称性的标量和矢量的实例. Копцик 在论文 [20] 中研究了具有物理本质的各种张量, 他把晶体的对称性定义为"晶体所具有的在给定时刻所观察到的一些性质的点对称群的交集" (见 [20], 935 页).

对于自变量为张量的张量函数, 二阶张量的情况已经被研究清楚. 这时, 张量之间的函数关系归结为二阶矩阵之间的函数关系. 这个领域的基本结果是哈密顿一凯莱公式及其向自变量是若干个矩阵 (二阶张量) 的情况的推广[21—24, 25—28]. 然而, 在这些推广中基本上只考虑了矩阵和张量分量的多项式函数.

1°. **基本概念**. 众所周知, 张量可以看作与坐标系的选择无关的不变的对象; 在相应的基中, 张量是由标量分量确定的. 可以用各种方法引入张量的基, 例如在某一流形空间中, 总是可以把坐标系基矢量的矢积取作张量的基.

为简单起见, 下面只考虑三维空间中的张量. 设 x^1, x^2, x^3 是空间点的坐标, e_1,

e_2, e_3 是协变基矢量[1)]. 我们用 $\boldsymbol{H}$ 表示一个 r 阶张量, 用 $H^{\alpha_1\cdots\alpha_r}$ 表示它通过基 e_1, e_2, e_3 表示的分量. 下面将把张量 $\boldsymbol{H}$ 表示为和的形式:

$$\boldsymbol{H} = H^{\alpha_1\cdots\alpha_r} \boldsymbol{e}_{\alpha_1}\cdots \boldsymbol{e}_{\alpha_r}, \tag{1.1}$$

式中对取值为 1, 2, 3 的所有角标 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 求和. 在一般情况下, 公式 (1.1) 包含 3^r 个线性无关项, 每一项都可以视为一个专门的张量.

我们指出, 对同一个坐标系可以引入各种流形和各种相应的基矢量. 对于同样的坐标 x^i 和同样的分量 $H^{\alpha_1\cdots\alpha_r}$, 可以考虑不同的基所对应的各种张量. 例如, 在使用运动的、不断变形的拉格朗日坐标系时, 可以把这种不同的流形看作给定介质的各种状态[26]. 还可能出现的情况是, 对于给定的拉格朗日坐标系, 相应各种流形具有不同的度规. 于是, 可以同时考虑具有同样给定分量的不同张量, 但是它们的基是不同的, 所在空间也是不同的, 其中某些空间可能是欧几里得空间, 而其余空间是非欧几里得空间 (Kondo, Kröner, Bilby 等).

以下理论的发展是对度规空间中的张量进行的. 我们用 $\mathrm{d}s$ 表示坐标分别为 x^i 和 $x^i + \mathrm{d}x^i$ 的两点之间的距离, 设量 $\mathrm{d}s^2$ 由公式 $\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta$ 定义. 矩阵 (g_{ij}) 组成基本度规张量 $\boldsymbol{g}$ 的协变分量, 逆矩阵 (g^{ij}) 组成其逆变分量. 逆变基矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 由公式 $\boldsymbol{e}^i = g^{i\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha$ 定义. 对于基本度规张量 $\boldsymbol{g}$ 成立公式

$$\boldsymbol{g} = g_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}^\alpha\boldsymbol{e}^\beta = g^{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta = \delta^\alpha_\beta \boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}^\beta \quad (\delta^i_j \text{ 是克罗内克符号}). \tag{1.2}$$

各张量分量的升标、降标运算是利用 g_{ij} 和 g^{ij} 实现的. 公式 (1.1) 可以表示为

$$\boldsymbol{H} = \sum_{s=1}^{p} k_s \boldsymbol{H}_s, \tag{1.3}$$

式中 k_s 是标量, $\boldsymbol{H}_s$ 是某些 r 阶张量. 我们在下面总是假设张量 $\boldsymbol{H}_s$ 线性无关. 显然, $p \leqslant 3^r$.

设张量 $\boldsymbol{H}$ 的分量与坐标系的选择无关, 这些分量总是 m 个张量

$$\boldsymbol{T}_\varkappa = T_\varkappa^{\alpha_1\cdots\alpha_{\rho_\varkappa}} \boldsymbol{e}_{\alpha_1}\cdots \boldsymbol{e}_{\alpha_{\rho_\varkappa}} \quad (\varkappa = 1, \cdots, m) \tag{1.4}$$

的分量的同样一些函数.

整数 $\rho_1, \cdots, \rho_m$ 确定了张量 $\boldsymbol{T}_\varkappa$ 的阶数. 在一般情况下, 数 $\rho_1, \cdots, \rho_m$ 彼此不同, 并且不等于 r. 按照定义, 我们把张量 $\boldsymbol{H}$ 称为张量 $\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m$ 的函数. 在张量 $\boldsymbol{T}_\varkappa$ 中既可能有变量, 也可能有常量, 但它们都是张量函数 $\boldsymbol{H}$ 的张量自变量.

如果从张量组 $\boldsymbol{T}_\varkappa$ 可以组成 3^r 个线性无关的 r 阶张量 $\boldsymbol{H}_s$, 则此时张量 $\boldsymbol{H}$ 满足公式 (1.3), 其中标量 k_s 只依赖于张量组 $\boldsymbol{T}_\varkappa$ 的联立不变量和其它一些可能的额外给定的标量自变量.

1) 坐标系是任意的.

下面只研究在张量自变量 $\boldsymbol{T}_\varkappa$ 中包含有张量 g 的张量函数.

利用乘法和缩并这两种运算就可以从张量 $\boldsymbol{T}_\varkappa$ 构造张量 $\boldsymbol{H}_s$ [1]. 因为在张量自变量中含有张量 g, 所以对任何 2 个角标总是能够进行缩并运算. 若干个张量的不定乘运算给出一个张量, 其阶数等于相乘各张量的阶数之和. 对 $2l$ 个角标的缩并使张量的阶数降低 $2l$.

分量为 T^{mknl} 的给定张量 $\boldsymbol{T}$ 与分量为 $\delta^i_n\delta^j_m$ 的张量 $\boldsymbol{S}$ 相乘后再按照显然的方式缩并, 结果是分量为

$$T^{*ikjl} = T^{jkil}$$

的同阶张量. 张量 $\boldsymbol{T}^*$ 称为张量 $\boldsymbol{T}$ 的异构张量. 因此, 交换角标的运算可以归结为与基本度规张量相乘再缩并. 按照定义, 交换 $\boldsymbol{T}$ 的若干个角标之后得到的张量也称为张量 $\boldsymbol{T}$ 的异构张量.

下面给出构造形如 (1.3) 的张量函数一般公式的一些方法, 为此需要利用乘法和缩并运算从张量自变量 (1.4) 建立线性无关的张量基 $\boldsymbol{H}_s$ $(s = 1, \cdots, p)$.

2°. **张量的对称群.** 张量 $\boldsymbol{A}$ 的逆变分量 $A^{\alpha_1\cdots\alpha_r}$ 具有由一组坐标变换矩阵 [2]

$$(a^{i\cdot}_{\cdot j}) \quad \left(a^{i\cdot}_{\cdot j} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \quad y^i = y^i(x^j)\right)$$

给出的对称群 G, 如果对于群 G 的所有矩阵都成立等式

$$A^{i_1\cdots i_r} = A^{\alpha_1\cdots\alpha_r} a^{i_1\cdot}_{\cdot\alpha_1}\cdots a^{i_r\cdot}_{\cdot\alpha_r}. \tag{2.1}$$

基本度规张量 g 所具有的变换群称为正交变换群. 换言之, 正交变换群的变换矩阵满足彼此等价的方程组

$$g^{ij} = g^{\alpha\beta} a^{i\cdot}_{\cdot\alpha} a^{j\cdot}_{\cdot\beta}, \quad g_{ij} = g_{\alpha\beta} a^{\alpha\cdot}_{\cdot i} a^{\beta\cdot}_{\cdot j} \tag{2.2}$$

容易检验, 如果 G 是正交群, 则从张量 $\boldsymbol{A}$ 的逆变分量的不变性条件 (2.1) 可知, 张量 $\boldsymbol{A}$ 的分量, 无论其角标结构如何, 都在组成群 G 的坐标变换下不变 [3]. 所以, 对于正交变换, 可以简单地讨论张量的对称性和它的所有分量相对于群 G 的不变性.

---

[1] 可以证明, 当张量自变量中包含度规张量的协变分量 g_{ij} 和逆变分量 g^{ij} 时, 或者, 作为这种情况的推论, 当张量自变量中包含张量 $\boldsymbol{T}_\varkappa$ 的具有各种可能的角标结构的分量时, 用这种方法从 $\boldsymbol{T}_\varkappa$ 组成 p 个线性无关的 r 阶张量 $\boldsymbol{H}_s$ 总是可能的. 这个假设在其它一些更一般的情况下也成立. 这里并不需要这样的证明, 因为对于三维空间中正交对称性的所有可能的形式, 下面借助于张量自变量的分量的乘法和缩并运算实际组成了 p 个线性无关的张量 $\boldsymbol{H}_s$. 同时, 从一般理论可知, 具有给定对称性的任何 $p+1$ 个 r 阶张量都是线性相关的.

[2] 为简单起见, 在群 G 的矩阵中, 元素的编号都被省略, 所以上述写法中的 $a^{i\cdot}_{\cdot j}$ 其实是指 $a_{(\nu)}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$, 其中 $\nu = 1, \cdots, h$, 而 h 等于群 G 的元素的数目.

[3] 如果群 G 不是正交群, 则从 (2.1) 无法得出张量 $\boldsymbol{A}$ 的具有其它角标结构的分量的不变性.

使张量 $\boldsymbol{A}$ 保持不变的所有正交变换组成张量 $\boldsymbol{A}$ 的对称群. 某个张量 $\boldsymbol{A}$ 的对称群可能仅由恒等变换组成. 任意二阶张量 (非对称, $A^{ij} \neq A^{ji}$) 的对称群包括 2 种变换——恒等变换和反演变换. 任意二阶对称张量的对称群与三轴椭球自变换群相同. 如果张量椭球是旋转椭球, 则对称群是无限群. 二阶球张量的对称群与完全的正交旋转群相同, 这与基本度规张量 $\boldsymbol{g}$ 的情况一致.

考虑若干个张量 $\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m$, 并分别用 $G_1, \cdots, G_m$ 表示其对称群. 由群 $G_1, \cdots, G_m$ 相交组成的群 G 称为 $\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m$ 这一组张量的对称群. 不难看出, 张量 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m)$ 具有对称群 G. 这是因为, 张量 $\boldsymbol{H}$ 的分量是诸张量 $\boldsymbol{T}_i$ 的分量的函数, 而这些张量在群 G 中的变换下不变, 所以张量 $\boldsymbol{H}$ 的分量相对于群 G 也是不变的. 因此显然有, 若一个张量是通过乘法和缩并运算从若干个张量得到的, 则其对称群或者是组成该张量的那些张量的对称群的交集, 或者具有更高的对称性, 而上述交集是其子群.

如果张量 $\boldsymbol{H}$ 具有对称群 G, 则公式 (1.3) 中的线性无关项的数目 p 一般小于 3^r. 对于给定的群 G, 如果张量的阶数 r 是给定的, 就可以利用特征标理论[13, 14, 30]来计算数目 p, 而取向介质和晶体对称群的相应结果由文献 [13, 14, 18] 给出.

如果奇数阶张量 $\boldsymbol{H}$ 只具有由恒等变换组成的平凡群 G, 则线性无关项的数目 p 等于 3^r, 这时张量 $\boldsymbol{H}$ 具有最一般的形式.

如果张量 $\boldsymbol{H}$ 是偶数阶的, 则其对称群 G 总是至少包含 2 种变换——恒等变换和反演变换. 对于仅包括反演变换和恒等变换的对称群, 在 r 是奇数时有 $\boldsymbol{H}=0$, 所以 $p=0$; 在 r 是偶数时有 $p=3^r$, 这时的偶数阶张量具有最一般的形式.

公式 (1.3) 中的标量系数 k_s 在一般情况下是张量 $\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m$ 的联立不变量和任何数目的给定标量 (如温度、浓度等) 的函数. 在这些联立不变量中, 某些可能是常量, 其余的则可能是变量.

我们用 $\Omega_1, \cdots, \Omega_N$ 表示张量组 $\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m$ 的完全的联立不变量组[9, 10]. 由不变量组的完全性可知, 由张量 $\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m$ 的分量组成的任何不变量 J 都满足函数关系

$$J = f(\Omega_1, \cdots, \Omega_N).$$

依照定义, 不变量 Ω_i 的大小及其对张量分量的函数形式对于任何坐标变换都保持不变. 借助于张量的乘法和缩并运算即可得出这样的不变量, 这时它们是张量 $\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m$ 的分量的齐次多项式[9, 10].

假设在张量 $\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m$ 中, 张量 $\boldsymbol{T}_\nu, \cdots, \boldsymbol{T}_m$ $(1 < \nu \leqslant m)$ 是作为参量的常张量. 设张量组 $\boldsymbol{T}_\nu, \cdots, \boldsymbol{T}_m$ 具有有限对称群 G^*.

如果在坐标系 x^i 中给出张量 $\boldsymbol{T}_\nu, \cdots, \boldsymbol{T}_m$ 的分量并固定这些分量的值, 则不变量 Ω_i 归结为仅以张量 $\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_{\nu-1}$ 的分量为自变量的函数 ω_i, 并且在坐标系 x^i 中成立等式 $\omega_i = \Omega_i$.

在其他坐标系中, 这些等式一般不成立. 不过, 这些等式对于所有由群 G^* 确定

的坐标变换都是成立的, 因为张量 $\boldsymbol{T}_\nu$, $\cdots$, $\boldsymbol{T}_m$ 的分量在这些变换下不变. 量 ω_i 在任意坐标变换下一般不是不变量. 显然, 如果某些 ω_i 只依赖于张量 $\boldsymbol{T}_\nu$, $\cdots$, $\boldsymbol{T}_m$ 的分量, 或者只依赖于张量 $\boldsymbol{T}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{T}_{\nu-1}$ 的分量, 则这些 ω_i 在坐标变换下不变. 此外还显然, 所有作为张量 $\boldsymbol{T}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{T}_{\nu-1}$ 的分量的函数 ω_i 都可以视为相对于群 G^* 的不变量. 因此, 公式 (1.3) 中的不变量系数 k_s 是 Ω_i 的函数. 如果只使用群 G^* 中的坐标变换, 量 k_s 就可以看作只依赖于不变量 ω_i 的函数.

不变量 ω_i 类似于整基的不变量. 只要适当选取一组完全的不变量 Ω_i, 量 ω_i 就与整基相同. 在一般情况下, 那些函数独立的不变量具有特别的意义. 可以采用各种方法来选取函数独立的不变量.

用给定的张量 $\boldsymbol{T}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{T}_m$ 构造张量 $\boldsymbol{H}_s$ 总是可能的, 下面将举例说明相应的一般方法.

张量 $\boldsymbol{H}_s$ 的线性无关性可以根据几何方法直接证明, 也可以利用计算相应行列式的方法进行检验, 还可以利用其他一些方法加以证明. 例如, 如果张量 $\boldsymbol{H}_{s1}$ 和 $\boldsymbol{H}_{s2}$ 正交或具有不同的对称群, 它们就是线性无关的, 否则这两个张量成正比, 而这与它们的对称条件矛盾. 不过, 具有相同对称群的张量也可能是线性无关的.

设张量 $\boldsymbol{H}_s$ 具有对称群 G_s. 在许多情况下, 最好[19] 这样选取张量 $\boldsymbol{H}_s$, 使得

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \cdots \supseteq G_p.$$

显然, 总可以取只依赖于基本度规张量 $\boldsymbol{g}$ 或只依赖于 $\boldsymbol{g}$ 和三阶张量

$$\boldsymbol{E} = |g^{ij}|^{1/2}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)$$

的 q ($\leqslant p$) 个张量 $\boldsymbol{H}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{H}_q$ 作为前 q 个线性无关的张量.

这些张量对应着相对于完全正交群或正常正交群的各向同性张量. 各向同性 r 阶张量 $\boldsymbol{H}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{H}_q$ 已经在文献中得到了很好的研究[3, 9, 10, 30].

对于三维空间中的各向同性 r 阶张量, 数 q 的最大值等于[30]

$r=1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$q=0$	0	1	1	3	6	15	36	91	232	603

所有各向同性 r 阶张量都是 $\boldsymbol{H}_1$ 的异构张量, 并且

$$H_1^{\alpha_1\cdots\alpha_r} = g^{\alpha_1\alpha_2}\cdots g^{\alpha_{r-1}\alpha_r} \qquad (r=2k),$$
$$H_1^{\alpha_1\cdots\alpha_r} = E^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}g^{\alpha_4\alpha_5}\cdots g^{\alpha_{r-1}\alpha_r} \qquad (r=2k+1).$$

数目 q 等于在考虑张量分量 g^{ij} 的对称性的情况下各种线性无关的异构张量 $\boldsymbol{H}_1$ 的数目. 如果 r 是奇数, 则对于完全正交群 $q=0$. 所有相对于完全正交群不变的奇数阶张量都是零张量. 相对于 $\Delta = |a^{i}_{\cdot j}| = 1$ 的正常正交旋转群不变的奇数阶张量仅在 $r \geqslant 3$ 时才不是零张量. 在 $r=3$ 时有 $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{E}$, 所以 $q=1$.

张量函数相对于某个角标排列群的对称性一般而言会使 p 和 q 减小. 从一般公式出发, 利用对相应角标的对称化和交错运算, 在只保留线性无关项的条件下总是容易得到具有对角标的相应对称性的张量函数公式.

3°. **给出取向介质和晶体的几何对称性的张量**[29]. 如果一种介质在每一点的全部性质相对于正交变换群不变, 我们就称之为各向同性介质. 各向同性介质可以分为以下 2 种类型:

(1) 相对于完全正交坐标变换群的各向同性介质, $\Delta = \pm 1$;

(2) 相对于旋转变换的各向同性 (旋磁性) 介质, $\Delta = +1$.

容易看出, 第一种情况下的对称性完全由基本度规张量 $\boldsymbol{g}$ 表征. 张量 $\boldsymbol{g}$ 的分量的不变性条件可以视为定义完全正交群的元素的条件, 所有元素都是实矩阵, 它们组成一个无限集合.

用来定义旋磁性介质的 $\Delta = +1$ 的旋转群是完全正交群的子群. 为了选取这样的子群, 需要提出方程 (2.2) 的一个附加条件, 这个条件要求由公式 (2.3) 定义的张量 $\boldsymbol{E}$ 的分量是不变量. 因此, 旋转群元素的无限集合完全决定于张量 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的分量的不变性条件. 这两个张量可以视为决定 $\Delta = +1$ 的旋转群的张量.

下面将使用由舒布尼科夫提出的简略符号来表示对称群. 根据文献 [15, 16], 完全正交群记为 $\infty/\infty \cdot m$ (该群的生成元素是无穷阶相交轴和镜像对称面 m). 旋转群对应记号 ∞/∞.

在 2° 中给出了关于任何阶张量的张量函数在各向同性条件下的一般形式的结果, 这时函数的自变量只包括 $\boldsymbol{g}$ 或 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{E}$.

各向异性介质最简单的例子是取向介质. 取向介质是指这样一种介质, 它在每一点的所有性质相对于由绕某个轴旋转任意角的变换组成的无限正交群不变. 显然, 取向介质的对称群是完全正交群的子群. 简单的分析表明, 取向介质只可能有 7 种不同类型, 其中包括 2 种各向同性介质.

后面的表格 (354—355 页) 给出了各种取向介质的相应几何图形和给定其对称群的相应张量和矢量. 这些结果的正确性容易直接检验.

对于具有连续或离散结构的一种各向异性介质, 如果可以引入与所考虑的介质具有同样几何对称性的三维周期性布拉维格子 (在固定坐标系中不同布拉维格子的周期相同), 这种介质就称为晶体. 具有给定周期的布拉维格子能够具有有限点对称群, 群的形式既依赖于所研究的布拉维格子的构造, 也依赖于给出周期的平行六面体单元的形式.

众所周知[12, 16], 由有限点群描述的晶体只有 32 类不同的对称性. 在 354—355 页的表格中列出了所有 32 个晶类的结果, 每一种对称群由相应几何图形描述. 单位基矢量 e_1, e_2, e_3 组成晶体物理学正交基, 在晶体对称示意图中指明了此正交基的方向. 在每个方格的左上角给出了相应群的舒布尼科夫符号, 此外, 在每个方格中还给出了由我们建立起来的表征并给出所研究的群的若干简单张量的记号. 相应张量

x^1, x^2, x^3 是晶体学笛卡儿坐标

ξ^1, ξ^2, ξ^3 是任意坐标

$$a^{i\cdot}_{\cdot j} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}, \quad \Delta = \det(a^{i\cdot}_{\cdot j})$$

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i}$$

$$\boldsymbol{e}_j = a^{\alpha\cdot}_{\cdot j}\boldsymbol{\epsilon}_\alpha, \quad \boldsymbol{e}_3^2 = a^{\alpha\cdot}_{\cdot 3}a^{\beta\cdot}_{\cdot 3}\boldsymbol{\epsilon}_\alpha\boldsymbol{\epsilon}_\beta$$

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e}_1^2 + \boldsymbol{e}_2^2 + \boldsymbol{e}_3^2 = g^{\alpha\beta}\boldsymbol{\epsilon}_\alpha\boldsymbol{\epsilon}_\beta$$

取向介质	立方晶系	四角晶系	六角晶系
$\infty/\infty\cdot m$: $\boldsymbol{g}$	$\bar{6}/4$: O_h		
∞/∞: $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{E}$	$3/4$: O_h, $\boldsymbol{E}$		
$m\cdot\infty:m$: $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{e}_3^2$	$3/\bar{4}$: T_d, $\boldsymbol{g}$	$m\cdot 4:m$: O_h, $\boldsymbol{e}_3^2$ $\bar{4}\cdot m$: T_d, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{e}_3^2$	$m\cdot 6:m$: D_{6h}, $\boldsymbol{e}_3^2$ $m\cdot 3:m$: D_{3h}, $\boldsymbol{e}_3^2$
$\infty:2$: $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{e}_3^2$	$3/2$: T_d, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{E}$ (T_h, $\boldsymbol{E}$)	$4:2$: O_h, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{e}_3^2$	$6:2$: O_{6h}, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{e}_3^2$
$\infty:m$: $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{e}_3^2$, $\boldsymbol{\Omega}$	$\bar{6}/2$: T_h	$4:m$: O_h, $\boldsymbol{e}_3^2$, $\boldsymbol{\Omega}$ $\bar{4}$: T_d, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{e}_3^2$, $\boldsymbol{\Omega}$	$6:m$: D_{6h}, $\boldsymbol{e}_3^2$, $\boldsymbol{\Omega}$ $3:m$: D_{3h}, $\boldsymbol{e}_3^2$, $\boldsymbol{\Omega}$
$\infty\cdot m$: $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{e}_3$		$4\cdot m$: O_h, $\boldsymbol{e}_3$	$6\cdot m$: O_{6h}, $\boldsymbol{e}_3$
∞: $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{e}_3$		4: O_h, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{e}_3$	6: O_{6h}, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{e}_3$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 \\ &= \Delta(\boldsymbol{\epsilon}_1\boldsymbol{\epsilon}_2\boldsymbol{\epsilon}_3 - \boldsymbol{\epsilon}_2\boldsymbol{\epsilon}_1\boldsymbol{\epsilon}_3 + \boldsymbol{\epsilon}_2\boldsymbol{\epsilon}_3\boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_3\boldsymbol{\epsilon}_2\boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_3\boldsymbol{\epsilon}_1\boldsymbol{\epsilon}_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1\boldsymbol{\epsilon}_3\boldsymbol{\epsilon}_2)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 = (a^{\alpha\cdot}_{\cdot 1}a^{\beta\cdot}_{\cdot 2} - a^{\alpha\cdot}_{\cdot 2}a^{\beta\cdot}_{\cdot 1})\boldsymbol{\epsilon}_\alpha\boldsymbol{\epsilon}_\beta = a^{\alpha\cdot}_{\cdot 1}a^{\beta\cdot}_{\cdot 2}(\boldsymbol{\epsilon}_\alpha\boldsymbol{\epsilon}_\beta - \boldsymbol{\epsilon}_\beta\boldsymbol{\epsilon}_\alpha)$$

$$\boldsymbol{O}_h = \boldsymbol{e}_1^4 + \boldsymbol{e}_2^4 + \boldsymbol{e}_3^4 = (a^{\alpha\cdot}_{\cdot 1}a^{\beta\cdot}_{\cdot 1}a^{\gamma\cdot}_{\cdot 1}a^{\delta\cdot}_{\cdot 1} + a^{\alpha\cdot}_{\cdot 2}a^{\beta\cdot}_{\cdot 2}a^{\gamma\cdot}_{\cdot 2}a^{\delta\cdot}_{\cdot 2} + a^{\alpha\cdot}_{\cdot 3}a^{\beta\cdot}_{\cdot 3}a^{\gamma\cdot}_{\cdot 3}a^{\delta\cdot}_{\cdot 3})\boldsymbol{\epsilon}_\alpha\boldsymbol{\epsilon}_\beta\boldsymbol{\epsilon}_\gamma\boldsymbol{\epsilon}_\delta$$

$$\boldsymbol{T}_h = \boldsymbol{e}_1^2\boldsymbol{e}_2^2 + \boldsymbol{e}_2^2\boldsymbol{e}_3^2 + \boldsymbol{e}_3^2\boldsymbol{e}_1^2, \quad \boldsymbol{T}_d = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{D}_{3h} = \boldsymbol{e}_1^3 - \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2^2 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2^2\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{D}_{3d} = \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{D}_{3h}, \quad \boldsymbol{D}_{6h} = \boldsymbol{D}_{3h}^2$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{2h} &= \lambda^{11}\boldsymbol{e}_1^2 + \lambda^{22}\boldsymbol{e}_2^2 + \lambda^{33}\boldsymbol{e}_3^2 = \lambda^{ij}a^{\alpha\cdot}_{\cdot i}a^{\beta\cdot}_{\cdot j}\boldsymbol{\epsilon}_\alpha\boldsymbol{\epsilon}_\beta = d^{\alpha\beta}\boldsymbol{\epsilon}_\alpha\boldsymbol{\epsilon}_\beta \\ &\quad (\lambda^{11} \neq \lambda^{22} \neq \lambda^{33} \neq \lambda^{11} \neq 0, \quad d^{\alpha\beta} = d^{\beta\alpha})\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{D}_{2h} + \omega^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = C^{\alpha\beta}\boldsymbol{\epsilon}_\alpha\boldsymbol{\epsilon}_\beta, \quad \omega^{ij} = -\omega^{ji} \neq 0$$

三角晶系	正交晶系	单斜晶系	三斜晶系
$\bar{6}\cdot m$ $\boldsymbol{D}_{3d}, \boldsymbol{e}_3^2$	$m\cdot 2:m$ $\boldsymbol{D}_{2h}, \boldsymbol{g}$ $\alpha=\beta=\gamma=90°$		
$3:2$ $\boldsymbol{D}_{3h}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{e}_3^2$	$2:2$ $\boldsymbol{D}_{2h}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{g}$		
$\bar{6}$ $\boldsymbol{D}_{3d}, \boldsymbol{e}_3^2, \boldsymbol{\Omega}$		$2:m$ $\boldsymbol{D}_{2h}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{g}$ $\alpha=\beta=90°, \gamma\neq 90°$	$\bar{2}$ $\boldsymbol{C}_i$ $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$ $\alpha, \beta, \gamma\neq 90°$
$3\cdot m$ $\boldsymbol{D}_{3h}, \boldsymbol{e}_3$	$2\cdot m$ $\boldsymbol{D}_{2h}, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{g}$		
3 $\boldsymbol{D}_{3h}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{e}_3$		2 $\boldsymbol{D}_{2h}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{g}$ m $\boldsymbol{D}_{2h}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$	1 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$

的定义由表格中的公式给出[1)].

考虑定义立方晶系群对称性的张量. 我们来证明, 张量 $\boldsymbol{O}_h$ 相对于一个由 48 种变换组成的群不变, 这个群给出了群 $\bar{6}/4$ 的同构表示, 并且不存在使张量 $\boldsymbol{O}_h$ 不变的任何其他变换. 为了证明这个结论, 我们来求出使张量 $\boldsymbol{O}_h$ 不变的所有实变换.

张量 $\boldsymbol{O}_h$ 的逆变分量的不变性条件等价于变换矩阵 $(a^{i\cdot}_{\cdot j})$ 的 9 个元素的以下非线性代数方程组:

$$a^{\alpha\cdot}_{\cdot 1}a^{\beta\cdot}_{\cdot 1}a^{\gamma\cdot}_{\cdot 1}a^{\delta\cdot}_{\cdot 1}+a^{\alpha\cdot}_{\cdot 2}a^{\beta\cdot}_{\cdot 2}a^{\gamma\cdot}_{\cdot 2}a^{\delta\cdot}_{\cdot 2}+a^{\alpha\cdot}_{\cdot 3}a^{\beta\cdot}_{\cdot 3}a^{\gamma\cdot}_{\cdot 3}a^{\delta\cdot}_{\cdot 3}=\begin{cases}1,\\0.\end{cases} \tag{3.1}$$

等式右侧在 $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ 时等于 1, 在其余情况下等于 0. 令 $\alpha=\beta$ 且 $\gamma=\delta$, 在 $\alpha\neq\gamma$ 时得方程

$$(a^{\alpha\cdot}_{\cdot 1})^2(a^{\gamma\cdot}_{\cdot 1})^2+(a^{\alpha\cdot}_{\cdot 2})^2(a^{\gamma\cdot}_{\cdot 2})^2+(a^{\alpha\cdot}_{\cdot 3})^2(a^{\gamma\cdot}_{\cdot 3})^2=0\quad(\alpha\neq\gamma), \tag{3.2}$$

从而

$$a^{\alpha\cdot}_{\cdot i}a^{\gamma\cdot}_{\cdot i}=0. \tag{3.3}$$

因为行列式 $\det(a^{\alpha\cdot}_{\cdot i})\neq 0$, 所以从等式 (3.3) 可知, 在矩阵 $(a^{\alpha\cdot}_{\cdot i})$ 的每一行和每一列中分别只有 1 个非零元素.

因为在 $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ 时根据 (3.1) 有

$$(a^{\alpha\cdot}_{\cdot 1})^4+(a^{\alpha\cdot}_{\cdot 2})^4+(a^{\alpha\cdot}_{\cdot 3})^4=1,$$

所以对于矩阵 $(a^{\alpha\cdot}_{\cdot i})$ 的每一个非零实元素都成立等式

$$a^{p\cdot}_{\cdot q}=\pm 1. \tag{3.4}$$

穷举所有可能情况, 从 (3.3) 和 (3.4) 可知, 由取值为 1 或 0 的元素 $(a^{p\cdot}_{\cdot q})^2$ 组成的矩阵只可能具有下列形式:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

所得矩阵一共只有 6 个. 按照 (3.4), 如果考虑 $a^{p\cdot}_{\cdot q}$ 的符号, 则 (3.5) 中的 6 个矩

1) 在这个表格中和下文中, 矢量的幂理解为并积.

阵中的每一个都给出 8 个矩阵 $(a^{p\cdot}_{\cdot q})$. 例如, (3.5) 中的第一个矩阵对应以下矩阵:

$$\begin{pmatrix}+1&0&0\\0&+1&0\\0&0&+1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}+1&0&0\\0&+1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}+1&0&0\\0&-1&0\\0&0&+1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}+1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&+1&0\\0&0&+1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&+1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&+1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

我们知道, 依照立方对称群 $\bar{6}/4$ 的定义, (3.5) 中的每一个矩阵都对应形如 (3.6) 的矩阵组, 这些矩阵合在一起组成一个完全群, 即立方对称变换矩阵群 $\bar{6}/4$, 其元素为 $6\times 8=48$ 个正交矩阵. 因此, 方程组 (3.1) 的解所对应的任何矩阵只可能是诸如 (3.6) 的 48 个矩阵之一. 另一方面, 容易证明逆命题也成立: 所得 48 个矩阵中的每一个矩阵都给出方程组 (3.1) 的一个解.

现在求出使张量 $\boldsymbol{T}_d$ 保持不变的变换群矩阵. 张量 $\boldsymbol{T}_d$ 的逆变分量的不变性条件等价于变换矩阵 $(a^{i\cdot}_{\cdot j})$ 的 9 个元素所满足的以下非线性代数方程组:

$$a^{\alpha\cdot}_{\cdot 1}a^{\beta\cdot}_{\cdot 2}a^{\gamma\cdot}_{\cdot 3}+a^{\alpha\cdot}_{\cdot 2}a^{\beta\cdot}_{\cdot 1}a^{\gamma\cdot}_{\cdot 3}+a^{\alpha\cdot}_{\cdot 3}a^{\beta\cdot}_{\cdot 2}a^{\gamma\cdot}_{\cdot 1}+a^{\alpha\cdot}_{\cdot 1}a^{\beta\cdot}_{\cdot 3}a^{\gamma\cdot}_{\cdot 2}+a^{\alpha\cdot}_{\cdot 2}a^{\beta\cdot}_{\cdot 3}a^{\gamma\cdot}_{\cdot 1}+a^{\alpha\cdot}_{\cdot 3}a^{\beta\cdot}_{\cdot 1}a^{\gamma\cdot}_{\cdot 2}=\begin{cases}1,\\0.\end{cases} \tag{3.7}$$

如果 α, β, γ 彼此不同, 则 (3.7) 的右侧为 1; 如果在 α, β, γ 中哪怕只有一对角标相同, 则 (3.7) 的右侧为 0. 取 $\gamma=\beta$, 则由 (3.7) 得方程

$$a^{\alpha\cdot}_{\cdot 1}a^{\beta\cdot}_{\cdot 2}a^{\beta\cdot}_{\cdot 3}+a^{\alpha\cdot}_{\cdot 2}a^{\beta\cdot}_{\cdot 1}a^{\beta\cdot}_{\cdot 3}+a^{\alpha\cdot}_{\cdot 3}a^{\beta\cdot}_{\cdot 1}a^{\beta\cdot}_{\cdot 2}=0,\quad \alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3. \tag{3.8}$$

因为 $\det(a^{i\cdot}_{\cdot j})\neq 0$, 所以由方程组 (3.8) 可知

$$a^{\beta\cdot}_{\cdot i}a^{\beta\cdot}_{\cdot j}=0, \tag{3.9}$$

式中 β 是任意的固定角标.

根据这个结果和条件 $\det(a^{i\cdot}_{\cdot j})\neq 0$ 可知, 在矩阵 $(a^{i\cdot}_{\cdot j})$ 的每一行和每一列只有 1 个非零元素. 非零元素角标结构不同的这样的矩阵只有 6 个:

$$\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&b_1&0\\0&0&c_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a_2&0&0\\0&0&b_2\\0&c_2&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&a_3&0\\b_3&0&0\\0&0&c_3\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&a_4&0\\0&0&b_4\\c_4&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&a_5\\0&b_5&0\\c_5&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&a_6\\b_6&0&0\\0&c_6&0\end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

方程 (3.7) 在角标 α, β, γ 彼此不同时给出

$$a_i b_i c_i = 1, \quad i = 1, \cdots, 6. \tag{3.11}$$

容易看出, 对于正交变换, 在条件

$$\sum_{\alpha=1}^{3} a^{i\cdot}_{\cdot\alpha} a^{j\cdot}_{\cdot\alpha} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.12}$$

得到满足时成立等式

$$a_i = \pm 1, \quad b_i = \pm 1, \quad c_i = \pm 1.$$

在一般情况下, 为了表示对称群 $3/\bar{4}$, 除了要求张量 $\boldsymbol{T}_d$ 的不变性, 还必须补充张量 $\boldsymbol{g}$ 的不变性条件, 因为只有在这样的条件下才能满足晶体学对称群的定义所包含的条件 (3.12)[1].

矩阵组 (3.10) 和条件 (3.13) 一起确定了对称群 $\bar{6}/4$ 的 48 个矩阵, 而附加等式 (3.11) 分离出一个由 24 个矩阵组成的子群, 并且在这些矩阵中, 或者 $a_i = b_i = c_i = 1$, 或者在 a_i, b_i, c_i 这 3 个数中有 2 个都等于 -1. 例如, 从 (3.10) 中的第一个矩阵只得出 4 个矩阵:

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

容易检验, 给出群 $3/\bar{4}$ 的上述 24 个矩阵是封闭方程组 (3.7) 的解. 此外, 这些矩阵在 $\det(a^{i\cdot}_{\cdot j}) \neq 0$ 时组成方程组 (3.7) 在所求矩阵是正交矩阵的条件下的所有实数解.

现在考虑张量 $\boldsymbol{T}_h$ 的不变性条件. 变换矩阵的元素 $a^{i\cdot}_{\cdot j}$ 的方程组就是张量 $\boldsymbol{T}_h$ 的逆变分量的不变性条件, 其形式为

$$a^{\alpha\cdot}_{\cdot 2} a^{\beta\cdot}_{\cdot 2} a^{\gamma\cdot}_{\cdot 3} a^{\delta\cdot}_{\cdot 3} + a^{\alpha\cdot}_{\cdot 3} a^{\beta\cdot}_{\cdot 3} a^{\gamma\cdot}_{\cdot 1} a^{\delta\cdot}_{\cdot 1} + a^{\alpha\cdot}_{\cdot 1} a^{\beta\cdot}_{\cdot 1} a^{\gamma\cdot}_{\cdot 2} a^{\delta\cdot}_{\cdot 2} = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

并且在 $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = \delta = 3$ 时, 或在 $\alpha = \beta = 3$, $\gamma = \delta = 1$ 时, 或在 $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = \delta = 2$ 时, 等式右侧为 1, 而在所有其余情况下等式右侧为 0. 从 (3.15) 有:

在 $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = \delta = 1$, 3 时

$$a^{1\cdot}_{\cdot 2} a^{1\cdot}_{\cdot 3} = 0,\ a^{1\cdot}_{\cdot 2} a^{3\cdot}_{\cdot 3} = 0,\ a^{1\cdot}_{\cdot 3} a^{1\cdot}_{\cdot 1} = 0,\ a^{1\cdot}_{\cdot 3} a^{3\cdot}_{\cdot 1} = 0,\ a^{1\cdot}_{\cdot 1} a^{1\cdot}_{\cdot 2} = 0,\ a^{1\cdot}_{\cdot 1} a^{3\cdot}_{\cdot 2} = 0, \tag{3.16}$$

在 $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = \delta = 1$, 2 时

$$a^{2\cdot}_{\cdot 2} a^{1\cdot}_{\cdot 3} = 0,\ a^{2\cdot}_{\cdot 2} a^{2\cdot}_{\cdot 3} = 0,\ a^{2\cdot}_{\cdot 3} a^{1\cdot}_{\cdot 1} = 0,\ a^{2\cdot}_{\cdot 3} a^{2\cdot}_{\cdot 1} = 0,\ a^{2\cdot}_{\cdot 1} a^{1\cdot}_{\cdot 2} = 0,\ a^{2\cdot}_{\cdot 1} a^{2\cdot}_{\cdot 2} = 0, \tag{3.17}$$

[1] 容易检验, 在 $|\boldsymbol{e}_i| = 1$ 时成立等式 $2\boldsymbol{g} = \boldsymbol{T}_d : \boldsymbol{T}_d$, 式中对 2 个相同位置的角标进行缩并; 然而, 根据这个等式和 (3.11) 并不能得出 $\boldsymbol{g}$ 相对于变换 (3.10) 的不变性.

在 $\alpha=\beta=3,\ \gamma=\delta=2,\ 3$ 时

$$a^{3\cdot}_{\cdot 2}a^{2\cdot}_{\cdot 3}=0,\ a^{3\cdot}_{\cdot 2}a^{3\cdot}_{\cdot 3}=0,\ a^{3\cdot}_{\cdot 3}a^{2\cdot}_{\cdot 1}=0,\ a^{3\cdot}_{\cdot 3}a^{3\cdot}_{\cdot 1}=0,\ a^{3\cdot}_{\cdot 1}a^{2\cdot}_{\cdot 2}=0,\ a^{3\cdot}_{\cdot 1}a^{3\cdot}_{\cdot 2}=0. \quad (3.18)$$

根据 18 个方程 (3.16)—(3.18) 和条件 $\det(a^{i\cdot}_{\cdot j})\neq 0$ 可知, 在矩阵 $(a^{i\cdot}_{\cdot j})$ 的每一行和每一列中只可能有 1 个非零元素; 于是,

$$\text{在 } a^{1\cdot}_{\cdot 1}\neq 0 \text{ 时 } a^{1\cdot}_{\cdot 2}=a^{1\cdot}_{\cdot 3}=a^{3\cdot}_{\cdot 2}=a^{2\cdot}_{\cdot 3}=a^{2\cdot}_{\cdot 1}=a^{3\cdot}_{\cdot 1}=0.$$

因此, 我们得到矩阵

$$\underset{\text{在 } a^{1\cdot}_{\cdot 1}\neq 0 \text{ 时}}{\begin{pmatrix} a^{1\cdot}_{\cdot 1} & 0 & 0\\ 0 & a^{2\cdot}_{\cdot 2} & 0\\ 0 & 0 & a^{3\cdot}_{\cdot 3}\end{pmatrix}},\quad \underset{\text{在 } a^{1\cdot}_{\cdot 2}\neq 0 \text{ 时}}{\begin{pmatrix} 0 & a^{1\cdot}_{\cdot 2} & 0\\ 0 & 0 & a^{2\cdot}_{\cdot 3}\\ a^{3\cdot}_{\cdot 1} & 0 & 0\end{pmatrix}},\quad \underset{\text{在 } a^{1\cdot}_{\cdot 3}\neq 0 \text{ 时}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{1\cdot}_{\cdot 3}\\ a^{2\cdot}_{\cdot 1} & 0 & 0\\ 0 & a^{3\cdot}_{\cdot 2} & 0\end{pmatrix}}. \quad (3.19)$$

在 $a^{1\cdot}_{\cdot 1}\neq 0$ 时, 3 个方程 (3.15) 的右侧都等于 1, 即

$$(a^{2\cdot}_{\cdot 2})^2(a^{3\cdot}_{\cdot 3})^2=1,\quad (a^{3\cdot}_{\cdot 3})^2(a^{1\cdot}_{\cdot 1})^2=1,\quad (a^{1\cdot}_{\cdot 1})^2(a^{2\cdot}_{\cdot 2})^2=1. \quad (3.20)$$

这些方程以及在 $a^{1\cdot}_{\cdot 2}\neq 0$ 和 $a^{1\cdot}_{\cdot 3}\neq 0$ 时用类似方法得到的方程具有实数解

$$\begin{aligned} &a^{1\cdot}_{\cdot 1}=\pm 1,\quad a^{2\cdot}_{\cdot 2}=\pm 1,\quad a^{3\cdot}_{\cdot 3}=\pm 1,\\ &a^{1\cdot}_{\cdot 2}=\pm 1,\quad a^{2\cdot}_{\cdot 3}=\pm 1,\quad a^{3\cdot}_{\cdot 1}=\pm 1,\\ &a^{1\cdot}_{\cdot 3}=\pm 1,\quad a^{2\cdot}_{\cdot 1}=\pm 1,\quad a^{3\cdot}_{\cdot 2}=\pm 1.\end{aligned} \quad (3.21)$$

从 $a^{i\cdot}_{\cdot j}$ 的这些值可知, (3.19) 中的每个矩阵都可以分解为 8 个矩阵, 从而一共得到 $3\times 8=24$ 个正交矩阵, 它们组成 $\bar{6}/4$ 的子群. 显然, 我们得到的解满足封闭方程组 (3.15), 并且任何实数解都包含在这些解中.

因为张量 $\boldsymbol{E}$ 只相对于 $\Delta=+1$ 的正常旋转群不变, 所以在主定量中增加张量 $\boldsymbol{E}$ 的结果是去掉 $\Delta=-1$ 的矩阵. 对于 $\boldsymbol{O}_h$ 可以得到由 48 个矩阵组成的群, 而利用 $\boldsymbol{O}_h$ 和 $\boldsymbol{E}$ 这两个张量可以从这个群中分离出 $\Delta=+1$ 的子群, 其中包含 24 个矩阵.

张量 $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{T}_d$ 所对应的群包含 24 个矩阵, 而利用张量 $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{T}_d$ 和 $\boldsymbol{E}$ 可以从这个群中分离出 $\Delta=+1$ 的子群, 其中包含 12 个矩阵. 分离相应矩阵的实际结果表明, 张量 $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{T}_d$, $\boldsymbol{E}$ 和张量 $\boldsymbol{T}_h$, $\boldsymbol{E}$ 都对应由 12 个矩阵组成的变换群, 并且这些变换群是相同的.

对于四角晶系, 在表格中列出的张量与相应对称群的等价性是用以下方法得到的. 四角晶系对称群可以作为立方晶系和取向介质的相应对称群的交集而得出. 所以, 要想从立方晶系对称群和取向介质对称群中分离出相应的子群, 可以把给出立方晶系相应对称群的张量和给出取向介质对称群的张量合在一起组成一组张量. 容易直接看出, 对于四角晶系的 7 个对称型, 其中每个对称型的张量组的不变性条件都定义了相应的变换矩阵群, 这些变换矩阵正好对应这些晶体对称型的对称群.

为了证明给出六角晶系和三角晶系对称型的那些张量的选取是恰当的, 必须考虑 $\boldsymbol{D}_{6h}$ 和 $\boldsymbol{e}_3^2$, $\boldsymbol{D}_{3h}$ 和 $\boldsymbol{e}_3^2$, $\boldsymbol{D}_{3d}$ 和 $\boldsymbol{e}_3^2$ 这 3 对张量的分量的不变性条件. 并积 $\boldsymbol{e}_3^2$ 的不变性条件只分离出以下形式的矩阵作为可能的坐标变换矩阵:

$$\begin{pmatrix} a^{1}_{\cdot 1} & a^{1}_{\cdot 2} & a^{1}_{\cdot 3} \\ a^{2}_{\cdot 1} & a^{2}_{\cdot 2} & a^{2}_{\cdot 3} \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

根据 $\boldsymbol{D}_{6h}$ 或 $\boldsymbol{D}_{3h}$ 或 $\boldsymbol{D}_{3d}$ 的不变性可知 $a^{1}_{\cdot 3} = a^{2}_{\cdot 3} = 0$.

如果不要求 $\boldsymbol{e}_3^2$ 具有不变性, 但要求矢量 $\boldsymbol{e}_3$ 具有不变性, 这就给出以下形式的变换矩阵:

$$\begin{pmatrix} a^{1}_{\cdot 1} & a^{1}_{\cdot 2} & 0 \\ a^{2}_{\cdot 1} & a^{2}_{\cdot 2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

因为只用基矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 就可以表示 $\boldsymbol{D}_{6h}$, $\boldsymbol{D}_{3h}$ 和 $\boldsymbol{D}_{3d}$, 所以这些矢量的不变性与二阶矩阵

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} a^{1}_{\cdot 1} & a^{1}_{\cdot 2} \\ a^{2}_{\cdot 1} & a^{2}_{\cdot 2} \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

的结构有关.

为了研究清楚矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的结构, 最好按照公式

$$\boldsymbol{j}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{j}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2$$

引入复基. 在这个基中, $\boldsymbol{D}_{3h}$, $\boldsymbol{D}_{6h}$ 和 $\boldsymbol{D}_{3d}$ 的形式为:

$$2\boldsymbol{D}_{3h} = \boldsymbol{j}_1^3 + \boldsymbol{j}_2^3, \quad 4\boldsymbol{D}_{6h} = (\boldsymbol{j}_1^3 + \boldsymbol{j}_2^3)^2, \quad 2\boldsymbol{D}_{3d} = \boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{j}_1^3 + \boldsymbol{j}_2^3).$$

这些张量在实基中的不变性条件可以改写为在复基中的不变性条件. 如果复基变换公式的形式为

$$\boldsymbol{j}_i = b^{\alpha}_{\cdot i} \boldsymbol{j}'_{\alpha},$$

则等式

$$\begin{pmatrix} a^{1}_{\cdot 1} & a^{1}_{\cdot 2} \\ a^{2}_{\cdot 1} & a^{2}_{\cdot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -\mathrm{i}/2 & \mathrm{i}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b^{1}_{\cdot 1} & b^{1}_{\cdot 2} \\ b^{2}_{\cdot 1} & b^{2}_{\cdot 2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

确定了矩阵 $(a^{i}_{\cdot j})$ 与 $(b^{i}_{\cdot j})$ 之间的关系.

张量 $\boldsymbol{D}_{3d}$ 的不变性条件归结为 $b^{i}_{\cdot j}$ 的以下方程组:

$$b^{\alpha}_{\cdot 1} b^{\beta}_{\cdot 1} b^{\gamma}_{\cdot 1} + b^{\alpha}_{\cdot 2} b^{\beta}_{\cdot 2} b^{\gamma}_{\cdot 2} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta = \gamma, \\ 0, & \text{在其余情况下}, \end{cases}$$

其展开形式等价于

$$
\begin{aligned}
&(b^{1}{}_{\cdot 1}^{\cdot})^3+(b^{1}{}_{\cdot 2}^{\cdot})^3=1, \quad b^{1}{}_{\cdot 1}^{\cdot}(b^{2}{}_{\cdot 1}^{\cdot})^2+b^{1}{}_{\cdot 2}^{\cdot}(b^{2}{}_{\cdot 2}^{\cdot})^2=0,\\
&(b^{2}{}_{\cdot 1}^{\cdot})^3+(b^{2}{}_{\cdot 2}^{\cdot})^3=1, \quad b^{2}{}_{\cdot 1}^{\cdot}(b^{1}{}_{\cdot 1}^{\cdot})^2+b^{2}{}_{\cdot 2}^{\cdot}(b^{1}{}_{\cdot 2}^{\cdot})^2=0.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

容易求出方程 (3.26) 的所有满足条件 $\det(b^{i}{}_{\cdot j}^{\cdot})\neq 0$ 的解. 因为 $a^{i}{}_{\cdot j}^{\cdot}$ 是实数, 所以从 (3.25) 可知 $b^{1}{}_{\cdot 1}^{\cdot}=b^{2}{}_{\cdot 2}^{\cdot}$, $b^{1}{}_{\cdot 2}^{\cdot}=b^{2}{}_{\cdot 1}^{\cdot}$, 从而对 $(b^{i}{}_{\cdot j}^{\cdot})$ 得出 6 个矩阵:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\varepsilon&0\\0&\varepsilon^2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\varepsilon^2&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix},\\
&\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&\varepsilon\\\varepsilon^2&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&\varepsilon^2\\\varepsilon&0\end{pmatrix}
\end{aligned}
\quad (\varepsilon=\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}/3}).
\tag{3.27}
$$

在 (3.22) 中, 相应矩阵的正交性可以自动得出. 利用公式 (3.27), (3.25) 和 (3.22) 容易写出 12 个矩阵, 它们对应着表征六角晶系对称型 $m\cdot 3:m$ 的张量 $\boldsymbol{D}_{3h}$, $\boldsymbol{e}_3^2$ 的不变性. 组合 $\boldsymbol{D}_{3h}$, $\boldsymbol{e}_3$ 的不变性则确定了 6 个矩阵, 它们得自 (3.23), (3.25) 和 (3.27) 并对应着三角晶系的对称型 $3\cdot m$.

$\boldsymbol{D}_{3d}$ 和 $\boldsymbol{e}_3^2$ 的不变性条件使方程 (3.26) 的形式有所改变. 相应方程的解给出 12 个矩阵, 其中前 6 个矩阵对应 $\boldsymbol{e}_3$ 的不变性, 它们就是对称型 $3\cdot m(\boldsymbol{D}_{3h},\ \boldsymbol{e}_3)$ 的矩阵; 此外, 如果改变这些矩阵所有元素的符号, 就得到其余 6 个矩阵. $\boldsymbol{D}_{6h}$ 和 $\boldsymbol{e}_3^2$ 的不变性条件给出形如 (3.22) 的矩阵, 并且在形如 (3.26) 的相应方程中必须把其右侧的 $+1$ 改写为 ±1. 于是, 相应的解包含对称型 $m\cdot 3:m$ 的 12 个矩阵以及以下 12 个矩阵:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\tau^3&0&0\\0&\tau^3&0\\0&0&\pm1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\tau&0&0\\0&\tau^5&0\\0&0&\pm1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\tau^5&0&0\\0&\tau&0\\0&0&\pm1\end{pmatrix},\\
&\begin{pmatrix}0&\tau^3&0\\\tau^3&0&0\\0&0&\pm1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&\tau&0\\\tau^5&0&0\\0&0&\pm1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&\tau^5&0\\\tau&0&0\\0&0&\pm1\end{pmatrix}
\end{aligned}
\quad (\tau=\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}/3}).
$$

利用公式 (3.25) 容易写出相应的实数矩阵.

六角晶系和三角晶系的所有其余对称型都是上述对称群的子群, 并且只要考虑张量特征量已知的相应的群的交集, 就容易求出其余对称型的张量参数.

至于正交晶系、单斜晶系和三斜晶系, 在表格中列出的表征对称性的张量是直接就能看出的. 显然, 给出对称群的相应张量组不是唯一确定的.

在表格中列出的每种情况下, 可以用另外一组张量来取代所列张量, 并且这两组张量之间的相互关系是一一对应的. 特别地, 决定对称性的张量数目和张量阶数可以有不同的取法.

例如, 可以使用群和张量之间的以下对应关系来代替表格中所列的张量[1]:

$m\cdot 2:m$	$e_1^2,\ e_2^2,\ e_3^2,$	2	$e_1^2,\ e_2^2,\ e_3,\ \boldsymbol{E},$
$2:2$	$e_1^2,\ e_2^2,\ e_3^2,\ \boldsymbol{E},$	m	$e_1,\ e_2,\ e_3^2,$
$2\cdot m$	$e_1^2,\ e_2^2,\ e_3,$	$\bar{2}$	$e_1e_2,\ e_1e_3,\ e_2e_3,$
$2:m$	$e_1^2,\ e_2^2,\ e_3^2,\ \boldsymbol{\Omega}.$		

这里的每一个张量都容易通过表格中列出的张量表示出来, 相反的关系也是显而易见的.

前面研究了如何确定给出晶体和取向介质对称群的张量的问题, 并且在个别重要情况下解决了其逆问题, 即如何确定与一个给定张量相对应的正交对称群的问题.

4°. **表征取向介质和晶体几何性质的张量的张量函数.** 对于取向介质[2]和晶体的矢量分量 A^i, 二阶张量分量 A^{ij}, 三阶张量分量 A^{ijk} 和四阶张量分量 A^{ijkl}, 下面给出它们在任意坐标系中的形如 (1.3) 的一般公式. 这些张量是表中决定相应对称群的张量自变量的函数.

用来确定对称群的那些张量, 其联立不变量是绝对常数. 因此, 作为不变量的系数 k_s $(s=1,\ \cdots,\ p)$ 或者是常数, 或者是某些标量的函数, 而这些标量也可能与被选出的张量一起位于主定量之列.

在每一种情况下, 在公式中仅写出 p 个线性无关项. 也可以另选一组线性无关项, 但是无论怎样选取, 相应项都可以表示为公式中写出的那些项的线性组合. 在使用关于函数关系特性 (对某些分量的线性关系等) 的各种附加假设时, 关于如何选取线性无关张量的问题可能是极为重要的. 如果成立对称条件

$$A^{ij}=A^{ji},\quad A^{ijk}=A^{ikj},\quad A^{ijkl}=A^{ijlk},\quad A^{ijkl}=A^{jikl},\quad A^{ijkl}=A^{klij},$$

从上述公式就容易得出一些已知的结果[2].

为了使这些条件成立, 还需要补充一些附加条件来限制作为不变量的那些系数. 利用对称化运算就可以从写出的公式得到相应公式.

取向介质

对称型 $\infty/\infty\cdot m\,(\boldsymbol{g})$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=kg^{ij},\quad A^{ijk}=0,\quad A^{ijkl}=k_1g^{ij}g^{kl}+k_2g^{ik}g^{jl}+k_3g^{il}g^{jk}.$$

对称型 $\infty/\infty\,(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{E})$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=kg^{ij},\quad A^{ijk}=kE^{ijk},\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty/\infty\cdot m).$$

---

[1] 矢量的乘积和矢量的幂都理解为矢量的并积.

[2] 类似公式发表于 [28], 但其中有错误. 这里给出了改正的公式.

对称型 $m\cdot\infty:m\,(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$
\begin{aligned}
&A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\quad A^{ijk}=0,\\
&A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty/\infty\cdot m)+k_4g^{ij}B^{kl}+k_5g^{ik}B^{jl}+k_6g^{il}B^{jk}\\
&\qquad+k_7g^{kl}B^{ij}+k_8g^{jl}B^{ik}+k_9g^{jk}B^{il}+k_{10}B^{ij}B^{kl}.
\end{aligned}
$$

对称型 $\infty:2\,(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{E})$

$$
\begin{aligned}
&A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\\
&A^{ijk}=k_1E^{ijk}+k_2B^i_\alpha E^{\alpha jk}+k_3E^{ij\alpha}B^k_\alpha,\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m).
\end{aligned}
$$

对称型 $\infty:m\,(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)$

$$
\begin{aligned}
&A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij}+k_3\Omega^{ij},\quad A^{ijk}=0,\\
&A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m)+k_{11}g^{ij}\Omega^{kl}+k_{12}g^{ik}\Omega^{jl}+k_{13}g^{il}\Omega^{jk}+k_{14}g^{kl}\Omega^{ij}\\
&\qquad+k_{15}g^{jl}\Omega^{ik}+k_{16}g^{jk}\Omega^{il}+k_{17}B^{ij}\Omega^{kl}+k_{18}B^{ik}\Omega^{jl}+k_{19}\Omega^{ij}B^{kl}.
\end{aligned}
$$

对称型 $\infty\cdot m\,(\boldsymbol{g}\ ,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3)$

$$
\begin{aligned}
&A^i=kb^i,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j,\quad A^{ijk}=k_1g^{ij}b^k+k_2g^{ik}b^j+k_3g^{jk}b^i+k_4b^ib^jb^k,\\
&A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(\infty/\infty\cdot m)+k_4g^{ij}b^kb^l+k_5g^{ik}b^jb^l+k_6g^{il}b^jb^k\\
&\qquad+k_7g^{kl}b^ib^j+k_8g^{jl}b^ib^k+k_9g^{jk}b^ib^l+k_{10}b^ib^jb^kb^l.
\end{aligned}
$$

对称型 $\infty\,(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{E})$

$$
\begin{aligned}
&A^i=kb^i,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j+k_3E^{ij\alpha}b_\alpha,\\
&A^{ijk}=k_1g^{ij}b^k+k_2g^{ik}b^j+k_3g^{jk}b^i+k_4b^ib^jb^k+k_5\Omega^{ij}b^k+k_6\Omega^{ik}b^j+k_7\Omega^{jk}b^i,\\
&A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(\infty\cdot m)+k_{11}g^{ij}\Omega^{kl}+k_{12}g^{ik}\Omega^{jl}+k_{13}g^{il}\Omega^{jk}+k_{14}g^{kl}\Omega^{ji}+k_{15}g^{jl}\Omega^{ik}\\
&\qquad+k_{16}g^{jk}\Omega^{il}+k_{17}b^ib^j\Omega^{kl}+k_{18}b^ib^k\Omega^{jl}+k_{19}\Omega^{ij}b^kb^l\quad(\Omega^{ij}=E^{ij\alpha}b_\alpha).
\end{aligned}
$$

立方晶系

对称型 $\bar{6}/4\,(\boldsymbol{O}_h)$

$$
A^i=0,\quad A^{ij}=kg^{ij},\quad A^{ijk}=0,\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty/\infty\cdot m)+k_4{O_h}^{ijkl}.
$$

对称型 $3/4\,(\boldsymbol{O}_h,\ \boldsymbol{E})$

$$
A^i=0,\quad A^{ij}=kg^{ij},\quad A^{ijk}=kE^{ijk},\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\bar{6}/4).
$$

对称型 $3/\bar{4}\,(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{T}_d)$

$$
A^i=0,\quad A^{ij}=kg^{ij},\quad A^{ijk}=k{T_d}^{ijk},\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\bar{6}/4).
$$

对称型 $3/2\,(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{T}_d)$ 或 $(\boldsymbol{T}_h,\ \boldsymbol{E})$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=kg^{ij},\quad A^{ijk}=k_1E^{ijk}+k_2{T_d}^{ijk},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(\bar{6}/4)+k_5{T_h}^{ijkl}+k_6{T_h}^{iljk}+k_7{T_h}^{ikjl}.$$

对称型 $\bar{6}/2\,(\boldsymbol{T}_h)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=kg^{ij},\quad A^{ijk}=0,\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(3/2).$$

四角晶系

对称型 $m\cdot 4:m\,(\boldsymbol{O}_h,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(m\cdot\infty:m)=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},$$
$$A^{ijk}=0,\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m)+k_{11}{O_h}^{ijkl}.$$

对称型 $\bar{4}\cdot m\,(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{T}_d,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},$$
$$A^{ijk}=k_1{T_d}^{ijk}+k_2{T_d}^{ij\alpha}B^{k\cdot}_{\cdot\alpha}+k_3{T_d}^{ij\alpha}B^{j\cdot}_{\cdot\alpha},\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot 4:m).$$

对称型 $4:2\,(\boldsymbol{O}_h,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{E})$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\quad A^{ijk}=A^{ijk}(\infty:2),\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot 4:m).$$

对称型 $4:m\,(\boldsymbol{O}_h,\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty:m),\quad A^{ijk}=0,$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty:m)+k_{20}{O_h}^{ijkl}+k_{21}{O_h}^{jkl\alpha}\Omega^{i\cdot}_{\cdot\alpha}.$$

对称型 $\bar{4}\,(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{T}_d,\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty:m),$$
$$A^{ijk}=A^{ijk}(\bar{4}\cdot m)+k_4{T_d}^{ij\alpha}\Omega^{k\cdot}_{\cdot\alpha}+k_5\Omega^{i\cdot}_{\cdot\alpha}{T_d}^{\alpha jk}+k_6\Omega^{i\cdot}_{\cdot\alpha}{T_d}^{\alpha j\beta}B^{k\cdot}_{\cdot\beta},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(4:m).$$

对称型 $4\cdot m\,(\boldsymbol{O}_h,\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3)$

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j,\quad A^{ijk}=A^{ijk}(\infty\cdot m),\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot 4:m).$$

对称型 $4\,(\boldsymbol{O}_h,\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{E})$

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j+k_3\Omega^{ij}\quad(\Omega^{ij}=E^{ij\alpha}b_\alpha),$$
$$A^{ijk}=A^{ijk}(\infty),\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty)+k_{20}{\Omega_h}^{ijkl}+k_{21}{O_h}^{jkl\alpha}\Omega^{i\cdot}_{\cdot\alpha}.$$

六角晶系

对称型 $m\cdot 6:m\,(\boldsymbol{D}_{6h},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\quad A^{ijk}=0,\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m).$$

对称型 $m\cdot 3:m\,(\boldsymbol{D}_{3h},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\quad A^{ijk}=kD_{3h}{}^{ijk},\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m).$$

对称型 $6:2\,(\boldsymbol{D}_{6h},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{E})$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\quad A^{ijk}=A^{ijk}(\infty:2),\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m).$$

对称型 $6:m\,(\boldsymbol{D}_{6h},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty:m),\quad A^{ijk}=0,\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty:m).$$

对称型 $3:m\,(\boldsymbol{D}_{3h},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty:m),\quad A^{ijk}=k_1D_{3h}{}^{ijk}+k_2D_{3h}{}^{ij\alpha}\Omega^{k\cdot}_{\cdot\alpha},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty:m).$$

对称型 $6\cdot m\,(\boldsymbol{D}_{6h},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3)$

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j,\quad A^{ijk}=A^{ijk}(\infty\cdot m),\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty\cdot m).$$

对称型 $6\,(\boldsymbol{D}_{6h},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{E})$

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty),\quad A^{ijk}=A^{ijk}(\infty),\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty).$$

三角晶系

对称型 $\bar{6}\cdot m\,(\boldsymbol{D}_{3h},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\quad A^{ijk}=0,$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m)+k_{11}D_{3d}{}^{ijkl}+k_{12}D_{3d}{}^{jikl}+k_{13}D_{3d}{}^{kijl}+k_{14}D_{3d}{}^{lijk}.$$

对称型 $3:2\,(\boldsymbol{D}_{3h},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{E})$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\quad A^{ijk}=A^{ijk}(\infty:2)+k_4D_{3h}{}^{ijk},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m)+k_{11}E_{\alpha\cdot\cdot}^{\cdot kl}D_{3h}{}^{ij\alpha}+k_{12}E^{\alpha ij}D_{3h}{}^{kl\cdot}_{\cdot\cdot\alpha}$$
$$+k_{13}E^{\alpha ik}D_{3h}{}^{jl\cdot}_{\cdot\cdot\alpha}+k_{14}E^{\alpha kj}D_{3h}{}^{il\cdot}_{\cdot\cdot\alpha}.$$

对称型 $\bar{6}$ ($\boldsymbol{D}_{3d}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2$, $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1$)

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty:m),\quad A^{ijk}=0,$$

$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty:m)+k_{20}{D_{3d}}^{ijkl}+k_{21}{D_{3d}}^{jikl}+k_{22}{D_{3d}}^{kijl}+k_{23}{D_{3d}}^{lijk}$$
$$+k_{24}{D_{3d}}^{ijk\alpha}\Omega^{l\cdot}_{\cdot\alpha}+k_{25}{D_{3d}}^{jik\alpha}\Omega^{l\cdot}_{\cdot\alpha}+k_{26}{D_{3d}}^{kij\alpha}\Omega^{l\cdot}_{\cdot\alpha}+k_{27}{D_{3d}}^{lij\alpha}\Omega^{k\cdot}_{\cdot\alpha}.$$

对称型 $3\cdot m$ ($\boldsymbol{D}_{3h}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3$)

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j,\quad A^{ijk}=A^{ijk}(\infty\cdot m)+k_6{D_{3h}}^{ijk},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty\cdot m)+k_{11}{D_{3h}}^{ijk}b^l+k_{12}{D_{3h}}^{ijl}b^k+k_{13}{D_{3h}}^{ikl}b^j+k_{14}{D_{3h}}^{klj}b^i.$$

对称型 3 ($\boldsymbol{D}_{3h}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{E}$)

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=A^{ij}(\infty),$$
$$A^{ijk}=A^{ijk}(\infty)+k_8{D_{3h}}^{ijk}+k_9{D_{3h}}^{ij\alpha}\Omega^{k\cdot}_{\cdot\alpha},\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}(\bar{6}).$$

正交晶系

对称型 $m\cdot 2:m$ ($\boldsymbol{D}_{2h}$, $\boldsymbol{g}$)

$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2{D_{2h}}^{ij}+k_3{D_{2h}}^{i\alpha}{D_{2h}}^{\cdot j}_{\alpha\cdot}$ (哈密顿一凯莱公式), $\quad A^{ijk}=0,$

$$\begin{aligned}A^{ijkl}=&k_1g^{ij}g^{kl}+k_2g^{ik}g^{jl}+k_3g^{il}g^{jk}+k_4g^{ij}{D_{2h}}^{kl}+k_5g^{ik}{D_{2h}}^{jl}\\&+k_6g^{il}{D_{2h}}^{jk}+k_7{D_{2h}}^{ij}g^{kl}+k_8{D_{2h}}^{ik}g^{jl}+k_9{D_{2h}}^{il}g^{jk}\\&+k_{10}g^{ij}M^{kl}+k_{11}g^{ik}M^{jl}+k_{12}g^{il}M^{jk}+k_{13}M^{ij}g^{kl}+k_{14}M^{ik}g^{jl}\\&+k_{15}M^{il}g^{jk}+k_{16}{D_{2h}}^{ij}{D_{2h}}^{kl}+k_{17}{D_{2h}}^{il}M^{jk}+k_{18}{D_{2h}}^{ij}M^{kl}\\&+k_{19}{D_{2h}}^{ik}M^{jl}+k_{20}M^{ij}{D_{2h}}^{kl}+k_{21}M^{ij}M^{kl}\quad(M^{ij}={D_{2h}}^{i\alpha}{D_{2h}}^{\cdot j}_{\alpha\cdot}).\end{aligned}$$

对称型 $2:2$ ($\boldsymbol{D}_{2h}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{g}$)

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(m\cdot 2:m),$$
$$A^{ijk}=k_1E^{ijk}+k_2E^{ij\alpha}{D_{2h}}^{\cdot k}_{\alpha\cdot}+k_3E^{ik\alpha}{D_{2h}}^{\cdot j}_{\alpha\cdot}+k_4E^{ij\alpha}M^{k\cdot}_{\cdot\alpha}$$
$$+k_5E^{ik\alpha}M^{j\cdot}_{\cdot\alpha}+k_6{D_{2h}}^{i\alpha}E^{\cdot j\cdot}_{\alpha\cdot\beta}M^{\beta k},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot 2:m).$$

对称型 $2\cdot m$ ($\boldsymbol{D}_{2h}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{g}$)

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=A^{ij}(m\cdot 2:m)=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j+k_3{D_{2h}}^{ij},$$
$$A^{ijk}=k_1g^{ij}b^k+k_2g^{ik}b^j+k_3g^{kj}b^i+k_4b^ib^jb^k+k_5{D_{2h}}^{ij}b^k+k_6{D_{2h}}^{ik}b^j+k_7{D_{2h}}^{kj}b^i,$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot 2:m).$$

单斜晶系

对称型 $2:m\,(\boldsymbol{D}_{2h},\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{g})$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}(m\cdot 2:m)+k_4\Omega^{ij}+k_5\Omega^{i\alpha}D_{2h}{}^{j\cdot}_{\cdot\alpha},\quad A^{ijk}=0,$$

$$\begin{aligned}A^{ijkl}=&A^{ijkl}(m\cdot 2:m)+k_{22}g^{ij}\Omega^{kl}+k_{23}g^{ik}\Omega^{jl}+k_{24}g^{il}\Omega^{jk}+k_{25}g^{kl}\Omega^{ij}\\&+k_{26}g^{jl}\Omega^{ik}+k_{27}g^{jk}\Omega^{il}+k_{28}g^{ij}\Omega^{k\alpha}D_{2h}{}^{\cdot l}_{\alpha\cdot}+k_{29}g^{ik}\Omega^{j\alpha}D_{2h}{}^{\cdot l}_{\alpha\cdot}\\&+k_{30}g^{il}\Omega^{j\alpha}D_{2h}{}^{\cdot k}_{\alpha\cdot}+k_{31}g^{kl}\Omega^{j\alpha}D_{2h}{}^{\cdot j}_{\alpha\cdot}+k_{32}g^{jl}\Omega^{i\alpha}D_{2h}{}^{\cdot k}_{\alpha}\\&+k_{33}g^{jk}\Omega^{j\alpha}D_{2h}{}^{\cdot l}_{\alpha\cdot}+k_{34}D_{2h}{}^{ij}\Omega^{kl}+k_{35}D_{2h}{}^{ik}\Omega^{jl}+k_{36}D_{2h}{}^{kl}\Omega^{ij}\\&+k_{37}D_{2h}{}^{ij}\Omega^{k\alpha}D_{2h}{}^{\cdot l}_{\alpha\cdot}+k_{38}D_{2h}{}^{il}\Omega^{j\alpha}D_{2h}{}^{\cdot k}_{\alpha\cdot}+k_{39}D_{2h}{}^{kl}\Omega^{i\alpha}D_{2h}{}^{\cdot j}_{\alpha\cdot}\\&+k_{40}M^{kl}\Omega^{ij}+k_{41}M^{ij}\Omega^{k\alpha}D_{2h}{}^{\cdot l}_{\alpha\cdot}.\end{aligned}$$

对称型 $2\,(\boldsymbol{D}_{2h},\ \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{g})$

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=A^{ij}(2:m),$$

$$\begin{aligned}A^{ijk}=&k_1g^{ij}b^k+k_2g^{ik}b^j+k_3g^{jk}b^i+k_4b^ib^jb^k+k_5D_{2h}{}^{ij}b^k+k_6D_{2h}{}^{ik}b^j\\&+k_7D_{2h}{}^{kj}b^i+k_8\Omega^{ij}b^k+k_9\Omega^{ik}b^j+k_{10}\Omega^{kj}b^i+k_{11}\Omega^{i\alpha}D_{2h}{}^{\cdot j}_{\alpha\cdot}b^k\\&+k_{12}\Omega^{i\alpha}D_{2h}{}^{\cdot k}_{\alpha\cdot}b^j+k_{13}\Omega^{k\alpha}D_{2h}{}^{\cdot j}_{\alpha\cdot}b^i,\end{aligned}$$

$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(2:m).$$

对称型 $m\,(\boldsymbol{D}_{2h},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_2)$

$$A^i=k_1b^i+k_2c^i,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j+k_3c^ic^j+k_4b^ic^j+k_5c^ib^j,$$

$$\begin{aligned}A^{ijk}=&k_1g^{ij}b^k+k_2g^{ik}b^j+k_3g^{jk}b^i+k_4b^ib^jb^k+k_5g^{ij}c^k+k_6g^{ik}c^j\\&+k_7g^{jk}c^i+k_8c^ib^jb^k+k_9b^ic^jb^k+k_{10}b^ib^jc^k+k_{11}b^ic^jc^k\\&+k_{12}c^ib^jc^k+k_{13}c^ic^jb^k+k_{14}c^ic^jc^k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^{ijkl}=A^{ijkl}(2:m)=&k_1g^{ij}g^{kl}+k_2g^{ik}g^{jl}+k_3g^{il}g^{jk}+k_4g^{ij}b^kb^l+k_5g^{ik}b^jb^l\\&+k_6g^{il}b^jb^k+k_7b^ib^jg^{kl}+k_8b^ib^kg^{jl}+k_9b^ib^lg^{jk}+k_{10}g^{ij}b^kb^l+k_{11}g^{ik}b^jc^l\\&+k_{12}g^{il}b^jc^k+k_{13}g^{kl}b^ic^j+k_{14}g^{jl}b^ic^k+k_{15}g^{jk}b^ic^l+k_{16}g^{ij}c^kb^l\\&+k_{17}g^{ik}c^jb^l+k_{18}g^{il}c^jb^k+k_{19}g^{kl}c^ib^j+k_{20}g^{jl}c^ib^k+k_{21}g^{jk}c^ib^l\\&+k_{22}c^ib^jb^kb^l+k_{23}b^ic^jb^kb^l+k_{24}b^ib^jc^kb^l+k_{25}b^ib^jb^kc^l+k_{26}g^{ij}c^kc^l\\&+k_{27}g^{ik}c^jc^l+k_{28}g^{il}c^jc^k+k_{29}c^kc^lc^ic^j+k_{30}b^ib^jb^kb^l+k_{31}g^{jk}c^ic^l\\&+k_{32}b^ib^jc^kc^l+k_{33}b^ib^kc^jc^l+k_{34}b^ib^lc^jc^k+k_{35}c^ic^jb^kb^l+k_{36}c^ic^kb^jb^l\\&+k_{37}c^ic^lb^jb^k+k_{38}b^ic^jc^kc^l+k_{39}c^ib^jc^kc^l+k_{40}c^jc^ib^kc^l+k_{41}c^ic^jc^kb^l.\end{aligned}$$

如果取 e_1, e_2, e_3^2 作为张量自变量来代替 D_{2h}, e_1, e_2, 则最后一个四阶张量公式可以替换为

$$A_4 = A^{ijkl}e_ie_je_ke_l + A^{\alpha\beta 33}e_\alpha e_\beta e_3e_3 + A^{\alpha 33\beta}e_\alpha e_3e_3e_\beta + A^{33\alpha\beta}e_3e_3e_\alpha e_\beta \\ + A^{3\alpha 3\beta}e_3e_\alpha e_3e_\beta + A^{3\alpha\beta 3}e_3e_\alpha e_\beta e_3 + A^{\alpha 3\beta 3}e_\alpha e_3e_\beta e_3 + A^{3333}e_3e_3e_3e_3, \quad (*)$$

式中表示求和的角标 i, j, k, l, α, β 的取值仅为 1 和 2. 简单的计算表明, 公式中共有 41 项, 并且直接可以看出, 它们是线性无关性的.

不难看出, 对于偶数阶张量, 例如单斜晶系对称型 $2:m$, 2 和 m 的四阶张量, 相应自变量可以替换为同一组张量 e_1, e_2, e_3^2, 所以可以使用同样一些公式. 因此, 公式 (*) 适用于单斜晶系所有对称型的四阶张量.

还容易看出, 对于具有 21 个线性无关项的正交晶系, 其四阶张量也得自公式 (*), 其中应取 $i=j$, $k=l$; $i=k$, $j=l$ 和 $i=l$, $j=k$, $\alpha=\beta$ 的那些项.

因此, 在构造张量函数的一般公式时, 针对所研究的个别情况改变原来的自变量有时显然会带来好处.

三斜晶系

对称型 $\bar{2}\,(C_i)$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} \text{ 是一般情况下的 9 个分量},$$
$$A^{ijk} = 0, \quad A^{ijkl} \text{ 是一般情况下的 81 个分量}.$$

对称型 $1\,(e_1,\ e_2,\ e_3)$

所有张量具有一般形式, 没有对称性.

5°. **具有附加张量自变量的取向介质和晶体张量函数**. 我们现在假设, 独立自变量不仅包括给出取向介质和晶体的几何性质的那些张量, 而且包括其他一些张量. 显然, 这时自变量组的对称群是取向介质或晶体的相应的群或子群. 不同于晶体学群的子群只可能在研究取向介质时出现. 如果在确定晶体对称性的张量中再补充其他一些张量, 则结果还是归结为晶体学对称群, 或者归结为恒等变换.

给定的晶体学对称群, 其所有子群包含在 32 个晶体学群之中, 所以, 如果在给出晶体对称性的张量组中补充其他一些张量, 则自变量组的对称群仍属于 32 个晶体学群之一.

在一般情况下, 待求张量的线性无关分量的数目仅在存在相应对称性时才可能减少. 显然, 当自变量组具有非平凡对称群时, 描述晶体的函数将有相应简化. 在研究清楚张量自变量组晶体学对称群的类型之后, 就可以应用 4° 中的公式之一来阐明待求张量函数的分量的结构.

因此, 在晶体的一般情况下, 可以应用 4° 中的公式来确定张量函数的结构. 为

了实际阐明相应公式的本质，必须研究给定自变量组的对称性，这对晶体而言等价于把张量自变量通过在表格中列出的表征晶体对称型的那些张量表示出来.

当那些附加的张量是特殊张量或者在晶体学坐标系中具有特殊形式时，利用上述方法能够很容易地分析大量个别情况.

当存在附加张量自变量时，标量 k_s 一般是附加张量和给出取向介质或晶体对称性的张量的联立不变量的函数. 可变的联立不变量是因为附加不变量而出现的. 函数独立的不变量，其数目一般等于张量变量的函数独立分量的数目. 在个别情形下，函数独立分量的数目可能更小一些.

在一个固定的坐标系中，如果系数 k_s 能够表示为标量自变量 ω_i 的函数，在一般情况下就可以这样来选取这些标量自变量，使得它们的值不依赖于各种张量变量，并且从取向介质或晶体对称性的观点看来，这些张量变量是彼此等价的. 在固定坐标系中确定下来的这样的自变量可能不等于在任何坐标变换下都保持不变的不变量 Ω_i，但能够在给定的固定坐标系中与之相等 ($\omega_i = \Omega_i$).

6°. **黎曼空间的曲率张量和舒尔定理的推广.** 上述理论直接关系到数学和物理学中以矢量方程和张量方程的形式表述出来的、在某种程度上与几何对称性有关的所有定律或规律.

已有的应用涉及各个方面，例如取向介质和晶体的胡克定律，压电效应和光学效应等. 作为一个实例，我们考虑克里斯托费尔－黎曼曲率张量 R_{ijkl}. 众所周知，这个张量相对于角标 i 和 j 是反对称的，相对于角标 k 和 l 是对称的，相对于角标对 ij 和 kl 是对称的. 在三维空间中，R_{ijkl} 只有 6 个分量能够独立地任意取值. 这 6 个分量定义了二阶对称张量 K^{mn} 的 6 个分量，引入该张量的公式为

$$K^{mn} = E^{ijm} E^{kln} R_{ijkl}. \tag{6.1}$$

由此可知，

$$R_{ijkl} = \frac{1}{4} E_{ijm} E_{kln} K^{mn}. \tag{6.2}$$

众所周知[31]，曲率张量的分量满足比安基恒等式

$$\nabla_r R_{ijmn} + \nabla_m R_{ijnr} + \nabla_n R_{ijrm} = 0,$$

式中的角标 m, n, r 彼此不同，而 $\nabla_\varkappa$ 是对坐标 $X^\varkappa$ 的协变微分算子. 容易看出，比安基恒等式等价于张量分量 K^{mn} 的以下恒等式:

$$\nabla_\alpha K^{m\alpha} = 0. \tag{6.3}$$

如果曲率张量在黎曼空间诸点具有某种类型的对称性，则根据上述理论容易写出确定张量分量 R_{ijkl} 和 K^{mn} 的一般公式，这些公式是通过那些给出相应对称群的张量的分量表达出来的. 例如，对于取向介质的对称型 $\infty/\infty \cdot m$ 和 ∞/∞ 成立公式

$$K^{mn} = k g^{mn}; \tag{6.4}$$

对于对称型 $\infty \cdot m$, $m \cdot \infty : m$, $\infty : 2$, $\infty : m$ 和 ∞ 则成立公式

$$K^{mn} = kg^{mn} + k_1 b^m b^n, \tag{6.5}$$

式中 b^m 是沿对称轴方向的单位矢量的分量. 在张量分量 K^{mn} 具有某种有限对称群的任何情况下, 都可以写出类似的公式. 例如, 对于立方晶系的 5 种对称型中的任何一种, 成立公式

$$K^{mn} = kg^{mn}, \tag{6.6}$$

因此, 这时张量 K^{mn} 是球张量, 这与完全各向同性的情况相同.

从 (6.2) 和 (6.4)—(6.6) 可得张量分量 R_{ijkl} 的相应公式. 根据公式 (6.4) 和比安基恒等式 (6.3) 可知

$$g^{m\alpha} \nabla_\alpha k = 0. \tag{6.7}$$

等式 (6.7) 就是著名的舒尔定理. 按照舒尔定理, 根据曲率张量在每一点的各向同性可知, 曲率在整个空间中都是常数, 因为从 (6.7) 可得

$$k = \text{const}\,.$$

在舒尔定理的上述证明中已经包含了该定理的推广, 即要求曲率在空间中的每一点满足完全各向同性条件是不必要的, 该定理的充分条件是在每一点成立群 3/2 的对称性条件, 也就是张量分量 K^{mn} 或 R_{ijkl} 相对于对称群 3/2 的 12 个变换的不变性条件.

如果曲率在每一点都由常共线矢量 b^i 确定, 则比安基恒等式给出

$$\nabla^\lambda k + b^\lambda b^\mu \nabla_\mu k_1 = 0. \tag{6.8}$$

方程 (6.8) 是相应黎曼空间中的曲率所满足的方程组.

我们在上面把张量函数 $\boldsymbol{H}$ 定义为张量 $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \cdots, \boldsymbol{T}_k$ 的函数, 从而要引入 $\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{T}_s$ 之间的在任何坐标系中都保持不变的函数关系.

作为这些概念的进一步推广, 还可以注意以下事实: 张量的概念与所使用的坐标系有密切的关系, 而坐标系是由基矢量决定的. 对于每一个张量, 都可以引入正则矩阵和单位基矢量的相应正则并积, 它们因而一般也可以视为给定张量的非单值的函数.

晶体物理学对作者而言是一个全新的科学领域, 同 Ю. И. 西罗京的讨论帮助作者了解了这一领域的研究现状, 作者对此深表感谢.

附录一参考文献

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 4-е изд. Москва: Гостехиздат, 1957 (俄文第八版的中译本: Л. И. 谢多夫. 力学中的相似方法与量纲理论. 沈青, 倪锄非, 李维新译. 北京: 科学出版社, 1982)

2. Най Дж. Физические свойства кристаллов. Москва: Изд-во иностр. лит., 1960 (英文版的中译本: J.F. 奈, 晶体的物理性质. 孟中岩, 袁绥华, 孙鸿涛等译. 西安: 西安交通大学出版社, 1994)
3. Вейль Г. Классические группы. Москва: Изд-во иностр. лит., 1947 (Weyl H. The Classical Groups: Their Invariants and Representations. Princeton: Princeton University Press, 1946)
4. Döring W. Die Richtungsabhängigkeit der Kristallenergie. Annalen der Physik, 1958, 7 Folge, Bd. 1, Heft 1—3, S. 104—111
5. Smith F. G., Rivlin R. S. The anisotropic tensors. Q. Appl. Math., 1957, 15(3): 308—314
6. Pipkin A. C., Rivlin R. S. The formulation of constitutive equations in continuum physics. Part I. Arch. Rat. Mech. Anal., 1959, 4(2): 129—144
7. Сиротин Ю. И. Анизотропные тензоры. Докл. АН СССР, 1960, 133(2): 321—324 (Sirotin Yu. I. Anisotropic tensors. Sov. Phys. Dokl., 1960, 5: 774)
8. Сиротин Ю. И. Целые рациональные базисы тензорхых инвариантов кристаллографических групп. Докл. АН СССР, 1963, 151: 564—566 (Sirotin Yu. I. Integral rational bases of tensor invariants for crystallographic groups. Sov. Phys. Dokl., 1964, 8: 652)
9. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. Москва: Гостехиздат, 1948 (Gurevich G. B. Foundations of the Theory of Algebraic Invariants. Groningen: Noordhoff, 1964)
10. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. Москва: Гостехиздат, 1956 (А. И. 马力茨夫. 线性代数基础. 柯召译. 北京: 高等教育出版社, 1959)
11. Smith F. G., Rivlin R. S. The strain-energy function for anisotropic elastic materials. Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88(1): 175—193
12. Smith F. G. Further results on the stain-energy function for anisotropic elastic materials. Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, 10(2): 108—118
13. Багавантам С., Венкатарайуду Т. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. Москва: Изд-во иностр. лит., 1959 (Bhagavantam S., Venkatarayudu T. Theory of Groups and Its Application to Physical Problems. 2nd ed. Waltair: Andhra University, 1951)
14. Jahn H. A. Note on the Bhagavantam-Suranarayana method of enumerating the physical constants of crystals. Acta Cryst., 1949, 2(1): 30—33
15. Шубников А. В., Флинт Е. Е., Бокий Г. Г. Основы кристаллографии. Москва: Изд-во АН СССР, 1940
16. Шубников А. В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. Москва: Изд-во АН СССР, 1951
17. Шубников А. В. О симметрии векторов и тензоров. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1949, 13(3): 347—375
18. Сиротин Ю. И. Групповые тензорные пространства. Кристаллография, 1960, 5(2): 171—179 (Sirotin Yu. I. Group tensor spaces. Sov. Phys. Crystallogr., 1960, 5: 157—165)

19. Сиротин Ю. И. Построение тензоров заданной симметрии. Кристаллография, 1961, 6(3): 331—340 (Sirotin, Yu. I. Plotting tensors of a given symmetry. Sov. Phys. Crystallogr., 1961, 6: 263—271)
20. Копцик В. А. Полиморфные фазовые переходы и симметрия кристаллов. Кристаллография, 1960, 5(6): 932—943 (Koptsik V. A. Polymorphic phase transitions and crystal symmetry. Sov. Phys. Crystallogr., 1960, 5: 889)
21. Spencer A. J. M., Rivlin R. S. The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua. Arch. Rat. Mech. Anal., 1959, 2(4): 309—336
22. Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Finite integrity bases for five or fewer symmetric 3×3 matrices. Arch. Rat. Mech. Anal., 1959, 2(5): 435—446
23. Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Further results in the theory of matrix polynomials. Arch. Rat. Mech. Anal., 1960, 4(3): 214—230
24. Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. Part I. Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, 9(1): 45—63
25. Spencer A. J. M. The invariants of six symmetric 3×3 matrices. Arch. Rat. Mech. Anal., 1961, 7(1): 64—71
26. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. Москва: Физматгиз, 1962 (Sedov L. I. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Massachussetts: Addison-Wesley, 1965)
27. Лохин В. В. Система определяющих параметров, характеризующих геометрические свойства анизотропной среды. Докл. АН СССР, 1963, 149(2): 295—297 (Lokhin V. V. A system of defining parameters characterizing the geometrical properties of an anisotropic medium. Sov. Phys. Dokl., 1963, 8: 260)
28. Лохин В. В. Общие формы связи между тензорными полями в анизотропной сплошной среде, свойства которой описываются векторами, тензорами второго ранга и антисимметричными тензорами третьего ранга. Докл. АН СССР, 1963, 149(6): 1282—1285 (Lokhin V. V. General forms of the relations between tensor fields in an anisotropic continuous medium, the properties of which are described by vectors, tensors of the second rank, and antisymmetric tensors of the third rank. Sov. Phys. Dokl., 1963, 8: 345)
29. Седов Л. И., Лохин В. В. Описание с помощью тензоров точечных групп симметрии. Докл. АН СССР, 1963, 149(4): 796—797 (Sedov L. I., Lokhin V. V. Description of point groups of symmetry with the help of tensors. Sov. Phys. Dokl., 1963, 8: 352—353)
30. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. Москва: Гостехиздат, 1957
31. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. Москва: Гостехиздат, 1953 (П. К. 洛薛夫斯基. 黎曼几何与张量解析 (上、下册). 俞玉森译. 北京: 高等教育出版社, 1955)

附录二　具有内自由度的连续介质模型[1)]

Л. И. 谢多夫

众所周知, 在现代物理学和力学中需要建立、引入并应用具有复杂性质的新模型. 气体和可变形固体的运动与各种物理化学过程有密切的相互作用, 相应物理化学过程不仅发生在给定物质微元的内部, 而且发生在它们与相邻物质微元以及外部对象的相互作用过程中. 因此, 实际发展相应宏观理论的时代已经到来. 在最近几年的国际文献中, 有大量理论工作引入了新形式的广义力和状态方程, 其中绝大部分工作是以形式数学结构为基础的.

新理论的建立密切关系到两个问题: 其一, 为了描述空间和时间的性质, 为了描述物体诸物质微元以及场的位置和状态, 需要引入一些新的概念并用数学方法给出相应特征量作为主定量和被定量; 其二, 需要在一般的运动规律和物理化学过程中选取出基本的主定量.

为了更具体地说明这个问题, 我们来考虑关于建立连续介质力学模型的问题的一般提法, 所建立的模型应当能够描述范围很广的多种运动和过程.

我们首先给出一些基本特征量的实例. 在研究物质连续介质的运动时, 我们必须使用时间的概念和三维或四维度规空间的概念, 此外还总是必须使用两种坐标系——观察者坐标系 x^1, x^2, x^3, x^4 和相应的拉格朗日坐标系 ξ^1, ξ^2, ξ^3, $\xi^4=t$

[1)] 本文是 1968 年 1 月 25 日在第三届全苏联理论与应用力学大会开幕式上的报告, 发表于《应用数学与力学》: Седов Л. И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. Прикладная математика и механика, 1968, 32(5): 771—785 (Sedov L. I. Models of continuous media with internal degrees of freedom. J. Appl. Math. Mech., 1968, 32(5): 803—819).

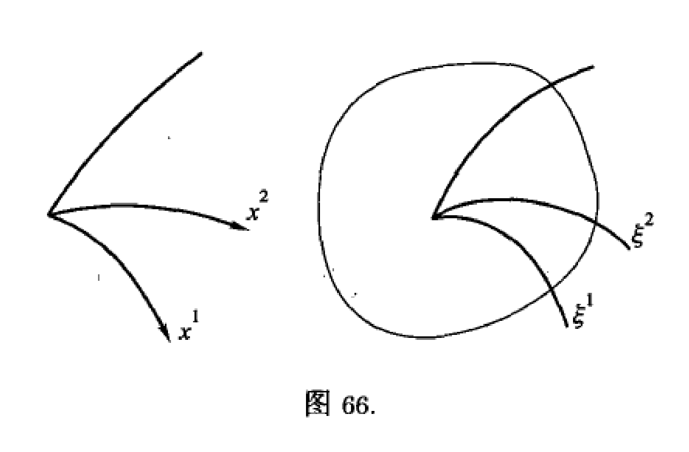


图 66.

(图 66)[1]. 在牛顿物理学中总是可以认为等式 $x^4=\xi^4=t$ 是成立的, 并把绝对时间当作标量变量. 坐标 ξ^1, ξ^2, ξ^3 确定各物质点. 这两种坐标系在本质上一般是曲线坐标系.

在黎曼度规空间中, 对长度微元有

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \hat{g}_{ij}d\xi^i d\xi^j. \tag{1}$$

定义度规的张量分量 g_{ij} 是基本的时空特征量. 张量 g_{ij} 在牛顿力学中是欧几里得张量, 在狭义相对论中则是伪欧几里得张量, 其分量是由观察者根据自己的考虑而补充定义的, 它们只依赖于坐标系 x^1, x^2, x^3, x^4 的选取.

在广义相对论中, 张量 g_{ij} 是由表示物理原理的方程定义的. 四维黎曼空间度规张量 g_{ij} 的性质是由微分不变量给出的, 这是新类型的非经典待求物理量的第一个非常重要的例子.

在用来确定介质运动的观察者参考系中, 基本的待求关系式是运动规律, 它表示为 4 个函数

$$x^i = x^i(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ \xi^4) \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{2}$$

除了函数 $x^i(\xi^k)$, 最好引入并研究导数

$$x^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j},\quad \nabla_{k_1}x^i_j,\ \cdots,\ \nabla_{k_1}\nabla_{k_2}\cdots\nabla_{k_p}x^i_j,\ \cdots \quad (p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots), \tag{3}$$

它们可以作为各种物理函数的自变量.

这里的记号 ∇_k 表示对 ξ^k 的协变导数, 并且一阶导数 x^i_j 在角标 j 固定时可以视为矢量的分量 (对应角标 i). 这些矢量确定了速度矢量的分量, 相应的旋转, 以及应变张量的分量

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij}) = \frac{1}{2}(g_{pq}\,x^p_i\,x^q_j - \mathring{g}_{ij}),$$

后者是在对比物体当前位置与通过假想引入的某一“初始位置”而定义的.

这里用 $\mathring{g}_{ij}(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ \xi^4)$ 表示“初始位置”所对应的度规张量的分量, 并且在

[1] 某些人认为, 仅仅借助于一个笛卡儿坐标系就可以不失一般性地建立运动的连续物质介质的力学理论. 在某些书中反映出来的这种观点已经深入到学生的意识中. 然而, 这种观点是错误的, 它妨碍我们理解力学的本质和力学问题的提法. 错误的根源在于, 一方面, 在可变形固体力学中通常只研究线性问题, 这时在计算中可以认为观察者参考系与随体坐标系相同; 另一方面, 在流体力学中, 拉格朗日随体坐标系的度规只有通过密度才能体现出来. 与此同时经常被忘记的是, 在利用观察者参考系引入诸如速度、加速度、应变率张量等表征物质体或物质面的特征量时, 随体坐标系的概念起到了重要的作用.

引入"初始位置"时利用了基于物理方法的某种约定. 在一些最简单的个别情况下, 可以把给定的可变形固体在某个"初始"时刻的三维空间部分当作一种"固定不变的固体", 从而引入初始位置 (见 [1]).

除了运动规律 (2), 还必须引入可变参量 μ^A 及其各阶梯度 (协变导数):

$$\mu^A = \mu^A(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ \xi^4),\ \ \nabla_{k_1}\nabla_{k_2}\cdots\nabla_{k_q}\mu^A,\ \cdots \tag{4}$$
$$(A=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ q=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

可以选取下列物理量作为这样的附加参量 μ^A:

熵 S; 混合物各组元的浓度 c_i; 残余应变张量的分量 $\varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij}$; 位错密度张量[1)]的分量 S_{ij};

电磁场矢量势的分量 A_i, 它们与电磁场张量之间的关系为

$$F_{ij}=\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^i},$$

并且电磁场张量由相应惯性坐标系中的以下矩阵定义 (参见诸如 [3] 的文献):

$$(F_{ij})=\begin{pmatrix}0 & B^3 & -B^2 & cE_1\\ -B^3 & 0 & B^1 & cE_2\\ B^2 & -B^1 & 0 & cE_3\\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0\end{pmatrix},$$

式中 c 是光速, E_1, E_2, E_3 是电场强度矢量的分量, B^1, B^2, B^3 是磁通量密度矢量的分量;

极化强度矢量的分量 $\mathscr{P}_{ij}=(F_{ij}-H_{ij})/2$, 并且 H^{ij} 由以下矩阵定义:

$$(H^{ij})=\begin{pmatrix}0 & H_3 & -H_2 & -D^1/c\\ -H_3 & 0 & H_1 & -D^2/c\\ H_2 & -H_1 & 0 & -D^3/c\\ D^1/c & D^2/c & D^3/c & 0\end{pmatrix},$$

式中 H_1, H_2, H_3 是磁场强度矢量的分量, D^1, D^2, D^3 是电通量密度矢量的分量;

内禀动量矩张量的分量 m_{ik}, 等等.

可变参量 μ^A 的本质可能是标量、张量或旋量[4, 5, 6]. 按照 (4), 可变参量 μ^A 必须在求解问题时求出, 于是, 可变参量的存在就表示所研究的连续介质模型具有内自由度.

可变形介质和场的所有宏观模型的有代表性的重要特点在于, 有限尺寸物体的

---

1) 目前正在以补充一些新参量的形式完善和推广塑性力学, 位错理论就是这样建立起来的 (参见诸如 [2] 的文献).

待求量是主定量的泛函. 例如, 有限尺寸的可变形物体的总内能 U 永远是函数 $x^i(\xi^k)$ 和 $\mu^A(\xi^k)$ 的泛函.

在实际应用的许多情况下可以认为内能具有广义的可叠加性, 所以对总内能 U 可以使用以下形式的公式:

$$U = \int_m u(g_{ij},\ x^i_j,\ \cdots,\ \nabla_{k_1}\nabla_{k_2}\cdots\nabla_{k_r}x^i_j,\ \mu^A,\ \cdots,\ \nabla_{k_1}\nabla_{k_2}\cdots\nabla_{k_s}\mu^A,\ S,\ K_B)\,\mathrm{d}m + U_0, \tag{5}$$

式中 m 是介质的静止质量, $\mathrm{d}m$ 是静止质量微元, u 是质量内能, 并且它在物理上仅仅是所列自变量的确定的函数, 而 S 是熵, K_B ($B = 1,\ 2,\ \cdots$) 是坐标 ξ^i 的已知函数 [1) (这是给定物理常量的推广). 按照基本的物理假设, 质量内能 u 在给定点的值不依赖于没有在 u 的上述自变量中列出的所有高阶梯度 [2) (r 和 s 是固定的数).

在经典弹性力学中 (在三维欧几里得空间中), 情况最为简单, 这时

$$u = u(\mathring{g}_{ij},\ \varepsilon_{ij},\ S,\ K_B).$$

在一些更复杂的新的连续介质模型中 [3), 质量内能 u 的自变量包括一些附加的物理化学特征量 μ^A 以及量 x^i_j 和 μ^A 的各阶梯度.

既然在内能的表达式中出现这样的梯度, 就必须重新考虑一些已有的概念, 例如运动方程和过程方程, 边界条件和初始条件, 相互作用机理, 间断条件, 等等.

在公式 (5) 中专门列出的常量 U_0 在经典弹性力学中无足轻重, 所以通常取为零. 在更一般的情况下必须考虑常量 U_0, 并且在把一个物体实际划分为许多不同部分时, 对物体各部分而言不能把这个常量看作可叠加的量. 这是因为, 把一个物体划分为许多小部分的任何过程都关系到外部能量的消耗. 在初步近似下, 总内能 U 的不可叠加性可以通过常量 U_0 加以考虑. 当物体表面因为形成裂纹而变化时, 当位错形成并发展时, 当物体发生损坏时, 考虑 U_0 的改变具有头等重要的意义.

当弹性体内存在孤立奇点时, 在平衡过程中可以通过弹性能的总体变化来求出常量 U_0 的变化. 如果在物体内部因为内部过程或已知的外部作用而出现或消除了某些缺陷, 这就涉及能量的消耗, 能量的来源可能是物体的总弹性能和已知的外部能

1) 对于内能的公式, 还可以通过观察者所使用的一般的非惯性曲线坐标系 x^i 对公式 (5) 中的积分进行变换, 或者直接使用该坐标系. 这时, 函数 u 的自变量不仅包括待求的那些函数, 还包括 x^i 的各种函数 $K_C(x^i)$ (类似于 $K_B(\xi^i)$), 并且这些函数在观察者坐标系中是已知的. 观察者坐标系度规张量的已知分量是函数 $K_C(x^i)$ 的一个例子; 如果介质或场的体积内能或质量内能与外部电磁场有关, 则外部电磁场的已知特征量是函数 $K_C(x^i)$ 的又一个例子. 参量 K_B 或 K_C 可能是标量, 也可能是已知张量或所给张量的分量.

2) 早在柯西创立弹性力学的时候, 他就预见到并实际认为, 在所给函数的自变量中引入高阶导数是可能的. 在静力学理论中, 从非连续介质向连续介质过渡的极限过程的结果是, 质量内能 u 的自变量一般可能包括 (3) 中的任意阶导数.

3) 例如带有小气泡的液体模型 [7].

量流. 在某些情况下, U_0 的变化类似于熔化的潜热[1)] 或一般的相变能.

必须强调[2)], 在物理学基础上进一步解决材料强度问题将密切关系到有关 U_0 的变化的研究. 在解决材料强度判据问题的过程中没有得到成熟的理论和明显的进展, 其原因可以解释为, 我们忽略了量 U_0. 另一方面, 脆性物体裂纹理论中的成就首先归功于对量 U_0 的研究.

在某些弹性力学问题的解中, 理论应力在个别微小区域中可能无限增长, 但这并不导致整体的甚至局部的明显断裂. 因此, 在弹性体中出现理论应力超过某些极限值的情况, 有时并不能作为可以接受的断裂判据.

各种建筑结构或试验零件的断裂一般是整体现象, 这与运动不稳定性现象具有同样的特征, 或者说与不可能出现平衡或连续运动的现象具有同样的特征.

在一般情况下, 断裂判据的本质是非局部的. 尽管如此, 整体不稳定性经常决定于完全的局部条件. 然而也不能不考虑, 在许多情况下, 相应局部条件可能仅仅是破坏平衡的稳定性和破坏给定结构的必要条件, 而不是充分条件.

构造连续介质模型, 其问题在于确定特征量并建立函数方程或微分方程以及各种附加条件, 使得我们能够在具体情况下提出数学问题, 用来求解运动规律 $x^i(\xi^k)$ 和决定物理化学过程的函数 $\mu^A(\xi^k)$.

建立连续介质模型并将其应用于已知的多类实际对象和现象, 这是物理研究的基本问题之一. 解决这个问题的基础是那些普适的和非普适的基本原始假设, 各种实验资料, 以及观察和实验测量结果同理论和计算结果在实际需要的精度下或者在根据问题的提法给出的精度下的一致性.

本文旨在描述、分析并发展具有内自由度的连续介质模型的一种一般理论, 以便根据最少的物理假设就能建立复杂的封闭方程组, 并提出用来区别个别模型和个别问题提法的复杂的附加边界条件和其他一些条件. 我们所研究的作为模型基础的基本变分方程是拉格朗日变分原理的一种简单而自然的推广, 该方程在许多重要情况下完全等价于拉格朗日变分原理的一些众所周知的应用实例和表述[4, 6, 9, 1, 10].

我们早就知道, 在相对论、分析力学、平衡过程热力学、弹性力学、流体力学等学科中, 所有基本方程都可以从拉格朗日变分原理推导出来.

在许多现代物理学理论中, 该变分原理不但是一种有效的研究工具, 而且就本质而言是唯一合理的原始出发点.

我们的分析表明, 物质介质和物理场的拉格朗日变分方程可以作为任何物理模型的基础, 其中不仅包括可逆现象模型, 而且包括不可逆现象模型.

利用变分方程可以在共同基础上把热力学和力学不可逆过程理论中的各种唯象方法和统计方法整合在一起. 例如, 在不可逆过程热力学的已有理论范围内就能够

1) 在国家标准中不再使用“潜热”一词来表示相变中传递的热量, 相应物理量可以通过焓的变化表示出来. ——译注

2) 例如, 可以参考本书第二卷.

解释并评价塑性力学中残余应变的关联定律[1].

在下述理论中, 对变分方程的使用是已知的创新点, 该变分方程被用于:

(1) 描述能够在连续介质中真正出现的不可逆现象;

(2) 建立状态方程;

(3) 建立动理方程;

(4) 得到初始条件和边界条件;

(5) 得到介质内部的强间断条件.

大量应用是建立和引入二维或一维模型, 以便取代三维模型, 这时要用额外含有待求可变参量的相应一维或二维已知函数去逼近描述运动或平衡的三维待求函数.

即使在牛顿力学的范围内, 也不可能只根据牛顿力学基本方程

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{6}$$

来描述那些明显具有许多内自由度的现象. 在发展连续介质和场的复杂宏观模型的现代理论时, 明确这一点格外重要.

基于方程 (6) 足以发展质点系分析力学、刚体力学、绝热弹性力学、理想不可压缩流体运动理论以及其他某些领域, 但是要想考虑宏观的热效应和电磁效应, 仅有方程 (6) 是不够的.

例如, 仅仅基于方程 (6) 不可能得到控制塑性应变增长的宏观定律, 不可能研究连续分布的位错发生变化时出现的相关效应, 不可能研究与介质极化和磁化宏观理论有关的各种过程和效应, 还不可能研究其他许多情况.

再如, 介质微元或有限物体的动量矩方程不是方程 (6) 的推论, 而是与自然定律相对于旋转变换群的对称性有关的独立的基本方程, 而方程 (6) 则与自然定律相对于反演变换群的对称性有关.

在许多经典连续介质模型中, 应力张量是作为被定特征量从固定一种介质的性质的一般假设引入的, 这时微分形式的动量矩方程或者归结为应力张量对称的条件, 或者自动成立.

我们指出, 在微观层面上基于方程 (6) 发展起来的统计理论可以用来得到一些宏观规律, 而统计理论的发展总是关系到某些普适的和个别的重要附加假设, 这些假设却不能直接得自方程 (6).

我们现在阐述基本变分方程的意义, 该方程可以作为构造具有内自由度的宏观介质模型的原始的基本方程.

为了简单和程度更高的一般性, 我们在伪欧几里得时空假设下在狭义相对论范围内考虑下述理论.

经验和相近的研究表明, 利用通过几何方法定义的四维物理时空以及四维矢量和张量来发展理论是非常方便和自然的, 并且在一些重要情况下, 这样的处理从物

[1] 关联定律 (ассоцированный закон) 即塑性本构关系, 见本书第二卷第十章 § 3. ——译注

理观点来看是完全必要的.

在观察者所使用的固定坐标系中, 设实际的运动和过程由分段光滑函数

$$x^i(\xi^k),\ \mu^A(\xi^k),\ S(\xi^k) \tag{7}$$

精确地或近似地描述. 与此同时, 我们还引入足够大的一类分段光滑容许函数

$$\begin{aligned}\tilde{x}^i(\xi^k) &= x^i(\xi^k) + \delta x^i,\\ \tilde{\mu}^A(\xi^k) &= \mu^A(\xi^k) + \delta\mu^A,\\ \tilde{S}(\xi^k) &= S(\xi^k) + \delta S.\end{aligned} \tag{8}$$

根据条件, 函数组 (7) 也包含在 (8) 中. 此外, 按照量 $K_B(\xi^k)$ 的含义, 我们认为

$$\delta K_B(\xi^k) = 0.$$

在四维时空中, 考虑由三维曲面 Σ_0 包围的区域 V_0 中的事件组, 我们将在其中某一区域中的点研究函数 $\tilde{x}^i$, $\tilde{\mu}^A$, $\tilde{S}$. 函数的进一步构造关系到以下假设: 在容许函数类中, 变分 δx^i, $\delta\mu^A$ 和 δS 在区域 V_0 中连续并具有足够的任意性, 变分方程中的所有导数都是连续的, 并且变分 δx^i_j, $\delta\nabla_k x^i_j$, $\ldots$, $\delta\nabla_k\mu^A$, $\cdots$ 可以通过描述实际现象的函数 $x^i(\xi^k)$, $\mu^A(\xi^k)$ 及其变分 δx^i, $\delta\mu^A$ 和对坐标 x^i 的导数表示出来.

下述理论的重要创新点是:

(1) 变分 δx^i 定义为一个四维逆变矢量的分量, 而变分 $\delta\mu^A$ 定义为本质与 μ^A 相同的张量的分量;

(2) 对于任意区域 $V_4 \subset V_0$, 在其边界 Σ_3 上的变分 δx^i 和 $\delta\mu^A$ 以及它们的导数能够取不等于零的、在已知条件下任意的值.

我们把基本变分方程写为以下形式:

$$\delta\int\limits_{V_4}\Lambda\,\mathrm{d}\tau + \delta W^* + \delta W = 0, \tag{9}$$

式中 Λ 是拉格朗日函数的体密度, $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\tau$, $\mathrm{d}\tau$ 是四维体微元 $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}V_4 = \mathrm{d}V_3\,\mathrm{d}t$.

对于物质介质, Λ 由以下公式给出[1]:

$$\Lambda = -\rho u(g_{ij},\ x^i_j,\ \nabla_k x^i_j,\ \cdots,\ \mu^A,\ \nabla_k\mu^A,\ \cdots,\ S,\ K_B), \tag{10}$$

式中 ρ 是标量密度 (静止质量与随体坐标系三维体积之比), u 是随体坐标系中单位

[1] 如果在公式 (5) 中存在量 U_0, 则这个量一般能够因为边界 Σ_0 和 V_4 内部的间断面的发展而变化, 所以在进行变分运算时, 可以在对 V_4 的积分中补充相应一些项. 在下述理论的基本提法中没有引入这样的附加项.

在 Λ 的公式中, 在自变量所包含的参量 μ^A 中专门单独列出了熵 S, 但在 Λ 的自变量中没有熵 S 的梯度. 下述理论还可以被直接推广到不专门列出熵的情况, 熵在这时只是 Λ 中的参量 μ^A 之一, 其中还有熵的任意阶梯度.

静止质量的内能. 在狭义相对论中, 量 u 可以视为四维标量. 热力学第一定律指出, 可以对任何物理上无穷小的微元引入函数 $u\rho\,\mathrm{d}\tau$.

确定函数 u 的自变量和形式, 这就是在具体建立连续介质模型时出现的基本物理问题. 要想把内能以其自变量的函数的形式固定下来, 总要提出某些假设, 其中部分假设有时可能显得是非常自然的和理所当然的.

在实际应用中经常可以把可变参量的取值看作小扰动特征量, 所以在许多情况下可以把函数 u 简单地看作小参量的正定二次型. 这时, 确定函数 u 的问题就归结为确定相应二次型的常系数的问题. 在确定这些系数时, 对称条件大有用处[11, 12], 也可以利用实验结果, 在某些条件下还可以基于 (从一些普适假设和给定模型所特有的假设发展起来的) 统计理论把这些系数的值同分子常量联系起来. 这样的系数类似于杨氏模量和泊松比, 在实际应用中总是能够很容易地从实验中得到这些系数. 可以 (根据某些进一步的假设) 用统计方法计算这些系数. 不过, 在固体的许多情况下用统计理论计算出的结果一般不符合实验结果. 对于气体, 计算与实验的符合情况好一些, 但这时仍要用实验来检验计算结果. 尽管如此, 利用统计方法能够发现类似系数之间的某些关系式, 例如热导率、黏度和扩散系数之间的关系式, 而这些关系式在唯象理论中是不明显的.

在牛顿力学中, 在惯性坐标系中通常使用公式

$$\Lambda = \rho\left(\frac{v^2}{2} - u\right),$$

来代替公式 (10), 式中 v 是连续介质物质点的速度, 标量 u 是质量内能.

对于物质介质的确定模型和电磁场, 在已有理论中可以认为函数 Λ 是已知的. 在广义相对论中, 量 Λ 中与引力有关的部分是已知的 (希尔伯特理论), 这是确定代表引力场的度规张量 g_{ij} 的基础. 广义相对论的各种推广一般总与拉格朗日函数密度 Λ 的变化或其他给定方式有关.

需要重点指出的是, 只有在内能或相应拉格朗日函数 Λ 给定或已经确定时, 我们才能从物理观点说, 一个物理系统是给定的或已知的[1, 10, 13—15].

因此, 从一般的物理观点来说, 用宏观变量的函数给出方程 (9) 中的拉格朗日函数 Λ 的要求是自然的. 为了满足这个要求, 我们要具备在各种物理理论和实验中积累起来的深厚经验. 我们总是必须提出一些假设来固定函数 Λ, 而这些假设的正确性可以用各种直观的和其他一些一般很简单的方法加以证实.

在讨论固定函数 Λ 的问题时, 宏观理论能够并且应当同普适物理原理、实验和统计理论发生最直接的接触.

现在来阐明泛函 δW^* 的表达式, 它表征在 V_4 中给定的那部分介质与外部场和外部物体之间的相互作用, 其中既包括按照体积分布的相互作用, 也包括与曲面 Σ_3 的相互作用; 此外, δW^* 还表征与所取区域 V_4 相邻的介质在曲面 Σ_3 上的某些不可逆作用.

在绝热可逆过程中, 以及当 V_4 内部和曲面 Σ_3 上没有外部能量流的时候, 经常可以简单地认为 $\delta W^* = 0$.

在天体力学的保守系统中总是可以认为, 在相应选取 Λ 时成立 $\delta W^* = 0$.

在唯象理论的一般情况下, 既有外部能量流进入所研究的介质所占区域和表面, 也存在不可逆过程, 这时 Λ 的自变量包括 $x^i(\xi^k)$, $\mu^A(\xi^k)$ 对 ξ^k 或 x^i 的各阶导数, δW^* 的表达式的一般形式从而可以写为 [1]

$$\delta W^* = \int\limits_{V_4} (\rho\theta\,\delta S - Q_i\,\delta x^i - M_A\,\delta\mu^A)\,\mathrm{d}\tau - \int\limits_{\Sigma_3 + S_\pm} \left(\sum_{j_1\cdots j_p} Q_i^{kj_1\cdots j_p} \nabla_{j_1}\cdots\nabla_{j_p}\delta x^i + \sum_{j_1\cdots j_q} M_A^{kj_1\cdots j_q} \nabla_{j_1}\cdots\nabla_{j_q}\delta\mu^A \right) n_k\,\mathrm{d}\sigma, \tag{11}$$

式中 $S_\pm$ 表示运动特征量发生强间断的 V_4 内部的三维曲面 S 的两侧, n_k 是 Σ_3, S_+ 和 S_- 的单位外法线矢量的分量, 分量

$$Q(Q_i,\ Q_i^{kj_1\cdots j_p}),\ M(M_A,\ M_A^{kj_1\cdots j_q})$$

是某些给定的广义外“力”; 而量 θ 的意义是绝对温度, 它在不同情况下可以视为被定量或给定量. 在公式 (11) 中, 熵的变分 δS 是独立于变分 δx^i 和 $\delta\mu^A$ 而引入的量.

给出泛函 δW^* 的表达式, 这关系到把相互作用分为内部作用和外部作用的问题. 例如, 如果把电磁场或引力场看作外部对象, 则 δW^* 的表达式包括电磁场有质动力和引力的相应能量流; 如果这些场是给定的, 而外部能量流也包含在介质模型中, 则在 δW^* 的表达式中会出现相应的全微分, 于是可以把它们从 δW^* 中分离出来并放到 Λ 的表达式中. 在把 δW^* 中的全微分移动到 $\delta\int\Lambda\,\mathrm{d}\tau$ 中之后, Λ 的含义发生变化, 公式 (10) 也就替换为另一个类似的公式, 其中取代内能的是自由能、焓或其他热力学状态函数. 对于不可逆过程, δW^* 不可能完全放入 Λ [2], 因为变分 δW^* 一般是非完整的.

如何定义广义质量“力” Q 和广义面“力” M 的分量的问题密切关系到耗散机理的理论, 在解决这个问题时必然要作出各种假设, 也必然要使用已有的不可逆过程热力学的各种结果. 确定 Q 和 M 的问题类似于在牛顿力学中建立力的定律的基本物理问题; 在牛顿力学中, 力由牛顿方程定义, 而这里的力则由变分方程 (9) 定义. 研究 δW^* 的被积表达式中的量在间断面 $S_\pm$ 上的性质可能具有特别的意义. 确定 δW^* 既关系到主定量 x^i 和 μ^A 的选取, 也关系到这些量的变分的定义, 还关系到诸如变分在间断面上的连续性等情况.

需要重点指出的是, 各种不同介质的共同点在确定或给出量 Λ 和 δW^* 的时候

[1] 在四维情况下, 在确定给出能量流的标积的符号时必须考虑 249 页脚注中的说明.

[2] 原文如此, 其实这句话的含义是 δW^* 不可能完全放入 $\delta\int\Lambda\,\mathrm{d}\tau$. ——译注

就已经显现出来. 利用这一点就能够使用和整合各个领域的经验, 并直接把各种理论联系起来. 此外, 还有一些使用统计方法的额外手段.

[变分方程 (9) 与热力学第一定律和第二定律有密切的关系 [1]. 我们将在牛顿力学的范围内更详细地研究这个问题. 能量方程 (热力学第一定律) 可以写为 (见第五章方程 (2.17))

$$\mathrm{d}\int\limits_{V_3} \mathscr{E}\rho\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{V_3} (\boldsymbol{F}_{\text{mass}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}q^{**})\rho\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_{\Sigma_2} p_{\alpha}^{\cdot\beta} n_\beta\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}\sigma, \tag{A}$$

热力学第二定律可以写为 (见第五章 § 5)

$$\int\limits_{V_3} \theta\,\mathrm{d}S\,\rho\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{V_3} (\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}q')\rho\,\mathrm{d}\tau, \tag{B}$$

式中 $\mathscr{E}$ 是质量总能量, 量 θ 的意义一般是绝对温度, S 是质量熵, $\mathrm{d}q'$ 是非补偿热, V_3 是任意的运动的介质物质体, 而 Σ_2 是 V_3 的表面.

方程 (A) 和 (B) 是对任意的三维物质体 V_3 写出的, 并且按照定义有

$$\mathrm{d}\int\limits_{V_3} \mathscr{E}\rho\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{V_3'} \mathscr{E}'\rho'\,\mathrm{d}\tau' - \int\limits_{V_3} \mathscr{E}\rho\,\mathrm{d}\tau, \tag{C}$$

其中不带撇号的量对应时刻 t, 带撇号的量对应时刻 $t+\mathrm{d}t$, 而能量方程中的 $\mathrm{d}t$ 对所有介质微元均相同. 在关系式 (A) 中, 量 $\mathrm{d}t$ 是通过增量 $\mathrm{d}x^i$, $\mathrm{d}q^{(\mathrm{e})}$ 等表现出来的. 也可以假设 $\mathrm{d}t$ 对不同介质微元和不同时刻 t 是不同的, 并进而研究作为能量方程推论的关系式 (A). 然而, 关系式 (A) 这时不是能量方程, 而是能量方程对组成物质体 V_3 的那些介质微元的推论.

在 x^1, x^2, x^3, t 空间中取任意的四维区域 V_4, 并用不同平面 $t=\text{const}$ 截取该体积, 得到不同的三维区域 V_3. 现在考虑不同的 $t=\text{const}$ 值所对应的各种 V_3 并研究关系式 (A).

把关系式 (A) 对时间积分, 根据式 (B) 和 (C) 可以得到关系式

$$-\mathrm{d}\int\limits_{V_4} \mathscr{E}\rho\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t + \int\limits_{V_4} (\boldsymbol{F}_{\text{mass}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \theta\,\mathrm{d}S - \mathrm{d}q' + \mathrm{d}q^{**})\rho\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\Sigma_3} p_{\alpha}^{\cdot\beta} n_\beta\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t, \tag{D}$$

它是对相应区域 V_3 写出的类似 (A) 的关系式的推论. 在对关系式 (A) 进行积分时, 如果认为所有 V_3 都对应同一个运动的物质体, 并且 $\mathrm{d}t$ 对所有物质微元都相同, 则关系式 (D) 就是有限时间间隔内的通常的能量方程.

作为一个自然的基本假设, 可以认为变分方程 (9) 中的 Λ, δW^* 和 δW 的定

[1] 方括号内的部分是为本书第四版写的.

义[1] 满足以下条件: 如果所有量的变分都是主定量在 $\mathrm{d}t$ 时间内的真实无穷小增量, 换言之, 如果成立等式

$$\begin{aligned} \delta x^i &= \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = v^i\,\mathrm{d}t, \\ \delta\mu^A &= \frac{\mathrm{d}\mu^A}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \dot{\mu}^A\,\mathrm{d}t, \\ \delta S &= \dot{S}\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{E}$$

则方程 (9) 完全等价于方程 (E).

当变分的定义由等式 (E) 给出时, 上述情况是在物理上解释方程 (9) 中的各个项和函数的基础. 由此可知, 在变分 δx^i, $\delta\mu^A$ 和 δS 的约束 (例如条件 $\delta(\rho\,\mathrm{d}\tau) \neq 0$) 所允许的任意变分的一般情况下, 总是可以把方程 (9) 写为以下形式:

$$-\delta\int_{V_4}\mathscr{E}\rho\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t + \int_{V_4}(\boldsymbol{F}_{\text{mass}}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \theta\,\delta S - \delta q' + \delta q^{**})\rho\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t + \int_{\Sigma_3} p_{\alpha}^{\cdot\,\beta}n_\beta\,\delta x^\alpha\,\mathrm{d}\sigma_2\,\mathrm{d}t + \int_{V_4}\delta\Omega\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = 0, \tag{9$_1$}$$

式中 $\delta\Omega$ 表示在真实的运动和过程中恒为零的泛函, $\delta\Omega \equiv 0$.

就像在相对论中那样, 在牛顿力学也可以把量 $\mathscr{E}$ 看作四维标量, 但是这时必须在 δW^* 的公式中考虑外质量力 (惯性力) 的虚功, 它是表达式 $\boldsymbol{F}_{\text{mass}}\cdot\delta\boldsymbol{r}$ 中的一项. 在牛顿力学中, 如果微元 $\mathrm{d}m$ 相对于惯性参考系以加速度 $\boldsymbol{a}$ 运动, 则惯性力在 $\mathrm{d}m$ 的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 上的同一个虚功有 2 种写法:

$$-(\boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r})\mathrm{d}m\,\mathrm{d}t = -\delta\left(\frac{v^2\,\mathrm{d}m}{2}\right)\mathrm{d}t + \left[\delta v^2 - \mathrm{d}\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)\right]\mathrm{d}m\,\mathrm{d}t \tag{F}$$

或

$$-(\boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r})\mathrm{d}m\,\mathrm{d}t = \delta\left(\frac{v^2\,\mathrm{d}m}{2}\right)\mathrm{d}t - \frac{\partial\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m}{\partial t}\mathrm{d}t - \frac{\partial\rho v^\alpha(\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r})}{\partial x^\alpha}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t. \tag{G}$$

[1] 下面将证明, 当 Λ 和 δW^* 给定后, 量 δW 就是确定的; 这是由状态方程决定的. δW 的一部分是 (9_2) 中的曲面积分 (见 385 页), δW 还可能对 $\mathrm{d}q^{(e)} + \mathrm{d}q^{**}$ 有贡献.

如果根据一些物理理论和假设已经建立起泛函 Λ 和 δW^* 的具体形式, 则欧拉方程和状态方程在 δW 的相应标准形式 (19) 下是完全确定的.

另一方面, 对于给定的欧拉方程, 泛函 Λ, δW^* 和 δW 不是唯一确定的. 其实, 如果把 Λ 替换为 $\Lambda + \nabla_i\Omega^i$, 式中 Ω^i 是依赖于坐标和待求函数的任意 4 个函数, 则在笛卡儿坐标系下有

$$\nabla_i\Omega^i = \frac{\partial\Omega^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\Omega^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\Omega^3}{\partial x^3} + \frac{\partial\Omega^4}{\partial t}.$$

对该附加项的体积分的变分应用奥一高公式后得

$$\delta\int_{V_4}\nabla_i\Omega^i\,\mathrm{d}\tau_4 = \delta\int_{\Sigma_3}\Omega^i N_i\,\mathrm{d}\tau_3.$$

所以, 此变分只影响 δW, 从而只影响状态方程和间断面条件. 因此, 在 Λ 中增加 $\nabla_i\Omega^i$ 这一项并不改变欧拉方程.

在等式 (G) 的右侧应用了质量守恒方程 $\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}\tau_3=\text{const}$, 即 $\partial\rho/\partial t+\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}=0$. 添加一个共同的因子 $\mathrm{d}t$ 并不改变问题的本质, 因为依条件有 $\delta\,\mathrm{d}t=0$.

在方程 (9) 中, 表达式 δW^* 中与惯性力的虚功有关的部分根据等式 (F) 和 (G) 可以改写为下面的形式 (F′) 和 (G′). 对 (F) 直接积分即得

$$\delta W_a^*=\int\limits_{V_4}(-\boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r})\mathrm{d}m\,\mathrm{d}t=-\delta\int\limits_{V_4}\frac{v^2\,\mathrm{d}m}{2}\mathrm{d}t+\int\limits_{V_4}\left[\delta v^2-\mathrm{d}\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)\right]\mathrm{d}m\,\mathrm{d}t. \qquad (\mathrm{F}')$$

我们强调, 对于真实的过程, 表达式 $\delta v^2-\delta(\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t)$ 恒等于零, 第二个积分从而也恒等于零, 所以在 δ 替换为 d 之后, 等式 (F′) 对于真实过程变为以下形式:

$$\delta W_a^*=-\mathrm{d}T\,\mathrm{d}t,$$

式中 T 为动能, 即

$$T=\int\limits_{V_3}\frac{\rho v^2}{2}\mathrm{d}m.$$

根据恒等式 (G), 把相应“体”积分变换为“面”积分后可得

$$\delta W_a^*=\int\limits_{V_4}(-\boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r})\mathrm{d}m\,\mathrm{d}t=\int\limits_{V_4}\frac{\rho v^2}{2}\mathrm{d}\tau_4-\int\limits_{\Sigma_3}\rho\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}\,N_4\,\mathrm{d}\sigma_3-\int\limits_{\Sigma_3}v^\alpha(\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r})N_\alpha\,\mathrm{d}\sigma_3, \quad (\mathrm{G}')$$

式中 N_i 是区域 V_4 的边界 Σ_3 上的四维单位法向矢量的分量 [1), 而最后两个积分可以包含在 δW 的表达式中.

在使用式 (F) 的理论中, 变分 $-\delta(u\rho\,\mathrm{d}\tau)$ 与变分 $-\delta(\rho v^2\,\mathrm{d}\tau/2)$ 相加, 这时在方程 (9) 中取带有负号的质量总能量作为 Λ:

$$\Lambda=-\rho u-\frac{\rho v^2}{2}=-\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)=-\rho\mathscr{E}.$$

这时, 在 δW_a^* 中还剩下积分 $\int\limits_{V_4}[\delta v^2-\mathrm{d}(\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t)]\mathrm{d}m\,\mathrm{d}t\neq 0$, 它在真实过程中精确地

[1) 设表面 Σ_3 的方程为

$$f(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)=0,$$

则显然

$$N_\alpha=\lambda n_\alpha\ (\alpha=1,\ 2,\ 3),\quad N_4=-\lambda\mathscr{D},$$

式中 n_α 是介质三维区域的二维表面的三维法向矢量的分量, $\mathscr{D}$ 是该表面的运动速度,

$$\lambda=\sqrt{\frac{(\partial f/\partial x^1)^2+(\partial f/\partial x^2)^2+(\partial f/\partial x^3)^2}{(\partial f/\partial x^1)^2+(\partial f/\partial x^2)^2+(\partial f/\partial x^3)^2+(\partial f/\partial t)^2}},$$

$$\mathscr{D}=\frac{-\partial f/\partial t}{\sqrt{(\partial f/\partial x^1)^2+(\partial f/\partial x^2)^2+(\partial f/\partial x^3)^2}}.$$

(G′) 中的最后一个积分还可以写为 $\int\limits_{\Sigma_3}v^\alpha(\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r})\,n_\alpha\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t$ 的形式.

等于零, 而方程 (9) 则变为 (9_1) 的形式. 在这种情况下, 泛函 δW 是从区域 V_4 的边界进入的全部外部虚能量流 (虚功率).

在使用公式 (G) 的理论中 δT 与 $-\delta u$ 相加, 所以可以认为

$$\Lambda = \rho\left(\frac{v^2}{2} - u\right) = L.$$

这时, 拉格朗日函数 L 不是带有负号的“总能量”. 在使用 (G) 时, 在 δW 的表达式中含有 (G′) 中的“曲面”积分, 所以 δW 这时不同于通过 V_4 的边界进入的原始总能量流. 在分析力学中通常使用表达式 $\Lambda = \rho(v^2/2 - u) = L$ (即式 (G)).

使用 (G) 的优点在于, 如果在分析力学中除了惯性力再没有无势的外力 (有势的力的功可以包含在 u 中), 换言之, 如果系统是保守的, 则这时不必引入 δW^*. 但是在非保守外力或非完整系统等一般情况下 $\delta W^* \neq 0$, 所以在分析力学中也需要引入 δW^*. 在使用 (G) 时, 基本变分方程 (9) 可以写为以下形式:

$$\delta\int\limits_{V_4}\Lambda\,\mathrm{d}\tau_4 + \int\limits_{V_4}(\boldsymbol{F}_{\mathrm{mass}}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \theta\,\delta S - \delta q' + \delta q^{**})\rho\,\mathrm{d}\tau_4 + \int\limits_{V_4}\delta\Omega_1\,\mathrm{d}\tau_4 + \int\limits_{\Sigma_3}[(p_{\alpha}^{\cdot\,\beta} - \rho v^{\beta}v_{\alpha})N_{\beta} - N_4\rho v_{\alpha}]\,\delta x^{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma_3 = 0, \qquad (9_2)$$

式中

$$\delta\Omega_1 = \delta\Omega - \rho\left[\delta v^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_\alpha\,\delta x^\alpha)\right].$$

如果注意到物理力学系统是具有内自由度的热力学系统, 其中的过程一般是不可逆的, 则方程 (9) 和其中每一项都具有独立的物理意义, 而对无穷小区域写出的方程本身则是能量守恒 (更准确地说, 能量变化率守恒) 的变分方程. 因此, 使用 (G) 的理论因其物理上的合理性 (其中每一项的四维标量本质保持不变) 而更加可取[1].

得自变分方程 (9) 的欧拉方程一般依赖于泛函 $\delta\Omega$ 的形式. 导致 $\delta\Omega$ 这一项的原因是在欧拉方程中可能包含有一些“广义回转力”, 这些力对能量方程没有贡献, 但是在主定量的假想增量上却给出不为零的广义功.

在一般情况下, 只要把方程 (9) 与 (D) 进行对比, 就容易求出泛函 $\delta\Omega$, 这时 δW^* 和拉格朗日函数的密度 Λ 是给定的, 内能 u 因而也是给定的.

1964 年, 文献 [14] 研究了关于 $\delta\Omega$ 的一般形式的问题. 当 $\delta\Omega \neq 0$ 时, 回转力的一个实例是洛仑兹力 $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})e/c$. 这个力垂直于电荷 e 的运动速度, 因而在真实运动中不做功. 显然, 如何给出“广义回转力”是一个物理问题, 下面将在给出函数 Λ 和泛函 δW^* 之后利用方程 (9) 唯一地解决这个问题. 另一方面, 对于固定的能量关系式 (D), 泛函 $\delta\Omega$ 以及与它和能量方程相应的 Λ 和 δW^* 可能因为“广义回转力”不同而不同.]

[1] 文献 [21] 详细研究了上述两种理论.

真实运动和过程是由一些定律描述的, 其中的熵产生方程可以并且适宜用来考虑耗散过程. 下面将从一般变分问题 (9) 中的欧拉方程得出介质微元的熵变化方程. 内部不可逆过程使熵增为正, 这应当由给出真实现象的 Λ 和广义“力” Q, M 的那些定律来保证.

根据方程 (9) 的基本意义, 可以认为量 δW 是通过 $\Sigma_3 + S_\pm$ 上的曲面积分表示出来的. 当变分 δx^i, $\delta\mu^A$ 和它们的导数在 $\Sigma_3 + S_\pm$ 上不等于零时, 可以利用方程 (9) 通过 $\delta\int\Lambda\,\mathrm{d}\tau$ 和 δW^* 来计算变分 δW.

如果除了方程 (9), 还有一些外部条件给出 δW 在 $\Sigma_3 + S_\pm$ 上的值 (这时 δx^i, $\delta\mu^A$ 和它们的相应导数是任意的), 则下文将表明, 由此可得初始条件、边界条件和间断面条件.

当变分 δx^i, $\delta\mu^A$ 及其所需阶导数在 $\Sigma_3 + S_\pm$ 上等于零, 但变分本身可以在 V_4 内取任意值 (线性无关) 时, 方程 (9) 给出欧拉方程[1)]

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^p}\nabla_i x_q^p + \nabla_s\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^i}x_q^s\right) + \frac{\partial\Lambda}{\partial K_B}\nabla_i K_B + Q_i + M_A\nabla_i\mu^A = \rho\theta\nabla_i S, \tag{12}$$

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta S} = \frac{\partial\Lambda}{\partial S} = -\rho\theta, \quad \frac{\delta\Lambda}{\delta\mu^A} = M_A, \tag{13}$$

式中 $\delta\Lambda/\delta x_q^p$, $\delta\Lambda/\delta\mu^A$ 和 $\delta\Lambda/\delta S$ 表示变分导数, 例如

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^p} = \frac{\partial\Lambda}{\partial x_q^p} - \nabla_k\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k x_q^p} + \nabla_k\nabla_s\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_s\nabla_k x_q^p} - \cdots \tag{14}$$

方程 (12) 乘以 x_4^i 后再对角标 i 求和, 得

$$\rho\theta\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\xi^4} = Q_i\frac{\partial x^i}{\partial\xi^4} + M_A\frac{\mathrm{d}\mu^A}{\mathrm{d}\xi^4} + \frac{\partial\Lambda}{\partial K_B}\frac{\mathrm{d}K_B}{\mathrm{d}\xi^4} + \nabla_s F^s, \tag{15}$$

---

1) 利用

$$\delta\Lambda = \partial\Lambda + \delta x^i\nabla_i\Lambda, \quad \delta\mu^A = \partial\mu^A + \delta x^i\nabla_i\mu^A, \quad \delta\,\mathrm{d}\tau = \nabla_i\,\delta x^i\,\mathrm{d}\tau$$

并令体积分中 δx^i, $\partial\mu^A$ 和 δS 的系数为零, 即可得到这些方程. 在方程 (9) 中, 标量、矢量和张量的变分是对表征物质微元的函数定义的, 也就是在 ξ^1, ξ^2, ξ^3 和 ξ^4 不变的条件下定义的.

用 ∂ 表示的变分是在观察者的观点下在坐标系 x^i 中定义的, 这时对函数的变分运算是在自变量 x^i 不变的条件下进行的. 变分 δ 和 ∂ 之间的关系为

$$\delta = \partial + \delta x^i\nabla_i.$$

例如, 按照 $K_B(\xi^i)$ 和 $K_C(x^i)$ 的定义有

$$\delta K_B(\xi^i) = 0, \quad 所以 \quad \partial K_B = -\partial x^i\nabla_i K_B,$$
$$\partial K_C(x^i) = 0, \quad 所以 \quad \delta K_C = \delta x^i\nabla_i K_C.$$

对于任何张量 $\boldsymbol{T}$ 的个别形式的变分 $\delta_G\boldsymbol{T}$ 或 $\partial_G\boldsymbol{T}$, 如果张量的分量是标量 R 的自变量, 并且只对基矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha$ 或 $\boldsymbol{e}_\alpha$ 进行变分运算, 则由此可得, 无论方程的形式如何, 都成立以下恒等式:

$$\delta_G R = 0 \quad 或 \quad \partial_G R = 0.$$

这类等式在某些中间变换过程中可能是有用的. 详见文献 [20].

式中

$$F^s = x_4^i x_p^s \frac{\delta\Lambda}{\delta x_p^i}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi^4} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^4}\nabla_i,$$

因为由等式

$$0 = \frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^p}(x_4^s \nabla s x_q^p - x_q^s \nabla s x_4^p) = \frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^p}\left(\frac{\partial^2 x^p}{\partial\xi^q\partial\xi^4} - \frac{\partial^2 x^p}{\partial\xi^4\partial\xi^q}\right)$$

可知

$$x_4^s \frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^p}\nabla_s x_q^p + x_4^p \nabla_s\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^p}x_q^s\right) = \nabla_s\left(x_4^i x_q^s \frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^i}\right).$$

方程 (15) 就是介质微元的熵变化方程, 因为坐标 ξ^4 按照约定起时间的作用. 为了得到对固有时间 $(\mathrm{d}\tau = (\hat{g}_{44})^{1/2}\mathrm{d}\xi^4)$ 的导数, 只要在方程 (15) 两侧都乘以 $(\hat{g}_{44})^{-1/2}$ 即可.

在欧拉方程中包含有动量方程和能量方程, 此外, 根据参量 μ^A 的意义, 在欧拉方程中还可能包含有麦克斯韦方程、化学动理方程和表征内自由度的待求函数 μ^A 的其他各种方程. 可以证明[2], 包括塑性介质模型在内的所有重要的宏观连续介质模型都可以从基本方程 (9) 推导出来.

一般而言, 欧拉方程是偏微分方程, 其阶数与拉格朗日函数 Λ 的自变量中的导数的阶数有关. 在一般情况下, 这个阶数可能相当高.

如果 $\Lambda\,\mathrm{d}\tau$ 和 δW^* 是由公式 (10) 和 (11) 定义的四维标量, 则对基本方程 (9) 中的第一个积分进行变分和分部积分运算后得到公式

$$\delta W = \int\limits_{\Sigma_3+S_\pm}\left[\sum_{j_1\cdots j_p}(P_i^{kj_1\cdots j_p} + Q_i^{kj_1\cdots j_p})\nabla_{j_1}\cdots\nabla_{j_p}\delta x^i + \sum_{j_1\cdots j_q}(N_A^{kj_1\cdots j_q} + M_A^{kj_1\cdots j_q})\nabla_{j_1}\cdots\nabla_{j_q}\delta\mu^A\right]n_k\,\mathrm{d}\sigma + \int\limits_{\Sigma_3+S_\pm}\nabla_s\Omega^{sk}n_k\,\mathrm{d}\sigma, \quad (16)$$

式中 $P_i^{kj_1\cdots j_p}$ 和 $N_A^{kj_1\cdots j_q}$ 是通过 Λ 和 x^i, μ^A 的一些导数表达出来的某些量 (张量的分量), 它们是用分部积分法对变分

$$\delta\int\limits_{V_4}\Lambda\,\mathrm{d}\tau$$

进行变换后得到的. 这些变换手段一般不能唯一地确定分量 $P_i^{kj_1\cdots j_p}$ 和 $N_A^{kj_1\cdots j_q}$, 因为当 Ω^{sk} 是任意反对称张量并且其分量以及分量的一阶和二阶导数在曲面 $\Sigma_3 + S_\pm$ 所包围的区域中连续时, 等式 (16) 中的最后一个积分恒等于零, 从而能够把这个积分写在等式的左侧. 这个结论根据奥－高定理是显而易见的, 因为从等式 $\Omega^{sk} = -\Omega^{ks}$ 可知 $\nabla_s\nabla_k\Omega^{sk} = 0$.

可以选取在形式上与公式 (16) 中前面的被积表达式相同的任何线性型作为分

量 Ω^{sk}. 显然, 因为 Ω^{sk} 的选取具有任意性, 所以把张量分量

$$P_i^{kj_1\cdots j_p}+Q_i^{kj_1\cdots j_p},\quad N_A^{kj_1\cdots j_q}+M_A^{kj_1\cdots j_q}$$

通过介质微元的运动和状态特征量表达出来的公式不是唯一确定的.

由此出现的问题是: 能量动量张量的概念不是唯一的, 当欧拉方程给定时状态方程一般具有随意性, 例如内应力这一基本概念具有随意性.

公式 (16) 中的上述张量分量对主定量的函数关系可以看作并解释为物理介质的状态方程, 这些方程是胡克定律的推广.

因此, 对于固定的欧拉方程组, 在确定状态方程时出现了随意性. 强间断面上的边界条件和初始条件是表示物体边界上或物体内部间断面上的物理相互作用的一些附加条件. 更详细的分析表明, 利用这些强间断面条件不能消除状态方程的上述不唯一性.

当欧拉方程组固定时, 可以用补充散度项的方式改变拉格朗日函数的密度 Λ. 不难看出, 这也会引起状态方程的改变. 然而, 完全固定的拉格朗日函数可以包含在连续介质模型的物理定义中. 固定的欧拉方程组不能给出介质具体模型的全部所需信息.

自然, 在状态方程确定后, 应力就唯一确定下来. 尽管如此, 在一些具体问题中, 即使状态方程具有某些不同的形式, 所有关于运动和参量 μ^A 的变化过程的规律也保持不变. 上述不唯一性的全部意义正在于此.

必须强调, 上面这种隐含的不唯一性与使用变分方程 (9) 建立状态方程的这种特殊方法无关. 如果使用热流微分方程这种一般热力学方程, 也会出现这种情况[14].

利用下述一般物理方法可以理解并阐明这种不唯一性的意义.

众所周知, 当刚体运动时, 刚体内部的应力问题没有确定的解答. 我们总是可以想象, 在刚体中作用着任意一组等价于零的内力, 但是因为无法发现是否存在这样的内力, 所以其存在是毫无意义的.

容易证明, 对于任何可变形体也有类似于刚体的情况, 这时可以指出许多组不同的应力, 它们并不影响运动规律, 因而同样无法发现这样的应力是否存在. 对于不同的内应力组, 运动方程和附加条件都是相同的, 但是状态方程各不相同.

显然, 如果首先给定状态方程, 就不会出现这样的不唯一性问题. 然而, 在构造新模型的问题中, 从需要求解的问题的本质讲, 在建立状态方程组时自然会出现状态方程可能有各种选择的问题. 当拉格朗日函数的密度依赖于主定量的一系列梯度时, 这个问题能够具有特别重要的意义.

为了举例说明以上提法的正确性, 我们来考虑弹性力学方程, 相应状态方程由以下公式表示:

$$p^{ij}=\rho\frac{\partial u}{\partial\varepsilon_{ij}}. \tag{17}$$

为了代替状态方程 (17), 我们再选取其他一些状态方程:

$$p^{*ij} = p^{ij} + \tilde{p}^{ij}, \quad \tilde{p}^{ij} = \nabla_s \nabla_k N^{iksj} \quad (N^{iksj} = -N^{ikjs}), \tag{18}$$

式中已经指明, 量 N^{iksj} 相对于角标 s, j 是反对称的. 这些量是一个张量的分量, 该张量在所有问题中都以同样的、但任意给定的方式依赖于任何状态参量及其任何导数[1].

容易证明, 运动和变形的所有规律都是独立于 $\tilde{p}^{ij}$ 而确定的, 因为附加应力 $\tilde{p}^{ij}$ 恒满足平衡方程

$$\nabla_j \tilde{p}^{ij} = 0,$$

此外, 对于表面为封闭曲面 Σ 的任何区域 V, 我们有

$$\int_V (\nabla_j \tilde{p}^{ij}) \delta x_i \, \mathrm{d}\tau = \int_\Sigma (\tilde{p}^{ij} \, \delta x_i + \nabla_k N^{iksj} \nabla_s \delta x_i) n_j \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma \nabla_s (\nabla_k N^{iksj} \delta x_i) n_j \, \mathrm{d}\sigma = 0.$$

显然, 这时除了应力 $\tilde{p}^{ij}$ 还要引入三阶表面应力[2] $\nabla_k N^{iksj}$. 根据边界条件, 曲面积分被积函数中的梯度 ∇_s 的法向分量在曲面 Σ 的每一点都恒等于零. 按照奥一高公式, 对曲面 Σ 的任何微元 $\Delta\sigma$ 的曲面积分可以化为对该微元的边界 Γ 的曲线积分, 在微元 $\Delta\sigma$ 上的相互作用于是归结为围线 Γ 上的相互作用, 因而可以视为内部相互作用. 如果在 Γ 上 $\delta x_i = 0$, 对微元 $\Delta\sigma$ 的曲面积分就等于零. 由此可知, 附加应力 $\tilde{p}^{ij}$ 和 $\nabla_k N^{iksj}$ 在整体上对被任何曲面 Σ 的微元分隔开的相邻介质微元之间的相互作用能量流没有贡献 (对于任意可能的位移 δx_i), 因此, 它们对介质与物体边界 Σ_0 上的外部物体之间的相互作用能量流也没有贡献. 对公式 (17) 所定义的分量 p^{ij} 使用类似的变换, 就得到能量方程, 因为 u 表示质量内能. 在所得方程中考虑了在 $\delta x_i \neq 0$ 时被曲面 Σ 的微元 $\Delta\sigma$ 分隔开的介质微元之间的机械功的交换. 这时, 相邻介质微元之间的能量交换只是因为通常的二阶应力 p^{ij} 而实现的. 有鉴于此我们强调, 在更复杂的模型中不能把内部的面相互作用仅仅归结为通常的二阶应力, 上述讨论因而是有意义的.

利用变分方程 (9) 能够更加深入地揭示状态方程、强间断面上的边界条件和初始条件等概念的本质. 如果没有一些附加的假设, 仅从微分方程出发是无法得到间断面条件的. 结果表明, 上述条件和方程之间有密切的关系, 应当在统一的框架下对它们进行研究.

为了得到下面的结论, 我们对 δW 的公式 (16) 进行变换, 使得被积表达式只含有变分 δx^i, $\delta\mu^A$ 和 $\Sigma + S_\pm$ 上的独立的沿法线方向的协变导数 $\nabla_n^{(\alpha)} \delta x^i$, $\nabla_n^{(\beta)} \delta\mu^A$

---

[1] 在没有外质量力的弹性力学平衡问题中, 应力的解也可以表示为 $p^{ij} = \tilde{p}^{ij}$ 的形式, 但在成立胡克定律或其他具体的状态方程的条件下, 量 N^{iksj} 是坐标的函数, 并且不是变形特征量的 (对所有问题均相同的) 普适函数. 例如, 若 ω^{pq} 是任何反对称张量, 则当 $N^{iksj} = \omega^{ik}\omega^{sj}$ 时, 分量 $\tilde{p}^{ij}$ 根据 (18) 是对称的.

[2] 详见: Sedov L.I. ZAMP, 1969, 20(5): 653—658.

($\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots$). 问题在于, 变分 δx^j 和梯度 $\nabla_j \delta x^i$ 可以视为独立的, 但并非所有 $\Sigma+S_\pm$ 上的高阶梯度 $\nabla_{j_1}\cdots\nabla_{j_p}\delta x^i$ 都可以视为独立的.

为了建立边界条件, Миндлин[1) [17]] 在一些最简单的个别情况下对公式 (16) 提出了一些相应的变换. 为了得到间断面条件, Лурье[18] 提出了一些相应的个别变换.

我们假设曲面 $\Sigma_3+S_\pm$ 是光滑的, 为此只要假设曲面 S 光滑即可 (因为区域 V_4 和所选曲面 Σ_3 是任意的). 上面提到的变换给出公式

$$\delta W=\int\limits_{\Sigma+S_\pm}(\mathscr{P}_{i\,0}\delta x^i+\mathscr{P}_{i\,1}\nabla_n\delta x^i+\cdots+\mathscr{P}_{i\,(r-1)}\nabla_n^{(r-1)}\delta x^i$$
$$+\mathscr{M}_{A0}\delta\mu^A+\mathscr{M}_{A1}\nabla_n\delta\mu^A+\cdots+\mathscr{M}_{A(s-1)}\nabla_n^{(s-1)}\delta\mu^A)\mathrm{d}\sigma. \tag{19}$$

在公式 (19) 中, 矢量分量 $\mathscr{P}_{i\,0},\ \mathscr{P}_{i\,1},\ \cdots,\ \mathscr{P}_{i\,(r-1)}$ 和张量分量 $\mathscr{M}_{A0},\ \cdots,\ \mathscr{M}_{A(s-1)}$ 是唯一确定的, 它们可以通过并非唯一确定的 $P_i^{kj_1\cdots j_\nu}+Q_i^{kj_1\cdots j_\nu}$ 和 $N_A^{kj_1\cdots j_\nu}+M_A^{kj_1\cdots j_\nu}$ 表示出来.

矢量分量 $\mathscr{P}_{i\,\alpha}$ 和张量分量 $\mathscr{M}_{A\beta}$ 是在边界面 $\Sigma+S_\pm$ 的微元 $\mathrm{d}\sigma$ 上的点定义的, 它们不仅像通常的应力那样依赖于所考虑的曲面微元的方向, 而且还依赖于其曲率以及其他一些更精细的微分几何性质[2)], 这是这些分量的一个非常重要的特点.

矢量 $\mathscr{P}_\alpha$ 和张量 $\mathscr{M}_\beta$ 就是连续介质的真实特征量, 它们依赖于在其上面发生相互作用的曲面微元的几何特性; 它们对主定量的函数关系则是通过拉格朗日函数 Λ 以及 δW^* 的表达式中的 $Q_i^{kj_1\cdots j_\nu}$ 和 $M_A^{kj_1\cdots j_\nu}$ 表现出来的. 显然, 在 δW^* 的公式 (11) 中, 只有 $\mathscr{P}_{i\alpha}$ 和 $\mathscr{M}_{A\beta}$ 的定义中所包含的、含有 $Q_i^{kj_1\cdots j_\nu}$ 和 $M_A^{kj_1\cdots j_\nu}$ 的那些组合才是重要的.

如果量 δW 在边界 Σ_0 的部分区域中是给定的, 则根据公式 (19)、δx^i 和 $\delta\mu^A$ 的任意性以及它们在 Σ_0 上的法向梯度的任意性可以得到, 在 Σ_0 的上述区域中的点 B 成立以下条件:

$$\mathscr{P}_{i\,\alpha}=f_{i\,\alpha}(B),\quad \mathscr{M}_{A\beta}=g_{A\beta}(B) \tag{20}$$

$(i=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ A=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ \alpha=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ r-1;\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ s-1)$,

式中 $f_{i\,\alpha}(B)$ 和 $g_{A\beta}(B)$ 一般是在点 B 的给定函数. 在 $t_0=\mathrm{const}$ 所对应的边界 Σ_0 的三维空间部分中, 等式 (20) 是物体所占三维区域中的初始条件.

---

1) 对于变分的任何有限阶梯度, В. А. Желнорович 提出了四维时空中的一般变换.

2) 如果 $\Sigma+S_\pm$ 没有棱或尖点, 就容易从公式 (16) 变换到公式 (19); 如果存在这样的奇异性, 则公式 (19) 仍然成立, 但这时必须把积分 (19) 的值看作对趋于有棱曲面的光滑曲面 $\Sigma+S_\pm$ 的积分的极限. 公式 (19) 中的被积函数依赖于矢量 $\boldsymbol{n}$ 和它的切向导数, 所以当被积函数具有奇异性和间断时, 在取极限时 (在趋于具有二维棱的三维曲面 $\Sigma+S_\pm$ 时) 就会出现一些对棱的二维曲面的附加积分. 只要对有棱曲面直接应用在棱上没有奇异性的积分 (16), 就可以写出这些附加的积分, 然后应当进行一个变换, 从而得到公式 (19). 在这个变换中, 散度项的第二个积分对于光滑曲面 $\Sigma+S_\pm$ 等于零, 对于有棱曲面则给出一些对棱的积分, 它们都很容易计算, 并且一般不等于零.

Σ 的三维区域由物体的二维边界 Σ_2 和同时发生变化的时间 t 组成, 该区域中的条件 (20) 可以视为给定物体所占的变化的三维区域的边界上的边界条件. 在当前边界 $t = \text{const} > t_0$ 上, 等式 (20) 一般可以简单地视为用来确定其右侧的关系式, 这时要使用由初始条件和边界条件决定的运动规律.

现在, 我们来写出位于连续介质四维区域 V_4 内部的三维强间断面 S 上的条件. 根据前面的研究和相应假设, 我们认为所有分布在 S 上的对介质的外部作用都已经包含在 $\delta W*$ 中 (例如, 有时可以把下列效应看作外部作用: "可叠加"的常量 U_0 的变化, 燃烧或爆轰前锋中的化学反应放热, 或者在 S 上的各类间断面上的能量吸收; 同样这些效应也可以解释为内部过程, 这时要改变拉格朗日函数的密度 Λ, 使其更加复杂, 例如, 可以把对间断面 S 的相应附加曲面积分的变分分离出来). 令 $\delta W = \delta W_{\Sigma_3} + \delta W_{S_\pm}$, 再令变分 δx^i, $\delta\mu^A$ 以及所有在 δW 中出现的这些变分的导数在 Σ_3 上等于零, 在间断面 S 上可得

$$
\begin{aligned}
0 = \delta W_{S_\pm} = \int\limits_S [&(\mathscr{P}_{i\,0}\delta x^i)_+ + (\mathscr{P}_{i\,0}\delta x^i)_- + \cdots + (\mathscr{P}_{i\,(r-1)}\nabla_n^{(r-1)}\delta x^i)_+ \\
&+ (\mathscr{P}_{i\,(r-1)}\nabla_n^{(r-1)}\delta x^i)_- + (\mathscr{M}_{A0}\delta\mu^A)_+ + (\mathscr{M}_{A0}\delta\mu^A)_- + \cdots \\
&+ (\mathscr{M}_{A(s-1)}\nabla_n^{(s-1)}\delta\mu^A)_+ + (\mathscr{M}_{A(s-1)}\nabla_n^{(s-1)}\delta\mu^A)_-]\,\mathrm{d}\sigma. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

对于公式 (21) 中所有依赖于 S 的法线方向的量, 下面将采用法线的同一个方向.

根据 $\mathscr{P}_{i\alpha}$ 和 $\mathscr{M}_{A\beta}$ 以及算子 ∇_n^k 的定义, 我们有

$$
\mathscr{P}_{i\,\alpha}(n) = \mp\mathscr{P}_{i\,\alpha}(-n), \quad \mathscr{M}_{A\beta}(n) = \mp\mathscr{M}_{A\beta}(-n), \quad \nabla_n^{k-1} = \mp\nabla_{-n}^{k-1}, \qquad (22)
$$

并且减号对应 α, β, k 是偶数的情况, 加号对应 α, β, k 是奇数的情况.

我们已经指出, 容许函数类的基本条件在于以下假设: 待求的解和区域 V_4 中的比较函数是分段连续的, 在基本变分方程 (9) 中出现的这些函数的所有偏导数也是分段连续的. 在区域 V_4 内部引入强间断面 S 的基本意义在于, 待求的解和进行变分运算的相应容许函数在假想穿过曲面 S 时发生间断[1]. 这些间断可能具有各种特性, 其中有些特性可能与在 S 上发生间断的函数本身的阶数和形式有关, 或者与其导数的阶数和形式有关. 例如, 可以研究裂纹类型的强间断面, 这时待求函数本身以及任何偏导数都发生间断; 或者研究位错类型的强间断面, 这时垂直于曲面 S 的小位移是连续的, 但在 S 的切平面内的位移在从 S_+ 这一侧穿过 S 到达 S_- 这一侧时发生间断; 或者研究经典空气动力学中的激波类型的强间断面, 这时所有坐标 (位移) 在 S 上是连续的, 但是导数 $\partial x^i/\partial\xi^j$ 可能发生间断.

如果在函数 Λ 的自变量中有高阶导数

$$
\frac{\partial^k x^i}{\partial\xi^{j_1}\cdots\partial\xi^{j_k}},
$$

[1] 在一般情况下, 待求函数的间断值也是需要求解的量. 不过, 也可以考虑这样一些问题, 这时待求量的某些间断在问题的一些附加条件下是固定的.

就会出现数量更多的各种类型的可能的强间断面.

在空气动力学中和在固体力学的一些简单理论中, 在提出和解决具体问题的时候可能出现各种情况, 这时间断面类型或者是给定的, 或者需要在求解过程中求出.

因此, 在应用变分方程时还必须引入或求出这样的函数类, 使得待求的解应当存在于其中[1]. 例如, 如果认为容许函数类决定于在曲面 S 上的点成立的以下条件:

$$\begin{aligned}&(\nabla_n^\alpha \delta x^i)_+ = (\nabla_n^\alpha \delta x^i)_- \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ \alpha=0,\ 1,\ \cdots,\ r_1-1;\ r_1\leqslant r),\\&(\nabla_n^\alpha \delta x^i)_+,\ (\nabla_n^\alpha \delta x^i)_- \text{ 在 } \alpha=r_1,\ r_1+1,\ \cdots,\ r-1 \text{ 时是任意的和独立的},\\&(\nabla_n^\beta \delta \mu^A)_+ = (\nabla_n^\beta \delta \mu^A)_- \quad (A=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ \beta=0,\ 1,\ \cdots,\ s_1-1;\ s_1\leqslant s),\\&(\nabla_n^\beta \delta \mu^A)_+,\ (\nabla_n^\beta \delta \mu^A)_- \text{ 在 } \beta=s_1,\ s_1+1,\ \cdots,\ s-1 \text{ 时是任意的和独立的},\end{aligned}\tag{23}$$

这就定义了在穿过曲面 S 时的容许函数类 $x^j(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ \xi^4)$ 和 $\mu^A(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$, 它们都是连续函数, 并且前者的 r_1-1 个偏导数和后者的 s_1-1 个偏导数也是连续的, 此外, 这些函数对 S 的高阶法向导数可能具有任意间断. 作为对条件 (23) 的补充, 这里还假设在沿曲面 S 的运动过程中, 方程 (9) 中的所有量在曲面 S 的每一侧都是连续的. 根据 (22), (23) 以及量 $\nabla_n^\alpha \delta x^i$ 和 $\nabla_n^\beta \delta \mu^A$ 的任意性和独立性, 从 (21) 可得以下间断面条件:

$$\begin{aligned}&(\mathscr{P}_{i\alpha})_+ = (\mathscr{P}_{i\alpha})_-,\quad (\mathscr{M}_{A\beta})_+ = (\mathscr{M}_{A\beta})_-\\&\qquad(\alpha=0,\ 1,\ \cdots,\ r_1-1,\ \beta=0,\ 1,\ \cdots,\ s_1-1),\\&(\mathscr{P}_{i\alpha})_+ = (\mathscr{P}_{i\alpha})_- = 0,\quad (\mathscr{M}_{A\beta})_+ = (\mathscr{M}_{A\beta})_- = 0\\&\qquad(\alpha=r_1,\ r_1+1,\ \cdots,\ r-1,\ \beta=s_1,\ s_1+1,\ \cdots,\ s-1).\end{aligned}\tag{24}$$

条件 (24) 可以视为量 $\mathscr{P}_{i\alpha}$ 和 $\mathscr{M}_{A\beta}$ 在间断面 S 上的连续性条件 (介质微元的世界线在穿过间断面 S 时仍然保持).

为了更详细地研究具有间断解的问题, 特别是与间断面 S 的边界发生变化有关的问题 (例如孤立位错沿介质内部微元传播, 裂纹增长等情况), 可以推广基本变分方程 (9) 并再引入曲面 S 或其边界对拉格朗日坐标 ξ^i 的附加的变分运算.

因此, 为了得到在实际物体中发生的这类复杂间断现象所对应的附加关系式, 一般而言必须用更加复杂的形式改写基本变分方程 (9) 中的泛函, 这时要在 δW^* 或 $\delta\int\Lambda\,\mathrm{d}\tau$ 中引入一些附加项, 其中含有对拉格朗日坐标的相应变分. 决定因素在于, 我们有必要考虑一些特殊的能量效应, 这些效应与不同本质的间断的形成过程有关, 或者与间断可能沿介质微元传播有关.

在连续介质理论以及与电磁场有相互作用的连续介质理论中, 根据基本方程 (9) 进一步发展一般方法并建立具体的介质模型的相关结果包含在已经发表的文献 [19—22] 中.

[1] 这种类型的假设类似于在连续介质力学中所采用的关于各种函数的连续性和可微性的一些非常一般的假设.

附录二参考文献

1. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. УМН, 1965, 20(5): 121—180 (Sedov L. I. Mathematical methods for constructing new models of continuous media. Russian Math. Surveys, 1965, 20(5): 123—182)
2. Бердичевский В. Л., Седов Л. И. Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций: Связь с теорией пластичности. ПММ, 1967, 31(6): 981—1000 (Berdichevskii V. L., Sedov L. I. Dynamic theory of continuously distributed dislocations: Its relation to plasticity theory. J. Appl. Math. Mech., 1967, 32(5): 989—1006)
3. Седов Л. И. О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций. ПММ, 1965, 29(1): 4—17 (Sedov L. I. On the ponderomotive forces of interaction of an electromagnetic field and an accelerating material continuum, taking into account finite deformations. J. Appl. Math. Mech., 1965, 29(1): 2—17)
4. Голубятников А. Н. Сплошная среда со спинорными и векторными характеристиками. Докл. АН СССР, 1966, 169(2) (Golubyatnikov A. N. Continuous medium with spinor and vector characteristics. Sov. Phys. Dokl., 1967, 11: 578)
5. Желнорович В. А. Спинор как инвариантный объект. ПММ, 1966, 30(6): 1087—1097 (Zhelnorovich V. A. Spinor as an invariant. J. Appl. Math. Mech., 1966, 30(6): 1289—1300)
6. Желнорович В. А. Модели сред с внутренним электромагнитным и механическим моментами. Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды (к 60-летию академика Л. И. Седова). Москва: Наука, 1969 (Zhelnorovich V. A. Models of media with internal electromagnetic and mechanical moments. In: Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics (Contributions in honor of the 60th birthday of Academician L. I. Sedov). Philadelphia: SIAM, 1969)
7. Когарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, 137(6): 1331—1333 (Kogarko B. S. On a model of a cavitating liquid. Sov. Phys. Dokl., 1961, 6: 305)
8. Бердичевский В. Л. Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа. ПММ, 1966, 30(3): 510—530 (Berdichevskii V. L. Construction of models of continuous media by means of the variational principle. J. Appl. Math. Mech., 1967, 30(3): 607—629)
9. Седов Л. И. О тензоре энергии-импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и в материальных средах. Докл. АН СССР, 1965, 164(3): 519—522 (Sedov L. I. The energy-momentum tensor and macroscopic internal interactions in a gravitational field and in material media. Sov. Phys. Dokl., 1966, 10(9): 824—826)
10. Sedov L. I. Variational methods of constructing models of continuous media. Symposia, Vienna, June 22—28, 1966. Irreversible aspects of continuum mechanics. Springer-Verlag, 1968
11. Голубятников А. Н. Нелинейные спинорные функции. Докл. АН СССР, 1965,

165(2)

12. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких аргументов. ПММ, 1963, 27(3): 393—417 (Lokhin V. V., Sedov L. I. Nonlinear tensor functions of several tensor arguments. J. Appl. Math. Mech., 1963, 27(3): 597—629); 还可参阅本书附录一
13. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. Москва: Физматгиз, 1962 (Sedov L. I. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Massachussetts: Addison-Wesley, 1965)
14. Sedov L. I. Some problems of designing new models of continuous media. Proceedings of 11th Congress of Applied and Theoretical Mechanics, Munich, 1964. Springer-Verlag, 1966. 9—19 页
15. 本书
16. Седов Л. И., Эглит М. Э. Построение неголономных моделей сплошных сред с учетом конечности деформаций и некоторых физико-химических эффектов. Докл. АН СССР, 1962, 142(1): 54—57 (Sedov L. I., Eglit M. E. On nonholonomic models of continuous media considering finite deformation and certain physicochemical effects. Sov. Phys. Dokl., 1962, 7(1): 25—27)
17. Mindlin R. D. Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity. Int. J. Solids Struct., 1965, 1: 417—438
18. Лурье М. В. Применение вариационного принципа для исследования разрывов в сплошной среде. ПММ, 1966, 30(4): 747—753 (Lur'e M. V. Application of a variational principle to investigate discontinuities in a continuum. J. Appl. Math. Mech., 1966, 30(4): 886—893)
19. Седов Л. И. Размышления о науке и об ученых. Москва: Наука, 1980
20. Седов Л. И. Избранные вопросы современной механики. Ч. 1. Сборник к 50-летию С. С. Григоряна. Москва: МГУ, 1981
21. Седов Л. И. Виды энергии и их трансформации. ПММ, 1981, 45(6): 963—984 (Sedov L. I. The forms of energy and their transformations. J. Appl. Math. Mech., 1981, 45(6): 727—741)
22. Седов Л. И. Об описании динамических свойств гравитационного поля в вакууме. ПММ, 1980, 44(2): 195—204 (Sedov L. I. On description of dynamic properties of the gravitational field in vacuum. J. Appl. Math. Mech., 1980, 44(2): 141—146); 还可参见: Проблемы физики: Классика и современность. Под ред. Г. Ю. Тредера (пер. с нем. под ред. Л. И. Седова). Москва: Мир, 1982

人名译名对照表

A

阿尔曼西，E. Almansi
埃格利特，M. Э. Эглит
爱因斯坦，A. Einstein
安培，A. M. Ampère
昂萨格，L. Onsager
奥斯特罗格拉茨基，M. B. Остроградский

B

巴姆一泽利科维奇，Г. М. Бам-Зеликович
比安基，L. Bianchi
玻尔兹曼，L. Boltzmann
布拉维，A. Bravais
布西内斯克，J. V. Boussinesq

D

道尔顿，J. Dalton
狄拉克，P. A. M. Dirac
笛卡儿，R. Descartes

F

法拉第，M. Faraday
范德瓦耳斯，J. D. van der Waals
费米，E. Fermi
弗劳德，W. Froude
傅里叶，J. B. J. Fourier

G

高斯，C. F. Gauss
格林，A. E. Green
葛罗麦卡，И. С. Громека
古尔德贝格，C. M. Guldberg

H

哈别耶夫，H. C. Хабеев
哈密顿，W. R. Hamilton
亥姆霍兹，H. L. F. Helmholtz
赫兹，H. R. Hertz
胡克，R. Hooke
霍尔，E. H. Hall

J

吉布斯，J. W. Gibbs
伽利略，Galileo Galilei
焦耳，J. P. Joule

K

卡尔利科夫，B. П. Карликов

卡诺，N. L. S. Carnot
凯莱，A. Cayley
柯西，A. L. Cauchy
克拉珀龙，B. P. E. Clapeyron
克里斯托费尔，E. B. Christoffel
克罗内克，L. Kronecker
库利科夫斯基，A. Г. Куликовский
库仑，C. O. Coulomb

L
拉格朗日，J. L. Lagrange
拉梅，G. Lamé
拉普拉斯，P. S. Laplace
兰姆，H. Lamb
朗道，Л. Д. Ландау
雷诺，O. Reynolds
黎曼，G. F. B. Riemann
里奇，G. Ricci-Curbastro
栗弗席兹，E. M. Лифшиц
列维一奇维塔，T. Levi-Civita
罗赞采娃，B. B. Розанцева
洛伦兹，H. A. Lorentz
洛马金，E. B. Ломакин
洛欣，B. B. Лохин

M
马赫，E. Mach
迈耶，J. E. Mayer
麦克尔孙，A. A. Michelson
麦克斯韦，J. C. Maxwell
闵可夫斯基，H. Minkowski

N
纳维，L. M. H. Navier
能斯特，W. F. H. Nernst
牛顿，I. Newton

O
欧几里得，Euclid
欧拉，L. Euler
欧姆，G. S. Ohm

P
坡印亭，J. H. Poynting
泊松，S. D. Poisson

Q
切尔克兹，A. Я. Черкез

S
撒哈，M. N. Saha
圣维南，A. J. C. Saint-Venant
舒布尼科夫，A. B.Шубников
舒尔，F. H. Schur
斯捷潘诺夫，Г. Ю. Степанов
斯托克斯，G. G. Stokes
斯韦什尼科娃，E. И. Свешникова

T
汤姆孙，W. Thomson (开尔文, Lord Kelvin)

W
瓦格，P. Waage
外尔，H. Weyl
乌莫夫，H. A. Умов

X
西布加图林，H. P. Сибгатуллин,
И. Н. Сибгатуллин
西罗京，Ю. И. Сиротин
希尔伯特，D. Hilbert
谢多夫，Л. И. Седов

Y
雅可比，C. G. J. Jacobi
亚伯拉罕，M. Abraham
杨，T. Young
伊夫列夫，Д. Д. Ивлев
于戈尼奥，H. Hugoniot

索 引

K

L

O

P

Q

R

W

X

Y

总 策 划：张小萍
责任编辑：郑轩辕
封面设计：王凌波

本书用统一的观点阐述力学、热力学、电动力学和相应数学方法，并将其应用于固体、液体、气体和电磁场等连续介质力学的经典对象。第一卷介绍连续介质力学的一般概念和简单模型，包括一般曲线坐标系中的张量分析、运动学、基本微分方程和本构关系、热力学基础和电磁场理论，特别关注如何提出连续介质力学数学模型的问题。第一卷附录收录了作者在张量对称性理论和建立物理模型方面的原创性工作。第二卷介绍连续介质力学的一些具体模型和理论，包括流体力学、弹性力学、塑性力学和裂纹理论。

本书可作为高等学校力学和数学专业高年级大学生教材，也可供相关专业的研究生和科研人员参考。

■ 学科类别：力学、数学
academic.hep.com.cn


ISBN 978-7-04-022155-8
9 787040 221558 >
定价 49.00 元